

Weighing 行列の構成と分類

愛媛大 教育 大森博之 (Hiroyuki Ohmori)

位数 n , 重さ k の Weighing 行列 (W) とは, 成分が $0, +1, -1$ で $W^t W = k I_n$ のときをいう。ただし, $^t W$ は W の転置行列である。特に $k=n$ のときは, 位数 n の Hadamard 行列と呼ばれている。

今, 同一な位数および重さを持つ2つの Weighing 行列が与えられているとき, 一方の行列の行および列の適当な置換, さらに行および列に適当に -1 をかけることにより他方の行列に一致させることができるとき, 2つの行列は同値であるとす。この同値関係により分類が完成されているものは, 現在のところ以下の通りである。

- (i) 重さ k が 5 以下の場合ですべての位数 n について。
- (ii) 位数が 13 以下の場合ですべての重さについて。
- (iii) 位数が 28 以下の Hadamard 行列について。

筆者は, 重さ 6 の Weighing 行列の分類を試みているが, 未だ完成できていない。今回は, その中間報告である。

任意の位数の、重さ6の Weighing 行列が与えられたとき、最初の 6×6 行列は一般性を失うことなく次の形をしている。

$$(*) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & \\ & a_{ij} & & & & \\ \vdots & & & & & \\ & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{ij} \text{ は } 0, \pm 1 \text{ で } A \text{ の } 2 \sim 6 \text{ 行} \\ \text{および } 2 \sim 6 \text{ 列は 1 行および} \\ \text{1 列に直交している。} \end{array}$$

今、(*) の条件を満たす 6×6 行列を実行可能な行列と呼ぶことにする。また、実行可能な2つの行列が与えられたとき、一方の行列またはその転置行列の行および列の適当な入れ換えさらに行および列に適当に $\pm$ をかけて他方の実行可能な行列に一致させることが出来るとき、2つの行列は同値であるとする。このとき次のことがいえる。

命題 1 同値ではい実行可能な行列は 25 個ある。

25 個の実行可能な行列に 1 から 25 まで番号をつけ、それが図 1 に載せてある。番号の大きい行列から Weighing 行列を順次構成してゆく訣であるが、次の規則に従うことにする。

$$(**) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{行列 } A \text{ は、No. } n \text{ から構成されたものとする。 } A \text{ が No. } m \\ (n < m) \text{ に同値な、実行可能な小行列を含むとする。} \\ \text{このとき } A \text{ は No. } m \text{ に属する (No. } n \text{ に属さない) という。} \end{array} \right.$$

上の構成方法により、例えば No. 24 に属する Weighing 行列

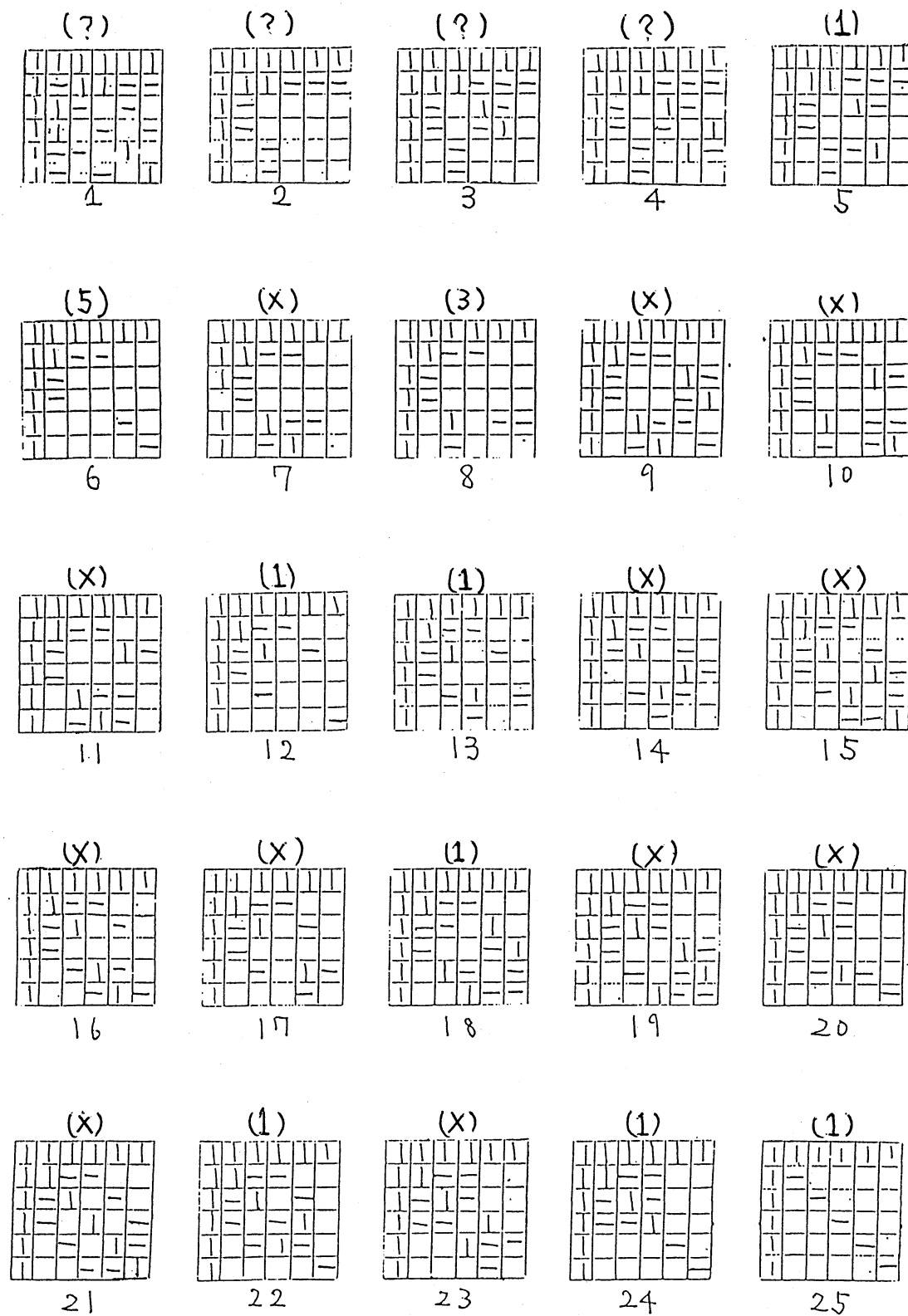


图 1

は、同値を除いて一意的に決定される(図2)。さらに、NO.23の場合、この場合に属するように順次構成していくと、一般性を失うことなく行列 U (図3)を得るが、 U の最後の2列から構成される行列は明らかにNO.1~NO.5のいずれかに同値な実行可能な小行列を含む。よって(**)に従ってNO.23に属するWeighing行列は存在しない。

1	1	1	1	1	1
1	1	-	-		1 1
1	-	1	-		1 1
1	-	-	1		1 1
1		-	-	-	- 1
1		-	-	-	- -
	1	-	-	1	1 1
	1	-	-	1	1 -
		1	-	1	- 1
		1	-	1	- -
			1	-	1 1 1 1
				1	1 1 - -
				1	1 - 1 -
				1	- 1 - - 1

図2

1	1	1	1	1	1
1	1	-	-		1 1
1	-	1	-		1 1
1	-	-	1	-	-
1		1	-	-	1 1
1		-	-	-	- -
	1	-	-	-	1 1
	1	-	-	-	1 -
		1	-	-	1 -
		1	-	1	- - 1
			1	-	1 -
			1	-	1 -
				1	- - 1
					1 1
					- -
					- -

図3

上述の方法により調べた結果が図1にある実行可能な行列の上にある記号である。例えば、NO.23の場合に属する行列が存在しないので記号(X)をつけ、またNO.6の場合に属する行列で非同値なものは高々5個存在する意味で(5)と記している。しかし、NO.1~NO.4に対しては、一般形では未だ求まっていない。

所で、このような分類問題に対し、筆者が行っている方法

暗示している (得られた行列の符号を無視した行列が semi-biplane の結合行列とわかっていゝ)。以下そのことを示す。

定理 3 任意の $k \geq 1$ に対し、 $W(2^{k-1}, k)$ が存在する。

(略証)

定義 行列 $X (l \times m)$, $Y (l' \times m')$ (ただし $l > l'$) に対し

$$X \oplus Y = \left[\begin{array}{c|c} X & \begin{array}{c} O_{(l-l') \times m'} \\ \hline Y \end{array} \end{array} \right] \text{ とする.}$$

また

$$S_d^{(1)} = [\underbrace{1, 1, \dots, 1}_d] \text{ は level 1, size } d \text{ の}$$

S -行列という。

帰納的に、level $i+1$, size d の S -行列を

$$S_d^{(i+1)} = \begin{bmatrix} S_{d-1}^{(i)} \\ (-1)^i I_{C(d,i)} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} S_{d-2}^{(i)} \\ (-1)^i I_{C(d-2,i)} \end{bmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{bmatrix} S_i^{(i)} \\ (-1)^i I_{C(i,i)} \end{bmatrix}$$

によつて定義する。ただし、 $d \geq i+1 \geq 2$,

I_γ は位数 γ の単位行列, また $C(d, j) = d C_j$

補助定理 4 $S_d^{(i+1)}$ は $C(d, i) \times C(d, i+1)$ 行列で

ある。また、 $S_d^{(i+1)}$ の各行には $d-i$ 個の

各列には $i+1$ 個の non-zero elements が存在する。

(証明) 帰納法で証明出来る。

ただし、 $B > i$ のとき $B C_i + (B-1) C_i + \dots + i C_i = (B+1) C_{i+1}$

を利用する。

$X_{\beta-1} \in X_\gamma$ の場合 $I_{c(\beta-1, i)}, I_{c(\beta-1, i-1)}, S_{\beta-1}^{(i)}$ と更に詳しく分解すると下図のようになる。

$$X_{\beta-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline & (-1)^{i-1} I_{c(\beta-2, i-2)} & & & & \\ \hline & & \ddots & & & \\ \hline & & (-1)^{i-1} I_{c(\beta, i-2)} & & & \\ \hline & & & (-1)^{i-1} I_{c(\beta, i-1)} & & \\ \hline & & & & (-1)^{i-1} I_{c(\beta-2, i-1)} & \\ \hline & & & & & \ddots \\ \hline & & & & & (-1)^{i-1} I_{c(\beta-2, i-1)} & \\ \hline & & & & & & S_{\beta-2}^{(i-1)} & \\ \hline & & & & & & & S_{\beta-2}^{(i-1)} & \\ \hline & & & & & & & & S_{\beta}^{(i-1)} & \\ \hline & & & & & & & & & S_{\beta}^{(i-1)} & \\ \hline & & & & & & & & & & S_{\beta}^{(i)} & \\ \hline & & & & & & & & & & & 0 & \\ \hline \end{array}$$

$$X_{\beta} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & \dots & 0 & S_{\beta}^{(i-1)} & (-1)^{i-1} I_{c(\beta, i-1)} & \dots & (-1)^i I_{c(\beta, i-1)} & 0 & S_{\beta}^{(i)} & \\ \hline \end{array}$$

$X_{\beta-1}$ と X_{β} の直交性に関する関係がある。

$$\begin{bmatrix} (-1)^{i-1} I_{c(\beta, i-2)} & S_{\beta}^{(i-1)} \\ S_{\beta}^{(i-1)} & (-1)^i I_{c(\beta, i-1)} \end{bmatrix} \text{ と } \begin{bmatrix} (-1)^{i-1} I_{c(\beta, i-1)} & (-1)^{i-1} I_{c(\beta, i-1)} \\ (-1)^{i-1} I_{c(\beta, i-1)} & (-1)^i I_{c(\beta, i-1)} \end{bmatrix}$$

のみであるが 明らかに S_{β} は直交している。

○ X_{β} と X_{γ} ($\beta < \gamma < \beta-1$) の直交性も同様である。

