

三次元多様体上の Anosov 流の横断的不変

1 形式について

日大産工 渡辺 展也 (Nobuya Watanabe)

M を 3 次元閉 Riemannian 多様体とする。 M 上の flow ϕ_t が Anosov flow であるとは ϕ_t -不変な TM の splitting $TM = E^0 \oplus E^- \oplus E^+$ があって、 E^0 は ϕ_t を生成するベクトル場 X が張られ、ある正の数 $c \geq 1$, λ があって、

$$\|\phi_t v\| \geq c e^{\lambda t} \|v\|, \quad v \in E^+, \quad t \geq 0,$$

$$\|\phi_t v\| \leq c^{-1} e^{-\lambda t} \|v\|, \quad v \in E^-, \quad t \geq 0,$$

とあること。

この splitting は一意的に $E^-, E^+, E^0 \oplus E^-, E^0 \oplus E^+$ はそれぞれ積分可能で strong-stable, strong-unstable, weak-stable, weak-unstable foliation を定義する。

論文 [3] で Hurder と Katok は次のような問題を述べている。

“もし 3 次元多様体上の体積を保つ Anosov flow が C^∞ 級の weak-stable and weak-unstable

foliation を持つ η と 適当に time-change をして C^∞ 級の transverse invariant 1-form を持つようにできるか? 55

η が transverse invariant 1-form なら η は 1-form である。

$$i_X \eta = 1 \quad \text{と} \quad \phi_t^* \eta = \eta \quad \text{を} \quad \text{与える。}$$

η が C^∞ 級で E^-, E^+ は C^∞ 級となり E. Ghys [1] によれば Anosov flow ϕ_t は Algebraic と C^∞ -同値になる。

定理 ϕ_t は 3次元開多様体上の体積を保つ Anosov flow である。もし ϕ_t が C^∞ 級の weak-stable, weak-unstable foliation を持つならば 適当に C^∞ -time-change して新しい flow が C^∞ 級の transverse invariant 1-form を持つようにできる。 12.

この定理は E. Ghys [2] により 和よりおおよそ 64 月早く 得られていました。

この定理の体積を保つという仮定は大切で 体積を保たない C^∞ 級の weak-stable と weak-unstable foliation を持つような time-change をして C^∞ 級の transverse-invariant 1-form を持つような Anosov flow が負定曲率曲面上の測地流

を perturb するのは 2 通り 得られず。

定理の証明 Anosov flow ϕ_t は volume form Ω を保つて流す。 $E^0 \oplus E^+$, $E^0 \oplus E^-$ は それぞれ C^∞ -1-form ω_+ と ω_- で定義されたとする。

Lemma 1. ω_+ と ω_- は 次のように選べる。

$$i_X \Omega = \omega_+ \wedge \omega_-.$$

□.

Frobenius の 定理より ある C^∞ -1-form η_+ と η_- があって $d\omega_+ = \eta_+ \wedge \omega_+$, $d\omega_- = \eta_- \wedge \omega_-$ と成り立つが Lemma 1 より

Lemma 2 ある C^∞ -1-form η があって

$$d\omega_+ = -\eta \wedge \omega_+, \quad d\omega_- = \eta \wedge \omega_- \quad \text{と成り立つ}$$

この η は ω_+ と ω_- により一意的に定まる。

Lemma 2 より

$$\text{Lemma 3} \quad i_X d\eta = 0$$

$\phi_t^* \omega_+ = J_t^+ \omega_+$, $\phi_t^* \omega_- = J_t^- \omega_-$ とおくと
 ϕ_t は Anosov flow であることが示す

Lemma 4 λ は正の数で $C \leq 1$ と λ がある

$$J_t^- \geq C e^{\lambda t} , \quad t \geq 0 \quad \square$$

$T > 0$ に対して

$$\omega_-^T = \int_0^T \phi_s^* \omega_- ds = \int_0^T J_s^- ds \omega_-$$

$$\omega_+^T = \left(\int_0^T J_s^- ds \right)^{-1} \omega_+$$

と Lemma 2 より ω_+^T と ω_-^T は定常 C^∞ -1-form
 γ を与える。

又 J_t^- と $\phi_t^* \omega_-^T = J_t^- \omega_-^T$ とおくと示す。

Lemma 5 十分大きい $T > 0$ に対して

$$i_X \gamma = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} J_t^- > 0$$

$\square$

$$\tilde{X} = \frac{1}{i_X \gamma} X \quad \text{と} \quad \tilde{X} \quad \text{が生成する}$$

flow が求まる flow に与ります。

これは Parry [4] の synchronisation $\in \phi_t$ にあて
 $t_0, t_1, t_2, \dots$ といふ。

Remarks

1. time-change τ winding class $[ix\Omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$
 は定数倍しかかわさず C^∞ -transverse 1-form σ と $\mathcal{H}$ flow
 は contact flow になる τ (M σ τ^2 suspension τ なる) τ
 winding class $[ix\Omega]$ σ の τ なる τ weak-stable,
 weak-unstable foliation は C^∞ 級 τ なる。
2. Lemma 2 より volume τ 保, 3次元多様体上の
 Anosov flow の weak-stable と weak-unstable foliation
 の Godbillon-Vey 数は等しい。
3. Ω に関する ϕ_t の metric entropy は

$$h_\Omega(\phi_t) = \int_M ix\eta\Omega \quad \tau \text{ なる}.$$

Hurder-Katok [4] より 一般に volume τ
 保の 3次元多様体上の Anosov flow の weak-stable
 weak-unstable fol. は $C^{1+\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) なる
 $ix\eta$ は C^α ($0 < \alpha < 1$) 級である。

References.

1. E. Ghys, Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables, Annales Ecole Norm. Sup. 20 (1987) 251-270.
2. E. Ghys, Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsien, preprint Ecole Norm. Sup. de LYON.
3. S. Hurder and A. Katok, Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes for Anosov flows, Publ. Math. IHES 72 (1990) 5-61.
4. W. Parry, Synchronisation of canonical measures for hyperbolic attractors, Commun. Math. Phys. 106 (1986) 267-275.