

A Graph Theory for C^* -algebras

天王寺高校 榎本雅俊

大阪教育大学 藤井正俊

大阪教育大学 綿谷安男

1. はじめに。最近, A. Connes, P. Hahn, J. Renault 等が中心となり, operator algebra に対する groupoid による接近 を行なっている。ここでは, すべての operator algebra は groupoid により構成されるかという問題がある。この種の研究は, operator algebra の general theory といえる。他方, simple C^* -algebra の構造を研究する為には, 具体的な simple C^* -algebra がくわしく調べられ始めている。その一例は AF-algebra である。また, Pimsner, Popa は, 最近脚光を浴びている invariant relation algebra をこの中に埋め込んで, その構造を解析している。もう一つの具体的な例として, ergodic theory からの要請により, Cuntz と Krieger が導入した C^* -algebra がある。それは, topological Markov chain に関連して考察されている。この AF-algebra と Cuntz-Krieger による algebra には groupoid による接近がある。ここでは, combinatorial theory

2

$$\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \mapsto \begin{array}{c} x = x \\ x \cdot y = y \end{array} \quad x \cdot y$$

において, 1つの中にをなしている graph theory を用いて, simple C^* -algebra を調べる。主な対象物は, 後者の方であるが, groupoid & v -graph による C^* -algebra への接近は, 最終的には, categorical な接近にまとめられることと思われる。

以下, 内容を項目の順に述べる。

1. はじめに.
2. graph の基礎的な概念と Cuntz-Krieger algebra の代数的構造
3. "gauge" 作用を通して見た Cuntz-Krieger algebra.
4. sub-Fock representation による Cuntz-Krieger algebra の extension とその応用
5. digraph 上の free category からみた Cuntz-Krieger algebra の extension と adjoint graph.
6. Weak extension group
7. 3×3 行列に対する simple Cuntz-Krieger algebra の分類
8. 補遺

内容を紹介する。2では, graph の基礎的な概念と Cuntz-Krieger algebra との代数的構造とがどのように結びつくかを説明する。

3では, "gauge" 作用とのかかわり合いをみる。2と3で述べることを表にまとめると次のようになる。

graph 理論	C^* -algebra 理論
連結成分	直和成分
凝縮 graph の順序 ideal	* ideal
強連結 (行列の既約)	simple algebra
初等有向閉路 C_k の存在	周期が k でない gauge 変換は outer
非周期性	gauge 変換群 Γ は outer aut. gr.
$(k-1)$ 有向道グラフ	周期 k の gauge 変換の fixed point alg.
初等有向閉路 C_k によるデカルト積 $G \times C_k$	周期 k の gauge 変換 による crossed product
$G \times C_k$ の回転変換	<u>crossed product 上の dual action</u>
covering map	expectation

4 では, Evans [17], Katayama による結果を拡張する。彼らは Cuntz algebra の extension を Full-Fock space 上に表現する ことに成功した。我々は, これを Cuntz-Krieger algebra の extension の場合にまで一般化する。このことの応用として, Cuntz-Krieger algebra の generators の間のある種の map が, その algebra 上の automorphism に拡張出来る為の条件を決定する。

5 では, 前節とは違った観点から, Cuntz-Krieger algebra の extension の表現を考える。digraph 上の free category 上の C^* -algebra としてとらえるのである。この時, adjoint graph の考え

が有効に働く。

6.では、任意の finitely generated abelian group H に対し、separable simple, unital C^* -algebra A が存在して、 $\text{Ext}^W(A)$ が H に同型になることを示す。

7.では、Cuntz-Krieger algebra の分類問題を考察する。Ko-群の精密化としての marker という概念を用いて、我々は、 3×3 行列の場合については、完全な結果を得ている。

8.では、関連した話題を扱う。

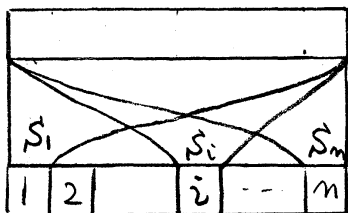
2 graph の基礎的な概念と Cuntz-Krieger algebra の代数的構造

J. Cuntz [4] は、1977 年に CMP に出た論文の中で、次のような C^* -algebra を調べた。

n 個の isometries $S_1, \dots, S_n$ で、 $\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1$ をみたすものを取り、これらにより生成される C^* -algebra の

class を考える。この時、これらの C^* -algebras は、generators の取り方によらず、一意に決まり、単純であることがわかる。

彼は、この C^* -algebra の同型類を O_n という記号で表した。 O_n を



図で考えてみると、これは空間を n 個に分けて、全体から S_1 の range 空間に S_1 , ..., 全体から S_n の range 空間に S_n という状況になっている。

これに続いて、Cuntz と Krieger [10] は、1980 年、topological Markov chain に対応する新しい C^* -algebra の class を導入した。それは次のようなものであった。

Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$

5

Σ を有限集合として, 行列 $A = (A(i,j))_{i,j \in \Sigma}$ を取る。ここで、 $A(i,j) \in \{0,1\}$ であり、 A のどの行もどの列も 0 ではないものとする。この行列 A に対して, 次の条件 $[A]$ をみたす partial isometries $S_i \neq 0 (i \in \Sigma)$ を取る。 $Q_i = S_i^* S_i, P_i = S_i S_i^*$ とした時、

$$\text{条件}[A] \quad P_i P_j = 0 (i \neq j), Q_i = \sum_{j \in \Sigma} A(i,j) P_j \quad (i, j \in \Sigma).$$

条件 $[A]$ をみたす $\{S_i\}$ 達により生成される C^* -algebra を作る。

この algebra は、「行列 A がある条件をみたせば」 $[A]$ の条件だけで、Cuntz algebra のように一意に決まる。この一意に決まる algebra を、以下、Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_A$ と呼ぶことにする。

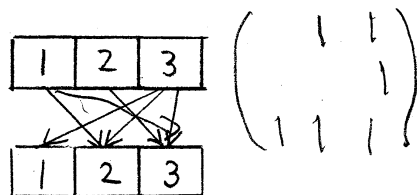
上の条件を、例にうつして、調べてみる。

例 1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を取る。条件 $[A]$ は、行列でかくと、

$$\begin{pmatrix} S_1^* S_1 \\ S_2^* S_2 \\ S_3^* S_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} S_1^* S_1^* \\ S_2^* S_2^* \\ S_3^* S_3^* \end{pmatrix} \implies \begin{cases} S_1^* S_1 = S_3 S_3^* \\ S_2^* S_2 = S_1 S_1^* + S_3 S_3^* \\ S_3^* S_3 = S_1 S_1^* + S_2 S_2^* + S_3 S_3^* \end{cases}$$

と $\iff$ とである。 S, P_1, P_2, P_3 の range

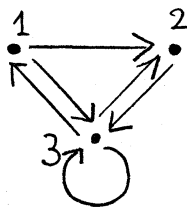
spaces を 1, 2, 3 で表わしておくと、



partial isometries S_1, S_2, S_3 は右の図の矢印

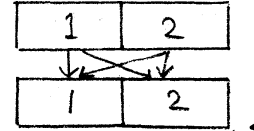
で表わされる。range spaces と partial isometries の上の図から、

次の graph を得る。



$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 2. Cuntz-algebra $\mathcal{O}_2$ を $\pm$ と関連させてみる。 $S_1^* S_1 = Q_1 = 1$, $S_2^* S_2 = Q_2 = 1$, $S_1 S_1^* = P_1$, $S_2 S_2^* = P_2$, $S_1 S_1^* + S_2 S_2^* = 1 = P_1 + P_2$ より, 行列で表わすと, $\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ である。又, range spaces の間の矢印の図で表わすと,



graph でかくと, で表わされる。

つまり, Cuntz algebra $\mathcal{O}_2$ は, 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対応する Cuntz-Kiegn algebra である。

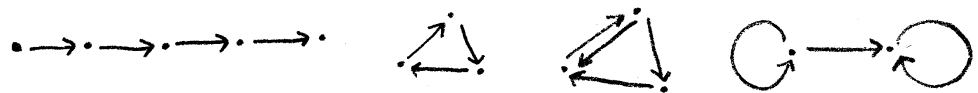
== では, Cuntz-Kiegn algebra $\mathcal{O}_A$ を graph 理論の観点から取り上げていく。その為, graph 理論の用語を準備する。

① G が directed graph (有向グラフ) とは, G が次の組 $(V(G), E(G), \delta)$ である時をいう。 $V = V(G)$ は vertices (頂点) の集合 $E =$

$E(G)$ は edges (辺) の集合 接続写像 $\delta = \begin{matrix} E \\ \downarrow \\ x \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} V \times V \\ \downarrow \\ (\sigma_1(x), \sigma_2(x)) \end{matrix}$ Range domain

(つまり, $2 \xleftarrow{x} 1$ のとき, $\sigma_1(x) = 2 \cdots$ edge x の終点は 2, $\sigma_2(x) = 1 \cdots$ edge x の始点は 1) である。

例 3 directed graph の例は次のようなものである。



② G が digraph とは, G は directed graph で, どの 2 つの vertices の組 (i, j) に対しても, $i \leftarrow j$ となる edges は高々 1 つの

$$V \times V \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_2 \quad \varphi(i, j) = \begin{cases} 0 & (i \rightarrow j) \\ 1 & (i \leftarrow j) \end{cases}$$

ときをいう。(=の高々1つの辺を、 (i, j) と同一視する)。

例4



③ digraph G の adjacency matrix (隣接行列) $A = (A(i, j))$ とは,

$$A(i, j) = \begin{cases} 1 & (i \leftarrow j \text{ がある}) \\ 0 & (i \leftarrow j \text{ がない}). \end{cases}$$

$$A = (\varphi(i, j))_{i, j}$$

二の対応で (digraph G と 0-1 matrix を適当に同一視する)。

例5

$$G: \textcircled{1} \xleftrightarrow{2} \textcircled{2} \iff A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

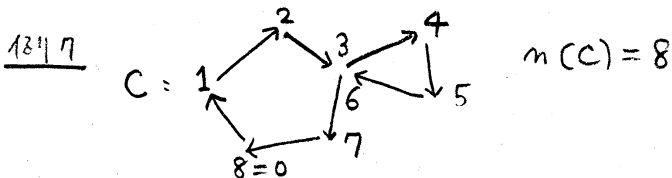
④ 長さが $g > 0$ の directed path (有向道) p とは、 g 個の edges の組で、向き順につながっているもののことをとである。

例6 長さ5の directed path

$$0 \xleftarrow{1} 1 \xleftarrow{2} 2 \xleftarrow{3} 3 \xleftarrow{4} 4 \xleftarrow{5} 5$$

$$p = ((0, 1), (1, 2), \dots, (4, 5)), \quad |p| \text{ の長さ} = n(p) = 5 \quad \text{edges の数}$$

⑤ directed cycle (有向閉路) C とは、 C は directed path で、始点と終点が一一致するもののことをとである。

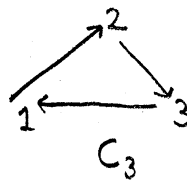
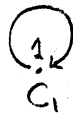


← 傘虫で頂点が重なってもよい

⑥ elementary directed cycle C_k (k -cycle) とは、 $n(C_k) = k$ である directed cycle で、途中では頂点が重ならないものをとである。

elementary directed cycles

例 8



以上の準備のもとで、 $[A]$ 条件を満たす C^* -algebra が一意になる条件を graph の言葉で述べる。

$\Sigma = V(G)$ として, $V_0 \subset \Sigma$ を次で定義する。vertex $i \in V_0$ とは、 i を通る異なる elementary directed cycle が 2 つ以上あることである。この時、 G が (I)条件 を満たすとは、

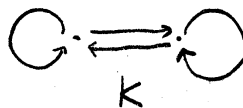
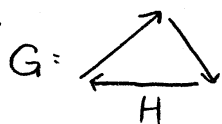
任意の vertex j に対して directed path $j \leftarrow j_1 \leftarrow \dots \leftarrow j_k \leftarrow i$ で始点 $i \in V_0$ となるものが存在する時にいう。

0-1 matrix A と digraph G を同一視することにして, G が (I) 条件を満たすとき, Cuntz-Kieger [10] は $[A]$ 条件を満たす C^* -algebra が一意になることを示した。以下, これを $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_G$ で表わしていくことにする。

注意 以下では, G は常に, (I)条件を満たすものとする。

⑦ vertices i と j が 連結している ($i \sim j$) とは, i と j が undirected path で結ばれていることにいう。graph G をこの同値関係 $\sim$ で分けた同値類を, connected component といい。

例 9



G の connected component は、

H と K であり, G は H と

K の和である。この graph の和に対応するのが C^* -algebra の直和である。つまり, $\mathcal{O}_G = \mathcal{O}_{H \cup K} = \mathcal{O}_H \oplus \mathcal{O}_K$ 。

$\{ \text{oriented graph} \}$ ~~行列~~ $0, 1$ 行列 $\rightarrow$ C^* 代数 $\mathcal{O}_A$ $\rightarrow$ Cuntz-Krieger algebra
 $\{ \text{digraph} \}$

⑧ vertices i と j が, 強連結している ($i \approx j$) とは, i から j へ
 と, j から i への directed path が両方あることをいう。 G の
 vertices $V(G)$ を $\approx$ の同値関係 $\approx$ で分けた同値類を strongly
 connected component といい。 G の vertices のすべての pairs が
 strongly connected の時は, G を strongly connected といい。
 ($\approx$ の $\approx$ とは connected の時も同様である)

G が strongly connected でない場合には, $\mathcal{O}_G$ には, $*$ ideals が
 存在するが, そのあり方は, おおよそ, graph G の condensation
 graph (凝縮縮グラフ) $C(G)$ の order ideal により記述される。
 digraph G の condensation graph $C(G)$ とは, $C(G)$ の vertices は $V(G)$ の
 strongly connected component $C_1, C_2, \dots, C_k$ であり, $C(G)$ の edges
 $C_\ell \leftarrow C_m$ とは, ある $i \in C_\ell$, ある $j \in C_m$ があって, $i \leftarrow j$
 in G の時をいう。この対応関係については, Cuntz [5] に
 くわしく述べられている。

[3] "gauge" 作用を通して見た Cuntz-Krieger algebra.

我々は, [13] において, $U(n) \hookrightarrow \text{Out } \mathcal{O}_n$ ($= \mathcal{U}$, $U(n)$ は $n \times n$
 unitary matrices の作る群) を, $\alpha_u(\beta_j) = \sum_{i=1}^n u_{ij} \beta_i$ で表現したが, Cuntz-
 Krieger algebra $\mathcal{O}_A$ の時には, $U(n)$ の元は一般には $\approx$ の表現では
 作用し得ない。 2×2 行列の時, $G \rightleftharpoons$ と $G \rightleftharpoons \bigcirc$ のみが,
 (I) 条件をみたす。 automorphisms は, $\approx$ の表現では, 前者は,

$\mathbb{T} \oplus \mathbb{T}$, 後者は, $U(2)$ となる。 $\mathcal{E} = \mathcal{E}$, Conley-Krieger algebra の場合には, "gauge" 作用を調べる ことが問題になる。

$\mathcal{O}_G = C^*(S_1, \dots, S_m) \pm$ に, "gauge" 変換 $\alpha: \mathbb{T} \rightarrow \text{Aut } \mathcal{O}_G$ を $\alpha_t(S_i) = \alpha_t S_i$ で定義する。この時, α_t の outererness が, digraph G の形から, 次のように表わされる。

定理 (I) 条件をみたす digraph G が, elementary directed cycle C_k (k -cycle) をもつならば, $x^m \neq 1$ ($x \in \Pi$) に對して, α_x は $\mathcal{O}_G$ 上の outer automorphism である。

証明は, Archibald [1] の modification に依る。

= の = との結果として、

系 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ の Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_G = \mathcal{O}_A$ は outer automorphism $\neq \text{id}$ がある。

以下 "gauge" 作用が Cuntz-Krieger algebra にどのように $\frac{g}{g} \sim \frac{g}{g}$ を及ぼすかを fixed point algebra の場合に見てみる。まず、次の graph の概念を導入する。 G の k -path graph (k -有向道グラフ) $W_k(G)$ とは、 G の長さ k の directed paths が $W_k(G)$ の vertices で、それらが長さ 1 の directed path を介して結ばれる時、 $W_k(G)$ の点として結ばれるとする。

13110 1-path graph

$$G: 1 \xrightleftharpoons[x]{x} 2 \xrightleftharpoons[w]{y} 3$$

$W_1(G) :$

```
graph LR; x((x)) --> x; x --> y((y)); x --> w((w)); z((z)) --> z; z --> y; z --> w;
```

= の k -path graph を使くと、次の定理を得る。

定理 α を period 2 の "gauge" 変換 $\alpha(s_i) = -s_i$ ($\alpha \in \text{Aut } \mathcal{O}_G$) とする。この時、fixed point algebra $\mathcal{O}_G^\alpha$ は、 $\mathcal{O}_{W_1(G)}$ に同型である。

この定理によれば、例 12 の G に對して、 $\mathcal{O}_G^{\alpha-1} = \mathcal{O}_2 \oplus \mathcal{O}_2$ である。 $\mathcal{O}_G$ の場合には、"gauge" automorphism は、Cuntz algebra の時とは違った振舞をする。 G の形状によつては、"gauge" automorphism の outerness がかわれてしまうのである。

次に、 α_{-1} の innerness に対する判定条件を述べる。

定理 G を strongly connected, $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{O}_G$ を、 $\alpha(s_i) = -s_i$ とする時、次は同値である。

- ① α_{-1} は inner である。
- ② G のどの directed cycle も長さが偶数である。
- ③ 1-path graph $W_1(G)$ は connected でない。
- ④ $\mathcal{O}_G^\alpha$ は simple でない。

④ $\Rightarrow$ ① の証明は、 $\mathcal{O}_G$ が simple, $\mathcal{O}_G^{\alpha-1}$ が not simple とすると、Pedersen [23, Th. 8.10.12] より、 α_{-1} の innerness が出る。

次に、period k の "gauge" 変換から crossed product を作った時、graph の方ではどのような変化が起きるかを調べる。その前に、graph のデカルト積を定義する。graph G と elementary directed cycle C_k とのデカルト積を $\nabla(G \times C_k) = \nabla(G) \times \nabla(C_k)$ で、

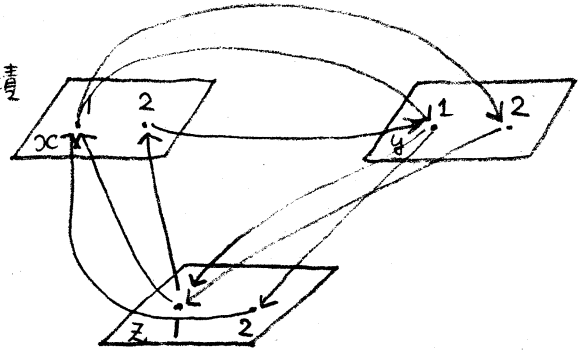
edges は両者の vertices がつなげる時に "うなぐ" ことで決める。

131111

$$G: \begin{array}{c} 1 \rightleftarrows 2 \\ \circ \end{array}$$

$$C_3: \begin{array}{ccc} x & & y \\ & \searrow & \nearrow \\ & z & \end{array}$$

デカルト積
 $G \times C_3$



この時, period k の "gauge" 変換に付く crossed product について, 次の結果を得る。これは, Cuntz-Evans の結果の 1 つの一般化である。

定理 $\alpha(s_i) = e^{\frac{2\pi i \lambda}{k}} s_i$ なる period k の automorphism $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{O}_G$ による crossed product $\mathcal{O}_G \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_k$ は, $\mathcal{O}_{G \times C_k}$ に同型であり, dual action $\hat{\alpha}$ は, $G \times C_k$ のおらし回車である。

この定理の系として, 次の結果を得る。

系 G を strongly connected, $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{O}_G$ を $\alpha(s_i) = e^{\frac{2\pi i \lambda}{k}} s_i$ とする時, $\mathcal{O}_G \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_k$ が simple である $\Leftrightarrow$ $d(G)$ と k が互いに素である $\Leftrightarrow$ λ と k が同値である。(= $\Rightarrow$ $d(G)$ は, G の period である)。

4 sub-Fock representation による Cuntz-Krieger algebra の extension とその応用。

Evans [17], Katayama は, Cuntz algebra の extension を次の

ように, Full Fock space 上に表現した。 H は n dimensional Hilbert space, Ω は Fock vacuum unit vector とする。 $F(H) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \oplus H_m$ ($= \mathbb{C}$, $H_m = \otimes^m H$, H_0 は Fock vacuum unit vector 1 により generate される 1-dimensional Hilbert space) とおく。この時,

任意の $f \in H$ に対して, $a(f)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) \equiv f \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$

$a(f)\Omega = f$. とおけば,

$a(f)^*(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = (f_1 | f) f_2 \otimes \cdots \otimes f_n$

$a(f)^*\Omega = 0$.

$F(H)$ 上のこれらの bounded operators $\{a(f) | f \in H\}$ により generate された C^* -algebra は, Watatani [25] による Clifford C^* -algebra $\mathcal{P}_n$ と同型であり, Cuntz algebra $\mathcal{O}_n$ の $C(F(H))$ ($F(H)$ 上の compact operators の全体の作る algebra) による extension である。つまり, 次の short sequence が exact になる。

$$0 \longrightarrow C(F(H)) \longrightarrow \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n \longrightarrow 0.$$

この事を $\mathcal{O}_A$ の場合に一般化する。 $A = (A(i, j))$ を n 行 n 列の 0-1 行列として, どの行もどの列も 0 ではないとする。又, A に対応する graph は, (I) 条件を満たすとする。

subspace $L \subset F(H)$ をみつけて,

$$0 \longrightarrow C(L) \longrightarrow \mathcal{P}_A \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow 0 \text{ (exact)}$$

になるような subspace $L \subset F(H)$ 上の $\mathcal{O}_A$ の extension algebra $\mathcal{P}_A$ を作ることを目標にする。

$\{e_1, \dots, e_n\}$ は n -dimensional Hilbert space H の orthonormal base とする。 $L_m \in \{e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)} : A(i(k), i(k+1)) = 1 \text{ for } 1 \leq k \leq m-1\}$ により generate される H_m の subspace とする。 $L \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \oplus L_m$ ($= \mathbb{C}$, $L_0 = H_0$, $L_1 = H_1 = H$) とおく。 また, $M_m \in \{e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)} : \prod_{k=1}^{m-1} A(i(k), i(k+1)) = 0\}$ により generate される H_m の subspace とする。 $M \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \oplus M_m$ ($= \mathbb{C}$, $M_0 = M_1 = 0$) とおく。
 $F(H) = L \oplus M$ となり, L は A に対応する sub-Fock space と呼ぶことができる。

$S_i \equiv P_L a(e_i)|_L$ (P_L は L 上への projection) とおく。 P_A で, $\{S_i : 1 \leq i \leq n\}$ により generate される C^* -algebra を表わす。この時, 次の定理が成り立つ。

定理 P_A は L 上で irreducible であり, L 上の compact operators の作る algebra $C(L)$ を含む。更に, 次の short sequence は exact である。

$$0 \longrightarrow C(L) \longrightarrow P_A \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow 0$$

証明には, 次の補題 1, 2 を必要とする。

補題 1 $S_k = P_L a(e_k)|_L$ は, 次の性質をみたす partial isometries である。

$$S_k^* S_k \Omega = \Omega, \quad S_k S_k^* \Omega = 0. \quad \text{すべての } e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)} \in L \text{ について,}$$

$$S_k^* S_k (e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)}) = A(k, i(1)) e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)}$$

$$S_k S_k^* (e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)}) = \delta_{k, i(1)} e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)}.$$

補題2 E を $L_0 = H_0$ 上の projection とすると,

$$S_k^* S_k = \sum_{j=1}^m A(k, j) S_j S_j^* + E.$$

残りの $\mathcal{P}_A$ が L に irreducibly に act するのは, 次の方法によろ。

non-zero $x \in L$ に対して, その直和因子 $x_m = \sum x_m(i(1), \dots, i(m)) x$

$e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)}$ で non-zero なものを取り, $x_m(i(1), \dots, i(m)) \neq 0$ を

更に取り。 $x_m(i(1), \dots, i(m))^{-1} S_{j(1)} \dots S_{j(m)} E S_{i(m)}^* \dots S_{i(1)}^* x = e_{j(1)} \otimes \dots \otimes e_{j(m)}$

これで定理が示せたことになる。

以下では, 上の定理の応用について論じる。我々は, Archbold [1] の結果を拡張して, $\mathcal{O}_n$ 上の outer automorphism group $\mathcal{U}(n)$ について論じた。ところが, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の場合には, α_u が $\mathcal{O}_A$ の automorphism に拡張出来る為には, $u = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$ が必要十分である。それでは, α_u が一般の $\mathcal{O}_A$ 上の automorphism に拡張出来る為の unitary matrices u の満たす条件は何だろうか?

$u \in \mathcal{U}(n)$ とし, H_0 上で $U_0 = 1$, H_m 上で, $U_m = \bigotimes^m u$ ($m \geq 1$) とする。 $F(H)$ 上で, $F(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \bigoplus U_m$ とする。この時, $F(u)$ は, $F(H)$ 上の unitary operator である。 Evans [17] と Katayama は, $F(u)$ が $\mathcal{P}_n = C^*(a(e_i); 1 \leq i \leq n)$ 上の automorphism β_u ($= \tau$, $\beta_u(a(e_i)) = F(u) a(e_i) F(u)^* = \sum_k u_{ki} a(e_k)$) を implement する $= \tau$ を示した。 $= \tau$ であり, 先に, sub-Fock space L が $F(u)$ を reduce する $u \in \mathcal{U}(n)$ の条件を考える。

補題 $A=(A(i,j))$ を $A(i,j) \in \{0,1\}$ なる $n \times n$ matrix, $U=(u_{ij})$ を unitary matrix で, $A(i,j)=0, A(k,m)=1$ ならば $u_{ki}u_{mj}=0$ ($1 \leq i,j,k,m \leq n$) を満たすものとする。この時, A に対応する sub-Fock space L は $F(u)$ を reduce する。

この補題を用いて, α_u が $\mathcal{O}_A$ 上の automorphism に拡張出来る条件を示す。

定理 $\mathcal{O}_A = C^*(T_1, \dots, T_n)$ とする。この時, $u \in U(n)$ に関する次の条件は同値である。

(1) $\alpha_u(T_i) = \sum_k u_{ki} T_k$ は, $\mathcal{O}_A$ 上の automorphism に拡張出来る。

(2) $(1 - A(i,j))A(k,m)u_{ki}u_{mj} = 0$ ($1 \leq i,j,k,m \leq n$)

(3) $A(i,j)=0, A(k,m)=1$ ならば $u_{ki}u_{mj}=0$ ($1 \leq i,j,k,m \leq n$)

この定理の系として, 次を得る。

系 $\mathcal{O}_A = C^*(T_i; 1 \leq i \leq n)$ とする。この時, $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_n$ であるとは, すべての $u \in U(n)$ に対して, α_u が $\mathcal{O}_A$ 上の automorphism に拡張出来ることと必要十分である。

digraph G が, adjacency matrix A により表現出来ているとして, G の vertices i と j が equivalent であるとは $j = i$ である, または, すべての $k \in V(G)$ について, $A(i,k) = A(j,k), A(k,i) = A(k,j)$ が成り立つことと定義する。この時, この equivalent を使って, この定理のうちの1つの系を得る。

系 $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ である digraph G で, $1, 2, \dots, m$ が

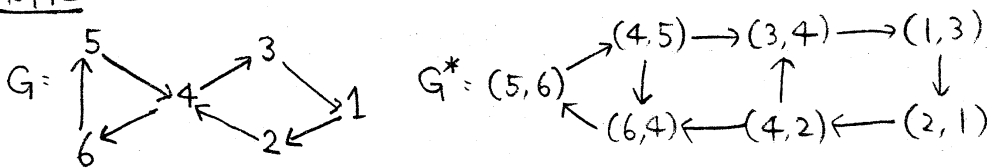
equivalentなものを取る。もし $u = (u_{ij})$ が unitary matrix であり、
 $u_{ij} = \delta_{ij}$ が $m+1 \leq i, j \leq n$ について成り立つならば、 α_u は $\mathcal{O}_G$
 上の automorphism に拡張出来る。更に、もし G が strongly
 connected ならば、 α_u は、 $u \neq 1$ に対して、outer である。

5 digraph 上の free category からみた Cuntz-Krieger algebra の extension と adjoint graph

この節では、Cuntz-Krieger algebra の extension のもう一つの例を
 与える。その為には、まず、adjoint graph について説明する。

digraph G の adjoint graph G^* とは、 G のすべての 1-path $u_1, u_2, \dots, u_m$ を vertices とし、 G において u_i の終点と u_j の始点と一致
 するとき、そしてそのときに限り、点 u_i から点 u_j への edge を
 もつような digraph のことである。

例 12



digraph G が (I) 条件を満たすとき、adjoint graph G^* も (I)
 条件を満たす。更に、次のことが adjoint graph について成り
 立つ。

定理 $\mathcal{O}_G$ を Cuntz-Krieger algebra とするとき、 $\mathcal{O}_G = \mathcal{O}_{G^*}$ 。

Higgins [27] に従って, G を digraph とするとき, $D(G)$ をその morphisms が G のすべての paths からなり, またその objects が $V(G)$ からなっている category であるとき, $D(G)$ を G の free category とよぶ。 $s(g)$ を $g \in D(G)$ の source, $t(g)$ を g の target とする。 $\ell^2(D(G))$ の orthonormal basis $\{e_d; d \in D(G)\}$ ($g \in D(G)$ に対して, $e_d(g) = \delta_{d,g}$) をもつ $D(G)$ 上のすべての square summable sequence からなる Hilbert space を表わす。

また, 各 $i \in V(G)$ について, H_i を $\{e_d; d \in D(G), s(d)=i\}$ により生成された $\ell^2(D(G))$ の subspace とする。次に, $\ell^2(D)$ 上に $D(G)$ の left regular representation u を定義する。各 $g \in D(G)$ に対して, $\ell^2(D(G))$ 上の partial isometry u_g を,

$u_g e_h = e_{gh}$ ($s(g)=t(h)$ のとき), $u_g e_h = 0$ (そうでないとき) で定義する。 $\{u_g; g \in D(G)\}$ により生成された C^* -algebra を, $C_r^*(G)$ で表わすことにする。このとき,

$$u_g^* e_h = e_k \text{ (もしある } k \text{ について, } h = gk \text{ のとき)}$$

$$u_g^* e_h = 0 \text{ (そうでないとき)} \quad \text{なので,}$$

すべての H_i は $C_r^*(G)$ のもとに invariant になる。よって, $a \in C_r^*(G)$, $i \in V(G)$ に対して, $p_i(a) = a|_{H_i}$ とおくと, p_i は, H_i 上の $C_r^*(G)$ の表現であり, $\bigoplus_{i \in V(G)} p_i$ は, $\ell^2(D(G))$ 上の $C_r^*(G)$ の identity representation である。

この表現を使うことにより, 次の定理を得る。

定理 π の表現 ρ_i は $C_r^*(G)$ に対して irreducible であり、
 $\rho_i(C_r^*(G))$ は compacta $C(H_i)$ を含む。更に、 G が (I) 条件を
 満たせば、次の short sequence

$$0 \longrightarrow C(H_i) \longrightarrow \rho_i(C_r^*(G)) \longrightarrow \mathcal{O}_G \longrightarrow 0$$

は exact である。

6 Weak extension group

この節では、任意の finitely generated abelian group H に対して、
 separable, simple, unital C^* -algebra A で、 $\text{Ext}^w(A)$ が H に
 同型になるものが存在することを示す。実際には、simple
 Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_G$ が、 A として取れる。

$\mathcal{Q}(H)$ で、infinite dimensional separable Hilbert space H 上の
 Calkin algebra を表わす。 $\pi \in B(H)$ から $\mathcal{Q}(H)$ への quotient map
 とする。separable C^* -algebra A の extension とは、 A から $\mathcal{Q}(H)$
 への star monomorphism α である。2つの extensions ρ, σ
 が weakly equivalent とは、 $\rho(x) = U\sigma(x)U^*$ を満たす partial
 isometry $U \in \mathcal{Q}(H)$ が存在するを意味する。extensions の weak
 equivalence classes の set を、 $\text{Ext}^w A$ で表わす。Cuntz-Krieger
 [10] は、 $\text{Ext}^w \mathcal{O}_G$ を次のように決定した。

定理 (Cuntz-Krieger) $\mathcal{O}_G$ の weak extension group は、 $\mathbb{Z}/(1-G)\mathbb{Z}^n$
 に同型である。(= 2, $\mathbb{Z}$ は有理整数全体, n は $\nabla(G)$ の個数)

この Cuntz と Krieger の結果を使って、次の定理を得る。

定理 H を finitely generated abelian group とする。このとき、simple Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_G$ で、 $\text{Ext}^w \mathcal{O}_G = H$ をみたすものが存在する。

証明は、 $H = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{m(1)} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m(m)}$ とかけることを使って、以下のように、帰納法に行なえばよい。

補題 1

$$G(n) = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 & 1 \end{matrix}}^{n+1} \end{array} \right)_{n+1}$$



とすると、 n の時、 $\text{Ext}^w \mathcal{O}_{G(n)} = \mathbb{Z}_m$ ($n \geq 1$)

補題 2

$$G(k|n) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ & \vdots \\ & 1 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & G(n) \end{array} \right)_k$$

n の時、 $\text{Ext}^w \mathcal{O}_{G(k|n)} = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_k \oplus \mathbb{Z}_m$

補題 3

$$G(m,n) = \left(\begin{array}{c|c} G(m) & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & G(n) \end{array} \right)$$

n の時、 $\text{Ext}^w \mathcal{O}_{G(m,n)} = \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_m$

$\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ に対応する matrix は,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & 1 & 0 & 1 \\ & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & & 1 & \vdots & 1 \\ & & & & \vdots & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \hline & & & & 1 & \vdots & \\ & & & & \vdots & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ G(m) \\ \\ G(n) \end{array} \quad \text{である。}$$

[7] 3×3 行列に対する simple Cuntz-Krieger algebra の分類

この節では, Cuntz-Krieger algebras $\mathcal{O}_G$ の分類理論を試みる。
 K_0 -group を用いて, $\mathcal{O}_G$ は粗く分類されるが, 我々は K_0 -group の精密化である *marker* の概念を使って, 3×3 行列の場合には, $\mathcal{O}_G$ が完全に分類出来ることを示す。最初に, K_0 -group の定義を述べる。 K は infinite-dimensional separable Hilbert space 上の compact operators の C^* -algebra を表わす。 p, q を C^* -algebra A の projections とする。 $x \in A$ が存在して, $x^*x = p$, $xx^* = q$ のとき, $p \sim q$ とかく。 $[p]$ は, この同値関係による p の同値類を表わす。この時, $\mathcal{S} \equiv \{[p] \mid p \text{ は } K \otimes A \text{ の projection}\}$ とおくと, $\mathcal{S}$ は, 加法 $[p] + [q] \equiv [p' + q']$ ($\equiv$ は, p', q' は, $p' \in [p], q' \in [q]$ であり, $p'q' = 0$ なる projections である) をもつ commutative semigroup である。
 $K \otimes A$ の projections p, q については, 二つの性質をみたす

p, q' をみつけることは、常に可能である。そして、 $[p+q']$ は、 p, q' のとり方によらない。もし A が unit をもつとき、 $K_0(A)$ は $\mathbb{N}$ の semigroup の Grothendieck group として定義される。ところが、unit をもつ purely infinite simple C^* -algebra A に対しては、 $K_0(A) = \{ [p] \mid p \text{ は } A \text{ の non-zero projection} \}$ になることが知られている。

$\mathbb{N}$ の $K_0(A)$ に関して、新しい invariants を導入する。 A を unital C^* -algebra, $\text{Aut } K_0(A)$ を $K_0(A)$ の automorphism group とする。 $g, h \in K_0(A)$ とするとき、ある $\alpha \in \text{Aut } K_0(A)$ に対して、 $g = \alpha(h)$ となるとき、 $g \sim h$ とかくことにする。 $K_0(A)^\sim = K_0(A)/\sim$ とおき、 $g \in K_0(A)$ について、 $g^\sim$ は g の同値類を表わすことにする。このとき、 A の marker を、 $[1]^\sim$ で決める。ここで、 $[1]$ は、 $1 \in A$ の $K_0(A)$ への imbedding である。記号的に、 $\text{mark}(A) = [1]^\sim$ とかく。この量について次が成り立つ。

定理 A と B を unital C^* -algebra とする。もし A と B が同型ならば、そのとき、 $K_0(A) = K_0(B)$ であり、 $\text{mark}(A) = \text{mark}(B)$ である。

更に、matrix algebra M_k の tensor product の F の marker の translations を調べる。 $x^\sim \in K_0(A)^\sim$ について、 $k \in \text{integer}$ とするとき、 $k \cdot x^\sim$ を $(kx)^\sim$ で定義する。この $kx^\sim$ は、 $x^\sim$ の表

現にはならないから, well-defined である。次が成り立つ。

[定理 unital C^* -algebra A に対して, $\text{mark}(A \otimes M_k) = k \cdot \text{mark}(A)$.
この定理の系として, 次のを得る。

[系1 もし $k_0(A) = \mathbb{Z}_n$, $\text{mark}(A) = 1^\sim$ とすると,
 $\text{mark}(O_n \otimes M_k) = k^\sim$ ($2 \leq n \leq \infty$) ($= 2^\sim$, $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z}$)

[系2 (Paschke-Salinas)
もし $(n-1)$ と k が互いに素でなければ, $O_n \otimes M_k$ と O_n
は同型にならない。

[注意 以下, digraph はすべて strongly connected とする。

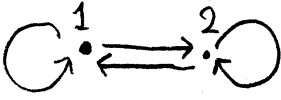
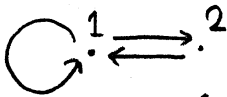
つまり, simple Cuntz-Krieger algebra の分類問題を考える。

その前に, 道具を準備する。

定義 G を digraph とし, $I^-(i) = \{j \in V(G) : j \rightarrow i\}$
とおく。ある $k \neq m \in V(G)$ に対して, $I^-(k) = I^-(m)$ と仮定す
る。この時, k から m への transferred graph $H = G(k \rightarrow m)$ を
次で定義する。 $V(H) = V(G)$ とし, $E(H) = (E(G) \setminus \{(m, i) \in E(G) : i \in V(G)\} \cup \{(m, k)\})$ とする。 $H = G(k \rightarrow m)$ の
adjacency matrix B は次のようになる。 A を G の adjacency
matrix とし, A_i を A の i -th row vector とする。そうすると,
 $I^-(k) = I^-(m)$ は, $A_k = A_m$ のことより,

$$B(i, j) = \begin{cases} A(i, j) & (i \neq m) \\ \delta_{k, j} & (i = m). \end{cases}$$

簡単の為, $\equiv$ の $=$ とを, $A \xRightarrow{\quad} B$ ではなく $\xRightarrow{\quad} B$ とにする。
 $\langle A_k \rightarrow A_m \rangle$

例  $\xRightarrow{\quad}$ 

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \langle A_1 \rightarrow A_2 \rangle \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 k から m への digraph G の transferred graph を $H = G(k \rightarrow m)$ とする。この時, $\mathcal{O}_H$ は $\mathcal{O}_G$ と同型である。

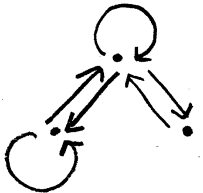
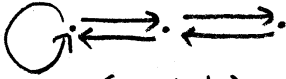
更に, transferred graph の定義を一般化する。

定義 A を $0-1$ matrix とする。 $E_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ とおく。相異なる $k(1), k(2), \dots, k(r), m(1), \dots, m(s)$ 2, $p \notin \{m(1), \dots, m(s)\}$ に対して, $A_p = E_{k(1)} + \dots + E_{k(r)} + A_{m(1)} + \dots + A_{m(s)}$ とする。この時, $n \times n$ matrix B を次で定義する。

$$B(i, j) = \begin{cases} A(i, j) & (i \neq p) \\ 1 & (i = p \text{ 2, } j \in \{k(1), \dots, k(r), m(1), \dots, m(s)\}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

この B の $=$ とを, A を primitively に transfer したものとしよう。これを, $A \xRightarrow{\text{prim}} B$ 又は, $A \xRightarrow{\quad} B$
 $E_{k(1)} + \dots + E_{k(r)} + A_{m(1)} + \dots + A_{m(s)} \rightarrow A_p$

とかく。

例  $\xRightarrow{\quad}$ 

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\quad} A_2 + E_3 \rightarrow A_1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

primitive transformation $\overset{\text{prim}}{\rightleftarrows}$ により生成される同値関係
 を, primitive equivalence $\overset{\text{prim}}{\sim}$ とよぶ。 == >, $A \overset{\text{prim}}{\sim} B$ とは,
 $C_1, \dots, C_k$ が存在して, $A \overset{\text{prim}}{\rightleftarrows} C_1 \overset{\text{prim}}{\rightleftarrows} C_2 \overset{\text{prim}}{\rightleftarrows} \dots \overset{\text{prim}}{\rightleftarrows} C_k \overset{\text{prim}}{\rightleftarrows} B$

($C \overset{\text{prim}}{\rightleftarrows} D$ は, $C \overset{\text{prim}}{\Rightarrow} D$ か $D \overset{\text{prim}}{\Rightarrow} C$ のことを意味する)

transferred graph の定理の拡張が, 成り立つ。

定理 A と B が primitive equivalent であれば, $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$
 は同型である。

以上の準備のもとで, 3×3 indecomposable matrices A に対する
 Cuntz-Krieger algebras $\mathcal{O}_A$ を分類することが出来る。

定理 A と B を 3×3 indecomposable matrices とする。この時、
 次の同値である。

(1) A と B は primitive equivalent である。

(2) $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ は同型である。

(3) $K_0(\mathcal{O}_A) = K_0(\mathcal{O}_B)$, $\text{mark}(\mathcal{O}_A) = \text{mark}(\mathcal{O}_B)$

次に, この結果を分類表の形にまとめてみる。

分類表

K_0	marker	digraph	代表
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\overline{0}$		
$\mathbb{Z}$	$\overline{0}$		
$\mathbb{Z}_4$	$\overline{2}$		$\theta_5 \otimes M_2$
$\mathbb{Z}_3$	$\overline{1}$		θ_4
$\mathbb{Z}_2$	$\overline{0}$		$\theta_3 \otimes M_2$
	$\overline{1}$		θ_3
0	$\overline{0}$		θ_2

Parry と Sullivan は, $\det(1-A)$ が, transition matrix A をもつ topological Markov chains の flow equivalence の topological invariant であることを示した。Cuntz-Krieger [10] は, 次のことを証明している。(1) もし transition matrices A, B をもつ topological Markov chains T, S が flow-equivalent であるならば, その時, Cuntz-Krieger algebras $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ は, stable isomorphic である。(2) もし $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ が stable isomorphic であるならば, その時, $|\det(1-A)| = |\det(1-B)|$ である。

私的な会話で, Cuntz は我々に次の興味ある問題を提出してくれた。Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_A$ に対して, $\det(1-A)$ は, stable isomorphic invariant であるか?

この問題について我々は反例を見つけた。それは, 3×3 matrix に対する我々の分類定理による。結局, その定理から, 次の系が出る。

[系 $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ が同型ではあるが, $\det(1-A) \neq \det(1-B)$ であるような matrices A, B が存在する。

証明は, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を取ればよい。

この時, $K_0(\mathcal{O}_A) = K_0(\mathcal{O}_B) = 0$. 定理から, $\mathcal{O}_A$ と $\mathcal{O}_B$ は同型である。ところが, $\det(1-A) = 1 \neq -1 = \det(1-B)$.

注意 上の系は, "real" C^* -algebra $\mathcal{O}_A$ について成立する。

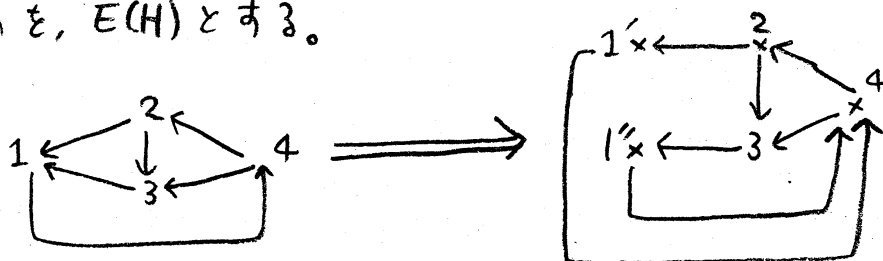
⑧ 補遺

digraph の adjoint の一般化として, explosion というものが考えられる。

定義 G を digraph とする。 $I^-(i) = \{j \in V(G) : i \leftarrow j\}$ の個数 i が, ある $i \in V(G)$ に対して, 2 よりも大きいとする。 ($i=1$ とする)。 $I^-(1) = V \cup W$ と分解する。この時, G の 1 の explosion H (V と W に関する) とは, 次のものである。

$V(H) = (V(G) \setminus \{1\}) \cup \{v_0, w_0\}$, $E(H) = (E(G) \setminus \{(1, j), (k, 1)\}; j, k \in V(G)\} \cup \{(v_0, v), (w_0, w); v \in V \setminus \{1\}, w \in W\} \cup \{(m, v_0), (m, w_0); v \in V, w \in W, m \in I^+(1)\}$ となるものである。ただし, もし $1 \in V$ ならば, $E(H)$ に $\{(v_0, v_0), (v_0, w_0)\}$ をつけ加えたものを, $E(H)$ とする。

例



定理 H を digraph G の explosion とすると, この時, $\mathcal{O}_H = \mathcal{O}_G$ である。

(ただし, この操作のくり返しも, explosion とよぶ。)

REFERENCES.

- [1] R.J.Archbold, On the 'flip-flop' automorphism of $C^*(S_1, S_2)$, Quart. J. Math., Oxford, (2), 30(1979), 129-132.
- [2] C.Berge, Graphs and Hypergraphs, North Holland, 1973.
- [3] O.Bratteli, Inductive limits of finite-dimensional C^* -algebras, Trans. Amer.Math. Soc., 17(1972), 195-234.
- [4] J.Cuntz, Simple C^* -algebras generated by isometries, Commun. Math. Phys., 57(1977), 173-185.
- [5] ———, A class of C^* -algebras and topological Markov chains II: Reducible Markov chains and the Ext-functor for C^* -algebras, Preprint.
- [6] ———, K-theory for certain C^* -algebras, to appear in Ann. Math.
- [7] ———, K-theory for certain C^* -algebras **II**, to appear in J. Operator Theory.
- [8] ———, Automorphisms of certain simple C^* -algebras, Preprint.
- [9] ——— and D.E.Evans, Some remarks on the C^* -algebras associated with certain topological Markov chains, Preprint.
- [10] ——— and W.Krieger, A class of C^* -algebras and topological Markov chains, Invent. Math., 56(1980), 251-268.
- [11] M.Enomoto, M.Fujii and R.Ichihara, The weak extension groups of Cuntz-Krieger algebras, to appear in Math. Japon.
- [12] ———, ———, H.Takehana and Y.Watatani, Automorphisms on Cuntz algebras II, Math. Japon., 24(1979), 463-468.
- [13] ———, H.Takehana and Y.Watatani, Automorphisms on Cuntz algebras, Math. Japon., 24(1979), 231-234.
- [14] ———, ——— and ———, C^* -algebras on free semigroups as extensions of Cuntz algebras, Math. Japon., 24(1980), 527-531.

- [15] M.Enomoto and Y.Watatani, A graph theory for C^* -algebras, Math. Japon., 25(1980), in press.
- [16] ———, Young diagrams and C^* -algebras, to appear in Math. Japon.
- [17] D.E.Evans, On O_n , Preprint.
- [18] M.Fujii, On extensions of the Cuntz algebra, Math. Japon., 24(1980), 537-539.
- [19] ——— and Y.Watatani, Cuntz-Krieger algebras associated with adjoint graphs, Math. Japon., 25(1980), in press.
- [20] D.Olesen and G.K.Pedersen, Some C^* -dynamical systems with a single KMS state, Math. Scand., 42(1978), 111-118.
- [21] O.Ore, Theory of Graphs, Amer. Math Soc. Colloquium Publ. 38, 1962.
- [22] W.Paschke and N.Salinas, Matrix algebras over O_n , Michigan Math. J., 26(1979), 3-12.
- [23] G.K.Pedersen, C^* -algebras and Their Automorphism Groups, London Math. Soc. Mono., 14, Academic Press, 1979.
- [24] M.Pimsner and S.Popa, The Ext-groups of some C^* -algebras considered by J.Cuntz, Rev. Roum.Math. Pures Appl., 23(1978), 1076-1096.
- [25] Y.Watatani, Clifford C^* -algebras, Math. Japon., 24(1980), 533-536.
- [26] M.Pimsner and D.Voiculescu, Imbedding the irrational rotation C^* -algebra into an AF-algebra, Preprint.
- [27] P.J.Higgins, Categories and Groupoids, Van Nostrand, 1971.