

(2) Ornstein-Uhlenbeck 過程の断熱消去法

京大・理 馬淵真人・馬場 健

最近、拡散係数が問題にしている系の変数に依存する Fokker-Planck 方程式が注目されてきている。^{1)~3)} この項は Fokker-Planck 方程式を導出する Langevin 方程式の揺動力の解釈に関して大きく変わり得るものである。この解釈には典型的な二つの方法、すなわち、伊藤の方法と Stratonovich の方法がある。これらの方法は数学的に互に等しいものであるが、数学的立場では Langevin 方程式の取扱い法であって、解釈、すなわち、モデル化に対しては無力である。

今回は、減衰係数 r が場所に依存する一次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程を考察してみる。⁴⁾ これを質量 1 のブラウン粒子がポテンシャル $\phi(x)$ 内に動いている過程とすると、場所 x 及び速度 u で表わされる運動方程式は

$$\dot{x} = u, \dots\dots (1) \quad \dot{u} = -ru - \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} + f_u(t), \quad (2)$$

と書ける。伊藤型と考える揺動力 $f_u(t)$ は次の揺動散逸定理を満たす白色ガウス雑音とする。

$$\langle f_u(0) f_u(t) \rangle = 2rk_B T \delta(t). \quad (3)$$

今、 r が大きいとして、 $t \gg \frac{1}{r}$ の所の Smoluchowski 方程式を断熱消去法で求めてみる。 r が大きいとして、(2) 式より左辺の時間微分を零とおき u について解くと

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} + \frac{1}{r} f_u(t) \quad (= \dot{x}), \quad (4)$$

ここで、 $\frac{1}{r} f_u(t)$ の解釈が問題になる。まず $\frac{1}{r} f_u(t)$ を伊藤型と考えると、場所 x に依存する粗視化した分布関数 $P(x, t)$ の満たす方程式は次の様に表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = k_B T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{rk_B T} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} P(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} P(x, t) \right) \right), \quad (5)$$

馬淵真人・馬場 健

となる。一方, $\frac{1}{r} f_u(t)$ を Stratonovich 型と考える, すなわち, $\frac{1}{r} f_u(t) \rightarrow \frac{1}{r} \circ f_u(t)$ とすると,

$$\frac{1}{r} \circ f_u(t) = \frac{1}{r} f_u(t) - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dx} dx f_u(t), \quad (6)$$

となる。但し, Stratonovich 型と伊藤型との関係^{5), 6)} $G(x) \circ f(x) = G(x) f(t) + \frac{1}{2} G'(x) \dot{x} f(t)$ を用いている。(6) 式を用いると (4) 式は

$$\dot{x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} - \frac{1}{r^2} r' k_B T + \frac{1}{r} f_u(t), \quad (7)$$

となって, 分布関数 $P(x, t)$ の満たす方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = k_B T \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{k_B T} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \right) P(x, t), \quad (8)$$

となる。

二つの立場によって導出された Fokker-Planck 方程式 (5), (8) 式に於いて, 場所に依存する r の為に r の所在に違いが出てくる。(8) 式での定常解 $\rho_{st}(x) = \text{const} \exp -\frac{\phi(x)}{k_B T}$ で物理的直感を満足するので Stratonovich 型に解釈する方が良いと思われる。この正当性を, r が大きいとして, $t \gg \frac{1}{r}$ の所で r^{-2} までとるとして, 伝統的な摂動法, 及び (1), (2), (3) 式を満たす (x, u) 空間の分布関数 $P(x, u, t)$ の満たす Kramers 方程式に u の変数を消去する射影演算子を用いて, r^{-2} までの範囲で発展方程式を求める。

摂動法⁷⁾

(2) 式を積分すると,

$$\dot{x}(t, f_u) = - \int_0^t e^{-\int_t^{t'} r dt''} \frac{\partial \phi}{\partial x} dt' + \int_0^t e^{-\int_t^{t'} r dt''} f_u(t') dt', \quad (9)$$

これを連続の式 $\frac{\partial}{\partial t} P + \frac{\partial}{\partial x} (\dot{x} P) = 0$ に代入する。但し $P(x, t) = \langle \delta(x - x(t; f_u)) \rangle$ であって, $\langle \dots \rangle$ は揺動力 $f_u(t)$, 初期値についての平均である。部分積分を連続し

て行い、次の様な Navikov の定理⁸⁾

$$\begin{aligned} & \left\langle \int_0^t e^{-\int_{t'}^t r dt''} f_u(t') dt' \delta(x - x(t; f_u)) \right\rangle \\ & \quad \equiv - \frac{k_B T}{r} \frac{\partial}{\partial x} \langle \delta(x - x(t; f_u)) \rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

を用い、 $t \gg \frac{1}{r}$ の所に注目するとして初期値依存を無視し、 r^{-2} までとると分布関数 $P(x, t)$ の満たす方程式は (8) 式と同一になる。

射影演算子法

(1), (2), (3) 式より次の Kramers 方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t; x, u) &= \frac{\partial}{\partial x} (-uP) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} P \right) + r \left(\frac{\partial}{\partial u} u + k_B T \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) P \\ &\equiv (L_0 + L_1)P, \end{aligned} \quad (11)$$

ここで

$$L_0 = r \frac{\partial}{\partial u} \left(u + k_B T \frac{\partial}{\partial u} \right), \quad L_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial x}, \quad (12)$$

である。射影演算子 $\mathcal{D}$ を用いると、分布関数の射影成分に対する発展方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}P = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \mathcal{D} L_1 (L_0^{-1} (1 - \mathcal{D}) L_1)^i \mathcal{D}P. \quad (13)$$

ここで、射影演算子 $\mathcal{D}$ は

$$\mathcal{D}P \equiv \varphi_0 \int P(u, x) du (= \varphi_0(u) P(x)), \quad (14)$$

で、 $\varphi_0(u)$ は L_0 の固有値が零の固有関数で $\text{const} \times e^{-u^2/2k_B T}$ によって与えられる。

(13) 式を r^{-2} までとると (8) 式に一致する。

これらより、伊藤型と考える Langevin 方程式 (1), (2) 式で断熱消去による方法によっ

馬淵真人・馬場 健

て x だけの Fokker-Planck 方程式を導出するには (4) 式を Stratonovich 型と解釈すべきであることが分った。

参考文献

- 1) W. Horsthemke and M. Malek-Mansour, Z. Phys. **B24**, 307 (1976).
- 2) T. Kawakubo, S. Kabashima and Y. Tsuchiya, Supple. Prog. Theor. Phys. **64**, 150 (1978).
- 3) A. Schenzle and H. Brand, Phys. Rev.
- 4) G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein, Phys. Rev. **36**, 823 (1930).
- 5) L. Arnold, Stochastic Differential Equations, John Wiley and Sons (1974).
- 6) K. Itô, Lecture Notes in Physics. **39**, 218 (1975).
- 7) M. San Miguel and J. M. Sancho, Preprint.
- 8) E. A. Novikov, Soviet Phys. JETP **20**, 1290 (1965).
- 9) H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33**, 423 (1965).