

常微分作用素環におけるイデアルの共通部分

—グレブナ基底を用いた計算法とその利用例—

新潟大学工学部情報工学科 田島 慎一 (S. Tajima)

1. 序

線形微分方程式系を扱う際に、微分作用素環におけるイデアルの共通部分の構造を考察したりあるいは実際に計算したりする必要があることがある。たとえば、関数 u_1, u_2 に対して、微分作用素環 $\mathcal{D}_X$ におけるイデアル I_1, I_2 を $I_1 = \{P \in \mathcal{D}_X \mid Pu_1 = 0\}$, $I_2 = \{P \in \mathcal{D}_X \mid Pu_2 = 0\}$ で定めたとする。これらの左イデアルはそれぞれ関数 u_1, u_2 の満たす微分方程式を記述するので、イデアルの共通部分 $I = I_1 \cap I_2$ は、ふたつの関数 u_1, u_2 をともに解として持つような微分方程式に相当する。このことが示すように、イデアルの共通部分を考えることは微分方程式論においても基本的であるが、その生成元を具体的に求めることはそれほど容易ではない。実際、ふたつの左イデアル I_1, I_2 の生成元が比較的簡単な形の微分作用素であったとしても、共通部分 $I_1 \cap I_2$ の生成元を（たとえば、未定係数法のような）素朴なやり方で求めようとすると相当量の計算が必要となる。そのため計算を遂行出来ない事も多い。従って、イデアルの共通部分に対しその生成元を確実に与えてくれるようなアルゴリズムを見つけてそれを利用することが必要となる。

多変数多項式環の場合、グレブナ基底を用いることでイデアルの共通部分の生成元を求めることが出来る。偏微分作用素環の場合も、全く同様の考え方に基づいて、イデアルの共通部分を求めることが可能である。本稿では、常微分作用素環の場合にこの計算法を紹介し、いくつかの計算例と注意を与えた後に有理関数の極での主要部に関連した利用例について述べる。

本稿の内容は、平成 9 年度文部省海外研究開発動向調査事業によりフランスのパリ大学を訪問した折りに行った計算に基づいて得たものである。また本研究は住友財団平成 11 年度基礎科学研究助成事業より助成を受けている。

2. 常微分作用素と S-多項式

複素平面 $\mathbb{C}$ を X で表し、独立変数を x とおく。微分作用素 $\frac{d}{dx}$ を D_x で表し、多項式を係数にもつような X 上の線形常微分作用素全体の作る環を $\mathcal{D}_X$ で表すことにする。この常微分作用素環 $\mathcal{D}_X$ から左イデアル I_1, I_2 として次のものを取る。

$$I_1 = \langle xD_x + 2 \rangle, \quad I_2 = \langle (x-1)D_x - 3 \rangle.$$

この節では、これらふたつのイデアルの共通部分の生成元を求める計算を中心に議論を進めていく。まず最初に素朴な方法で計算を試み、その後に S-多項式概念を用いた方法で計算をおこなうことにする。以下、 $P_1 = xD_x + 2, P_2 = (x-1)D_x - 3$ とおく。

微分方程式の解を用いた計算

有理関数 $\frac{1}{x^2}$ が微分方程式 $(xD_x + 2)u(x) = 0$ を満たすことに注目する. この有理関数に微分作用素 $P_2 = (x-1)D_x - 3$ を作用させると

$$P_2 \frac{1}{x^2} = \frac{-5x+2}{x^3}$$

となるが, 右辺の有理関数は u を未知関数とする次の微分方程式をみたす.

$$((5x-2)x D_x + (10x-6)) u(x) = 0.$$

そこで, これらの微分作用素の積をとり計算すると

$$((5x-2)x D_x + (10x-6)) P_2 = (5x-2)x(x-1)D_x^2 + (-12x+6)D_x + (-30x+18)$$

を得る. 次に, 関数 $(x-1)^3$ が微分方程式 $((x-1)D_x - 3)u(x) = 0$ を満たすことに注目して同様の計算をすると, 関数 $P_1(x-1)^3 = (5x-2)(x-1)^2$ を解として持つ一階の微分方程式

$$((5x-2)(x-1)D_x - 3(5x-3)) u(x) = 0$$

を得る. 先ほどと同様に微分作用素の積

$$((5x-2)(x-1)D_x - 3(5x-3)) P_1$$

をとり, この作用素の積を計算してみると前に求めた 2 階の微分作用素と同じであることが確かめられる. この 2 階の微分作用素を

$$R_2 = (5x-2)x(x-1)D_x^2 + (-12x+6)D_x + (-30x+18)$$

とおき, いままでの計算結果をまとめると

$$\begin{aligned} R_2 &= ((5x-2)(x-1)D_x - 3(5x-3)) P_1 \\ &= ((5x-2)x D_x + (10x-6)) P_2 \end{aligned}$$

となる. 明らかに $R_2 \in I_1 \cap I_2$ が成り立つ.

さてここで, イデアル I_1 もイデアル I_2 も共に一階の微分作用素により生成されているので, イデアル $I_1 \cap I_2$ の生成元として 2 階の微分作用素 R_2 をとれば十分であると考えるのは早計である. 微分作用素 R_2 の 2 階の微分の部分の係数は $x=0, x=1$ 以外に $(5x-2)=0$ も零点として持っている. 従って, R_2 の生成するイデアルが定める D_X -加群の特性多様体は, D_X -加群 $D_X/I_1 \cap I_2$ の特性多様体と明らかに異なるからである. つまり, $5x-2=0$ は余分な見かけ上の特異点とも言うべきものになる.

このような素朴な計算を行うと, イデアル $I_1 \cap I_2$ に属する微分作用素を構成することができが, イデアル $I_1 \cap I_2$ を生成するのに十分な数の微分作用素を求めるには更に多くの計算が必要となる. この例の場合はもともとの微分方程式の解 (ここでは古典解) がもたまって

いるのでこのような発見的計算が出来たが、一般には解が求まる訳ではないのでこの様な計算は出来ない。従って、微分作用素環における代数的計算のみで共通部分 $I_1 \cap I_2$ の生成元を求める様なアルゴリズムが必要とされる。

さて、ここで多変数多項式環のイデアルの共通部分の計算法に関する結果を思いだそう。いま、 I_1, I_2 を多変数多項式環 $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ のイデアルとする。不定元 t を新たに導入し、多項式環 $K[x_1, x_2, \dots, x_n, t]$ のイデアル $tI_1 + (1-t)I_2$ を考える。この時、次が成立する。

定理 (cf. Cox, Little and O'Shea [4], Chap4, Th. 11)

$$I_1 \cap I_2 = (tI_1 + (1-t)I_2) \cap K[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

この定理の証明をみれば、偏微分作用素環でもまったく同じ主張が成り立つことが容易に分かる。その事から偏微分作用素環の場合にも、イデアルの共通部分を計算するアルゴリズムを導くことができる (私自身は数年前にはじめてこの事に気がついたが、専門家には常識に属することらしい)。

この節のはじめに与えたイデアルをここで再び取り上げ、上記の結果に基づいてイデアルの共通部分を求めてみることにする。

例 1 イデアル $I_1 = \langle xD_x + 2 \rangle, I_2 = \langle (x-1)D_x - 3 \rangle$ に対し、イデアル $\tilde{I} \subset D_X[t]$ を $\tilde{I} = tI_1 + (1-t)I_2$ で定める。いま $P_1 = xD_x + 2, P_2 = (x-1)D_x - 3$ とおけば、明らかに $\tilde{I} = \langle tP_1, (1-t)P_2 \rangle$ となる。これより S-多項式の計算等をおこない変数 t を消去していく。まず、 $S := S(tP_1, (1-t)P_2) = tP_1 + (1-t)P_2$ とおくと

$$S = (D_x + 5)t + P_2$$

を得るので、 $T := S(S, tP_1) = xS - tP_1$ と定めると、

$$T = (5x-2)t + x(x-1)D_x - 3x$$

を得る。ここで交換関係 $[D_x + 5, 5x-2] = 5$ に注目して $U := (D_x + 5)T - (5x-2)S$ とおけば、

$$U = 5t + x(x-1)D_x^2 + (x-3)D_x - 9$$

を得る。

微分作用素 T, U の S-多項式をとり、変数 t を消去すると

$$(5x-2)U - 5T = ((5x-2)xD_x + (10x-6))P_2 \in I_1 \cap I_2$$

を得る。同様に、微分作用素 S, U から変数 t を消去すれば

$$(D_x + 5)U - 5S = (xD_x^2 + (5x+4)D_x + 10)P_2 \in I_1 \cap I_2$$

を得る。前者は既に求めた 2 階の微分作用素

$$R_2 = (5x-2)x(x-1)D_x^2 + (-12x+6)D_x + (-30x+18)$$

と等しいことが確かめられる. 後者を R_3 とおき計算すれば, 次を得る.

$$R_3 = (x^2 - x)D_x^3 + (5x^2 - 2x - 4)D_x^2 - 18D_x - 30.$$

結局, 微分作用素環の左イデアル I_1 と I_2 の共通部分 $I_1 \cap I_2$ はこれらふたつの微分作用素 R_2, R_3 で生成されることが分かる.

$$I_1 \cap I_2 = \langle R_2, R_3 \rangle.$$

これらの生成元 R_2, R_3 はグレブナ基底をなしている.

例 2 常微分作用素環の左イデアル I_1, I_3 を次のようにおく.

$$I_1 = \langle xD_x + 2 \rangle, \quad I_3 = \langle (x-1)D_x - 3, D_x^4 \rangle.$$

左イデアル I_3 は関数 $(x-1)^3$ を特徴付ける方程式系であり, 微分方程式系としては例 1 でとりあげたイデアル I_2 の定める微分方程式系より単純な構造をしている. 数式処理システム Kan を用いてイデアルの共通部分のグレブナ基底を計算すると

$$I_1 \cap I_3 = \langle R_2, R_3, R_4 \rangle$$

を得る. ただしここで, 微分作用素 R_2, R_3 は例 1 と同じ作用素

$$R_2 = (5x - 2)x(x - 1)D_x^2 + (-12x + 6)D_x + (-30x + 18),$$

$$R_3 = (x^2 - x)D_x^3 + (5x^2 - 2x - 4)D_x^2 - 18D_x - 30,$$

であり, 微分作用素 R_4 は

$$R_4 = xD_x^4 + (-5x + 5)D_x^3 + (125x^2 - 100x - 20)D_x^2 - 300D_x - 750$$

で与えられる. さて, $D_x^4 \frac{1}{x^2} = \frac{120}{x^6}$ であることから 5 階の微分作用素

$$R_5 = (xD_x + 6)D_x^4 = xD_x^5 + 6D_x^4$$

が共通部分 $I_1 \cap I_3$ に属することが分かる. 従って素朴に考えると (R_2, R_3 以外の) イデアルの生成元としてこの R_5 が必要に見えるが, このイデアルの場合は 5 階の作用素でなく 4 階の微分作用素 R_4 で十分となる.

3. 計算例

この節では具体例をふたつ取り上げ, それぞれの場合にイデアルの共通部分のグレブナ基底を求めてみる. 最初の例 (例 3) では「2つの有理関数の満たす微分方程式系」の計算を行い, 次の例 (例 4) では「それらの有理関数の極における主要部が定める代数的局所コホモロジー類の満たす微分方程式系」の計算を行う. さらに, これら2つの計算結果を比較し検討を加える.

例 3 次で定める左イデアル I_1, I_2 を考える.

$$I_1 = \langle xD + 2 \rangle, \quad I_2 = \langle (x-1)D_x + 3 \rangle.$$

イデアル I_1 は有理関数 $\frac{1}{x^2}$ の満たすべき微分方程式系であり, イデアル I_2 は有理関数 $\frac{1}{(x-1)^3}$ の満たすべき微分方程式系である. $\hat{I} = tI_1 + (1-t)I_2$ とおく. 環 $D_X[t]$ に $t \succ x, D_x$ なる項順序を入れ, イデアル $\hat{I}$ のグレブナ基底を計算すると

$$\text{Gr}(\hat{I}) = \{T, R_2, R_3\}$$

を得る. ただし,

$$T = t - ((x^2 - x)D_x^2 + (7x - 3)D_x + 9),$$

$$R_2 = (x^3 + x^2 - 2x)D_x^2 + (6x^2 + 12x - 6)D_x + (6x + 18),$$

$$R_3 = (x^2 - x)D_x^3 + (-x^2 + 10x - 4)D_x^2 + (-6x + 18)D_x - 6,$$

である. $\text{Gr}(\hat{I}) \cap D_X$ がイデアル $I_1 \cap I_2$ のグレブナ基底 $\text{Gr}(I_1 \cap I_2)$ を与えるので, 特に

$$I_1 \cap I_2 = \langle R_2, R_3 \rangle$$

を得る.

例 4 左イデアル J_1, J_2 を次で決める.

$$J_1 = \langle xD_x + 2, x^2 \rangle, \quad J_2 = \langle (x-1)D_x + 3, (x-1)^3 \rangle.$$

イデアル J_1 は代数的局所コホモロジー類 $\frac{1}{x^2} \bmod \mathcal{O}_X$ の満たす微分方程式系であり, J_2 は $\frac{1}{(x-1)^3} \bmod \mathcal{O}_X$ の満たす微分方程式系である. イデアルの共通部分 $J_1 \cap J_2$ を計算すると

$$J_1 \cap J_2 = \langle Q, R \rangle$$

を得る. ただし

$$Q = x^2(x-1)^3,$$

$$R = x(x-1)D_x + 7x^4 - 19x^3 + 15x^2 + 2x - 2$$

である.

例 3 と例 4 の計算結果を見ると, 例 3 のイデアル $I_1 \cap I_2$ のグレブナ基底が 2 階と 3 階の微分作用素から成るのに比べ例 4 のイデアル $J_1 \cap J_2$ のグレブナ基底は零階と 1 階の微分作用素からなり, (微分方程式系としての構造も) より単純であることが分かる. 関数そのものでなく, 関数の特異性に注目してその特異性のみを記述する微分方程式系を考えると, 得られる微分方程式系は関数そのものが満たす微分方程式系に比べ (著しく構造が) 簡単になるからである.

イデアルの共通部分の生成元を求める計算を例 4 の場合に実際に行ってみることにする.

S-多項式を用いた計算 (例 4 の場合)

イデアル $\hat{J} \subset D_X[t]$ を $\hat{J} = \langle tP_1, tx^2, (1-t)P_2, (1-t)(x-1)^3 \rangle$ とおく. ただし $P_1 = xD_x + 2, P_2 = (x-1)D_x + 3$ とおいた.

恒等式 $(3x^2 - 8x + 6)x^2 + (-3x - 1)(x-1)^3 = 1$ より,

$$(3x^2 - 8x + 6)tx^2 + (3x + 1)(1-t)(x-1)^3 = t + (3x + 1)(x-1)^3$$

が導けるので, $t + (3x + 1)(x-1)^3 \in \hat{J}$ を得る. 次に, tP_1 と $(1-t)P_2$ の S-多項式を計算すると

$$\begin{aligned} S(tP_1, (1-t)P_2) &= (x-1)tP_1 + x(1-t)P_2 \\ &= x(x-1)D_x + t(-x-2) + 3x \end{aligned}$$

となる. ここで $t + (3x + 1)(x-1)^3 \in \hat{J}$ を用いると

$$R = x(x-1)D_x + 7x^4 - 19x^3 + 15x^2 + 2x - 2 \in J_1 \cap J_2$$

を得る.

参考のため, 共通部分 $I_1 \cap I_2 = \langle R_2, R_3 \rangle$ と共通部分 $J_1 \cap J_2 = \langle Q, R \rangle$ の生成元の間関係を以下に添えておく.

$$R_2 = ((x+2)D_x - 16x^2 + 28x - 7)R + (-7D_x + 112x - 164)Q,$$

$$R_3 = (D_x^2 + (-7x^2 + 12x - 4)D_x + (4x^2 - 21x + 14))R + ((49x - 70)D_x + (-28x + 99))Q.$$

4. 代数的局所コホモロジー類の満たす常微分方程式系への応用

複素平面 $X = \mathbb{C}$ 上の正則関数のなす層を $\mathcal{O}_X$ とおき, 点 $A \in X$ に台を持つような代数的局所コホモロジー群のなす層を $\mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X)$ で表す. 微分作用素環のなす層を $\mathcal{D}_X$ で表すと, $\mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X)$ は $\mathcal{D}_X$ -加群の構造をもつ. 更に, simple な極大過剰決定系となる.

さて, 点 A に台を持つような代数的局所コホモロジー類 $\sigma \in \mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X)$ を取る. 点 A の座標を a とおけば代数的局所コホモロジー類 σ は

$$\sigma = \sum_{k=1}^m \left[\frac{c_k}{(x-a)^k} \right]$$

と表すことが出来る. ただし, $\left[\frac{1}{x^k} \right] = \frac{1}{x^k} \bmod \mathcal{O}_X$ とおいた.

さて, 係数 c_m は $c_m \neq 0$ を満たすとして, 代数的局所コホモロジー類 σ の満たす微分方程式系を考えてみる. $m=1$ である時は, $\sigma = \left[\frac{c_1}{x} \right]$ であり,

$$\{P \in \mathcal{D}_X \mid P\sigma = 0\} = \langle x-a \rangle$$

が成り立つ. すなわち, σ の annihilator ideal は零階の微分作用素 $x - a$ で生成される事になる. それに対し $m \geq 2$ の時は (高々 $m - 1$ 次の) 多項式 $b(x)$ を適当に取れば, 代数的局所コホモロジー類 σ は次の微分方程式を満たすことが容易に分かる.

$$(x - a)^m \sigma = ((x - a)D_x + b(x))R\sigma = 0.$$

この微分方程式の代数的局所コホモロジー解は 1 次元のみとなり,

$$\{P \in D_X \mid P\sigma = 0\} = \langle (x - a)^m, (x - a)D_x + b(x) \rangle$$

が成り立つことも明かであろう.

さて, いくつかの代数的局所コホモロジー類が与えられたとし, それらを解として持つような微分方程式系を構成する事を考えてみる.

いま, $A_1, A_2, \dots, A_\ell$ を複素平面 X の相異なる ℓ 個の点とする. 各 $k = 1, 2, \dots, \ell$ に対し, 点 A_k のみに台を持つような代数的局所コホモロジー類 σ_k が与えられたとする. コホモロジー類 σ_k の点 A_k における極の位数を m_k で表すことにする (これらのうち少なくともひとつは極に置ける位数が 2 以上であると仮定しよう). 点 A_k の座標を a_k とする. この時, 次が成立する.

定理 イデアル J を $J = \{P \in D_X \mid P\sigma_k = 0, k = 1, 2, \dots, \ell\}$ で定める. このとき, イデアル J は次の形をした零階の微分作用素 Q と 1 階の微分作用素 R により生成される.

$$Q = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \cdots (x - a_\ell)^{m_\ell},$$

$$R = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_\ell)D_x + b(x).$$

ただし, $b(x)$ は高々 $m_1 + m_2 + \cdots + m_\ell - 1$ 次の多項式である.

証明の方針 $\ell = 1$ の時は明かであるので前節での議論を用いれば数学的帰納法で証明することが出来る.

微分方程式 $Q\sigma = R\sigma = 0$ の解空間は ℓ 次元となるが, 微分作用素 R は 1 階の微分作用素である事に注意されたい. さて, 論文 [5], [6] では微分作用素を用いた留数計算アルゴリズムを与えているが, そこではその留数計算アルゴリズムに用いる微分作用素を天下りに与えている. 微分作用素の存在を議論しないで具体的に微分作用素を与えた訳である. それに対し, 上に述べた定理を用いれば [5], [6] で用いた微分作用素の存在を示す事が出来る.

参考文献

- [1] J. Briançon et Ph. Maisonobe, *Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable*, L'Enseign. Math. **30** (1984), 7-38.
- [2] B. Buchberger, *Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems*, Aequationes Math. **4** (1970), 374-383.

- [3] F. Castro, *Calculs effectifs pour les idéaux d'opérateurs différentiels*, Travaux en Cours, **24**, Hermann Paris, 1987m pp. 1–9.
- [4] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [5] Y. Nakamura and S. Tajima, *Residue calculus with differential operators*, Kyushu J. of Math. **54** (2000), 127–138.
- [6] 田島慎一, 中村弥生, D-加群を用いた留数計算アルゴリズムの局所化, 数式処理 **7** (1999), 2–10.
- [7] 田島慎一, 非同次常微分方程式の可解条件について, 京都大学数理解析研究所講究録「完全最急降下法」掲載予定
- [8] S. Tajima and Y. Nakamura, *Computing point residues for a shape basis case via differential operators*, 京都大学数理解析研究所講究録「超局所解析とその周辺」掲載予定
- [9] N. Takayama, *Kan: A system for computation in algebraic analysis* (1991–), (<http://www.math.s.kobe-u.ac.jp>).