

せん断乱流場における混合現象の Lagrange 的

シミュレーション

岩佐義朗・綾 史郎・森田義則・西川秀昭

LAGRANGIAN PROPERTIES OF MIXING PHENOMENA IN BOUNDED TURBULENT SHEAR FLOWS BY MEANS OF NUMERICAL SIMULATIONS

By *Yoshiaki IWASA, Shirou AYA, Yoshinori MORITA and
Hideaki NISHIKAWA*

Synopsis

This paper deals with the mixing phenomena in a main flow direction within a bounded turbulent shear flow in view of Lagrangian aspect.

Data obtained by numerical simulations are analyzed through application of Taylor's classic turbulent diffusion theory by continuous movements: Main objectives are to disclose the relations of Lagrangian properties, such as Lagrangian auto-correlation coefficient, integral time scale and dispersion coefficient with Eulerian Flow properties and also to obtain differences of these Lagrangian properties between two and three dimensional turbulent shear flows.

As results of this study, it is concluded that the auto-correlation coefficient in a three dimensional turbulent shear flow is quite different from that in a two dimensional one, and that the lateral non-uniformity of velocities averaged in a vertical direction and the lateral turbulent intensity are most effective on the longitudinal mixing in three dimensional turbulent shear flows.

1. は じ め に

本研究は、せん断乱流場における混合現象のなかで、とくに、境界面内の一方向的なせん断乱流場における主流方向の混合現象—移流分散—を対象としたものである。理論的な取扱いとしては、流体粒子の挙動を追跡し、その統計的特性量を調べるという Lagrange 的解析法に主眼をおき、Taylor の古典的乱流拡散理論¹⁾との相似性²⁾の観点より解析が行われている。通常用いられる Euler 的な解析法と異なり、Lagrange 的解析法を用いたのは、Taylor の乱流拡散理論に示されるように、混合現象が本質的に流体粒子の散らばりによるものであることによるが、せん断乱流場における混合現象を対象とすると、Lagrange 的実験計測が殊更に困難であるため、著者の知るかぎり、計測例がほとんどなく、理論的解析結果に対する実験的検証例が乏しいのみならず、その Lagrange 的統計量の特長についても未知な点が多いためである。

このような見地より、本研究では、以下に示すように、電子計算機を用いて擬似的な Lagrange 的数値シミュレーションを行い、流体粒子の運動の Lagrange 的特性量について検討しようとするものである。なお、研究の主たる目標は、Lagrange 的特性量の中で、最も基本的と考えられる2次元中心モーメント（統計的分散）の時間的挙動、その時間微分として定義される分散係数、およびそれを規定する自己相関係数の関数形と速度場の関係、とりわけ、2次元せん断乱流場と3次元せん断乱流場におけるそれらの相違におかれている。そのため、以下で取り扱う速度場は簡単化し、流れの性質が主流（ x 軸）方向に変化しない— x 軸方向に等質（ x 軸の原点のとり方に依存しない）とし、エルゴード性が成立するものとする。

2. せん断乱流場における流体粒子の運動の Lagrange 的記述

境界面内のせん断乱流場として、つぎのような Euler 的速度を有する三次元の流れの場を考える。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, y, z, t) = \begin{Bmatrix} \bar{u}_x(y, z) \\ \bar{u}_y(y, z) \\ \bar{u}_z(y, z) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u'_x(x, y, z, t) \\ u'_y(x, y, z, t) \\ u'_z(x, y, z, t) \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $\mathbf{u}$: 点 (x, y, z) の時刻 t における Euler 的流速ベクトル, $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$: 局所時間平均流速 ($\bar{\mathbf{u}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{u}(\mathbf{x}, y, z, t') dt'$) の各座標軸成分, u'_x, u'_y, u'_z : Euler の乱れ速度 ($\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$) の各座標軸成分であり、座標系は、Fig. 1 のようにとられる (以下、太字は、ベクトルを示すものとする)。速度場は、前述の仮定を満たすものとし、Euler の局所平均流速の各成分は、 $\bar{u}_x = \bar{u}_x(y, z)$, $\bar{u}_y = 0$, $\bar{u}_z = 0$ であるとする。

このような速度場に $t=0$ に、点 $\mathbf{a}(X_0, Y_0, Z_0)$ で放出された粒子の t 秒後の位置 $\mathbf{x} = \mathbf{X}(X, Y, Z)$ は、

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{a}, t) = \int_0^t \mathbf{v}(\mathbf{a}, t') dt' + \mathbf{a} \quad \dots\dots\dots (2)$$

で示される。ここに、 $\mathbf{a}$, t は Lagrange のパラメータであり、 $\mathbf{a}$ は $t=0$ における粒子の位置, t は放出からの経過時間であり、 $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$ で、 $t=0$ に点 $\mathbf{a}$ で放出された粒子の有する t 秒後の Lagrange 的速度を示す。粒子は、完全に流れに追随するものとする、 t 秒後に点 $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$ に存在する粒子の Lagrange 的速度 $\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)$ と、その点における Euler 的速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ は、等しいと考えられ、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{a}, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t) \\ &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)) + \mathbf{u}'(\mathbf{X}(\mathbf{a}, t), t) \quad \dots\dots (3) \end{aligned}$$

である。ここに、(3)式の変形において、(2)式の関係を用いている。(2), (3)式から明らかに、点 $\mathbf{a}$ を出発した粒子は、 x 軸方向の不規則な速度を得て、主流方向に運動するとともに、不規則な速度 $v'_y (=u'_y)$, $v'_z (=u'_z)$ で、 y, z 軸方向に運動し、時の経過と共に、不規則に $y-z$ 面内の位置を得、その点 (Y, Z) に応じた x 軸方向の不規則な速度 $v_x(\mathbf{a}, t) = \bar{u}_x(Y, Z) + u'_x(X, Y, Z, t)$ を得、 x 軸方向の位置 $X(\mathbf{a}, t)$ も (2)式にしたがって不規則となる。このような関係を二次元せん断乱流場の場合について、模式的に示すと Fig. 2 のようである。

v_x の統計量について、Euler 的速度 $u_x = \bar{u}_x + u'_x$ との関係は Lumley³⁾ に従って述べると、以下のようである。

$$\begin{aligned} [v_x] &= \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \iiint v_x(\mathbf{a}, t) da_1 da_2 da_3 \\ &= -\frac{1}{A} \iint \bar{u}_x(y, z) dy dz = \bar{u} \quad \dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここに、 $\bar{u}$: 断面平均流速, A : 断面積であり、 $[\]$ は体積平均、あるいは統計的平均を示す。これより、

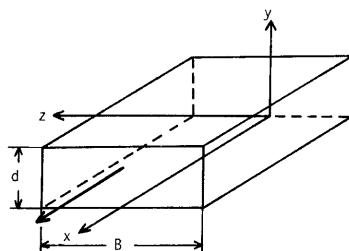


Fig. 1 Definition of coordinate system.

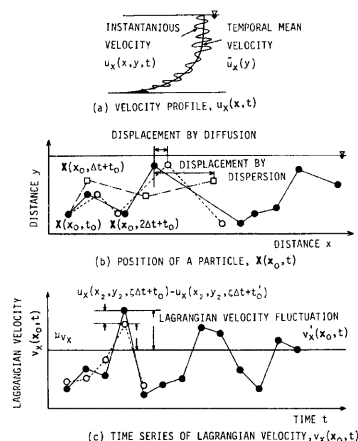


Fig. 2 Movement of fluid particle in two-dimensional turbulent shear flows.

x 軸方向の Lagrange 的変動速度 v_x' が次式のように定義され、

$$v_x' \equiv v_x - [v_x] = \bar{u}_x(Y, Z) + u_x'(X, Y, Z, t) - \bar{u} \quad \dots\dots\dots (5)$$

Lagrange 的変動速度の強さも、(4)式と同様に、

$$\begin{aligned} [v_x'^2] &\equiv \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \iiint v_x'(\mathbf{a}, t)^2 da_1 da_2 da_3 \\ &= \frac{1}{A} \iint \{\bar{u}_x(y, z) - \bar{u}\}^2 dy dz + \frac{1}{A} \iint \overline{u_x'(x, y, z, t)^2} dy dz \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

と示される。

粒子の位置 X についても、同様につきようになる。

$$\begin{aligned} [X] &\equiv \left[\int_0^t v_x(\mathbf{a}, t) dt \right] = [v_x]t \\ &= \bar{u}t \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

粒子の位置の平均位置からの偏差 X' は

$$\begin{aligned} X' &\equiv X - [X] \\ &= \int_0^t v_x'(\mathbf{a}, t) dt \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

であり、その統計的分散は次式となる

$$[X'^2] \equiv \{[X - [X]]^2\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

対象としている速度場は x 軸方向に等質であり、 $v_x(v_x')$ は、粒子放出後の時間が充分経過すると、粒子の出発点 $\mathbf{a}$ に依存せず、定常確率過程を構成すると考えられるから、粒子の位置の統計的分散については、Taylor の古典的乱流拡散理論との相似性が考えられ、

$$[X'^2] = 2 \int_0^t (t - \tau) B_L(\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (10)$$

とすることができる。ここに、 $B_L(\tau) \equiv [v_x'(t)v_x'[(t+\tau)]]$ であり、Lagrange 的自己相関関数である。分散係数を統計的分散の時間微分の 1/2 で定義すると

$$\begin{aligned} D &\equiv \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} [X'^2] = \int_0^t B_L(\tau) d\tau \\ &= [v_x'^2] \int_0^t R_L(\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $R_L(\tau)$; Lagrange 的自己相関係数である。

以上のように、境界を有するせん断乱流場の混合現象においても、Taylor の古典的乱流拡散理論の見地からは Lagrange 的自己相関関数（係数）の関数形が重要な課題となる。

3. 数値実験の手法とその適用

3.1 数値実験法の概要

(2), (3)式で示される粒子の運動を離散化によって近似し、各成分について示すと、

$$\left. \begin{aligned} X^{n+1} &\equiv X^n + v_x(\mathbf{a}, n\Delta t) \cdot \Delta t \\ Y^{n+1} &\equiv Y^n + v_y(\mathbf{a}, n\Delta t) \cdot \Delta t \\ Z^{n+1} &\equiv Z^n + v_z(\mathbf{a}, n\Delta t) \cdot \Delta t \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} v_x(\mathbf{a}, n\Delta t) &\equiv \bar{u}_x\{(Y^n + Y^{n+1})/2, (Z^n + Z^{n+1})/2\} + u_x'(X^n, Y^n, Z^n, n\Delta t) \\ v_y(\mathbf{a}, n\Delta t) &\equiv u_y'(X^n, Y^n, Z^n, n\Delta t) \\ v_z(\mathbf{a}, n\Delta t) &\equiv u_z'(X^n, Y^n, Z^n, n\Delta t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

であり、上式にしたがって $t=n\Delta t$ 秒後の粒子位置を求めることができる。

(13)式の適用にあたっては、Euler 的乱れ成分 u_x', u_y', u_z' を模擬する必要があるが、本研究では、その研究目的より、簡単に、非等方ではあるが等質な乱流場を仮定し、日野の複号乱数モデル⁴⁾を用いて発生させるものとした。計算法自体は既にいくつかの研究^{4), 5), 6)}に使用され、それらに詳しく述べられているので、その概要及び適用にあたっての留意点についてのみ述べればつぎのようである。

このモデルでは、乱れ成分 u' は、寿命時間 τ_k 、乱れ強さ A_k の異なったいくつかの階級(ランク)の乱れ u_k の和としてモデル化され、

$$\left. \begin{aligned} u' &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ u_k &= A_k R_k \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (14)$$

である。ここに、 R_k ；平均値 0、分散 1 の正規乱数であり、下添字 k はランクを示している。各階級の乱れの寿命時間としては、等比級数モデルを用いるものとするれば、

$$\tau_k = \tau_0 (1/2)^k \cdots \cdots (15)$$

となる。 R_k を電子計算機を用いて擬似発生させることにより、(12)～(15)式より粒子の運動をシミュレーションし、その軌跡を追跡することができる。

計算にあたっては、ランク数は 6 としたが、主要な適用上の留意点は、以下のようである。

乱れ強さ； x 軸方向成分については、開水路流れにおける浅野の普遍関数表示⁷⁾を水深方向に平均化して得られる $\bar{u}^2/u_*^2 = 2.50$ とした。 y 軸、 z 軸成分については、乱流拡散係数と乱れ強さの関係

$$s = u'^2 T_L$$

を用いて、乱流拡散係数より求めることとした。ただし、 T_L としては、浅野が x 軸方向の T_L として示した式⁷⁾を水深方向に平均化して得られる $T_L/(d/u_*) = 0.72$ をすべての方向に適用した。

時間間隔；最小乱子(ここでは、第 6 ランクの乱子)の寿命時間が時間間隔を決定するが、実時間と適合させるためには、これを適切に定める必要がある。本研究では、後述の一樣流中の乱流拡散のシミュレーション結果より、 $\Delta t/(d/u_*) = 0.06$ と定めた。

境界条件；粒子が境界面にぶつかるときは、完全反射するものとし、乱れ速度及び各階級の乱子速度は、衝突前と反対符号を持つものとした。

粒子の追跡法；断面内の所定の点(二次元流れの場合は、 y 軸上の 10 点、三次元流れの場合には、矩形断面とし $y-z$ 面内の $200(=10 \times 20)$ 点から、1 つの粒子を放出し、所用のステップ数だけ追跡した後、同じ位置より所定の数だけ粒子の放出一追跡を行い、次に放出点を移動して追跡が終了後、統計解析を行った。なお、粒子数、ステップ数は実験ケースにより異なるが、400～2,000 個、2,000～8,000 ステップである。

3.2 数値実験の概要

数値実験を行う目的は、前述したように、せん断乱流場の混合現象における Lagrange 的統計量の特徴を明らかにすることであり、対数則則または指数則を有する 2 次元せん断乱流場、および局所平均流速の分布の非一様性が 2 次元的な矩形断面を有する 3 次元せん断乱流場を対象として、いくつかの乱れ強さの組合せについて行われている。なお、本研究で用いたシミュレーション法の妥当性を検証するために、一樣流中の乱流拡散実験、および Euler の乱流拡散方程式の数値解析も追加的に行われている。

数値実験の条件とその結果の概要は、後出の Table 2 に示されているが、結果の詳細な検討は次章で行うこととし、本節では、興味を中心となる局所平均流速の分布形の与え方、および予備数値実験の結果について述べる。

(1) 局所平均流速 $\bar{u}_x(y, z)$ の分布形；二次元せん断流における局所平均流速の分布形として、対数則

$$\frac{\bar{u}_x(y)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{y}{d} + 1 \right) + \frac{\bar{u}}{u_*} \cdots \cdots (16)$$

を与えた場合 (RUN L Series) と、指数則

$$\frac{\bar{u}_x(y)}{u_*} = 8.74 Re_*^{1/7} \left(\frac{y}{d} \right)^{1/7} \quad \left(Re_* = \frac{u_* d}{\nu} \right) \quad \dots\dots\dots (17)$$

を与えた場合 (RUN P Series) の 2 種の数値実験を行った。対数則を用いた場合、 $y/d \rightarrow 0$ で、 $\bar{u}_x(y)/u_* \rightarrow -\infty$ となるが、 $\bar{u}_x(y)/u_* < 0$ のときは、 $\bar{u}_x(y)/u_* = 0$ とし、カルマン定数は、 $\kappa = 0.4$ 、断面平均流速は、 $\bar{u}/u_* = 20$ とした。また、指数則を用いた場合は、 $\bar{u}/u_* = 20$ に相当する $Re_* = 836$ (RUN-P10) と、 $Re_* = 400$ (RUN-P20) の双方を行った。

一方、3 次元せん断乱流場の局所平均流速の分布形は、2 次元せん断乱流場と異なり、その一般的表示は、明らかではなく、ここでは、2 次元せん断乱流場との対比を明確にするため、断面は矩形とし、次のような分布形を仮定した (RUN 3 Series)。

$$\frac{\bar{u}_x(y, z)}{u_*} = \frac{\bar{u}^y(z)}{u_*} + \frac{u_{yz}''(y)}{u_*} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{u_{yz}''(y)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{y}{d} + 1 \right) \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}^y(z)}{u_*} &= \frac{1}{\kappa_z} \ln \frac{|z|}{B} + C_z & \left(\zeta_1 \leq \frac{|z|}{B} \leq 0.5 \right) \\ &= \frac{1}{\kappa_z} \ln \zeta_1 + C_z & \left(0 < \frac{|z|}{B} \leq \zeta_1 \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 B ：幅、 d ：高さである (Fig. 1)。(18)~(20)式で表示される分布形は、局所平均流速の y 軸方向の分布形は z に依存せずその平均値 ($=\bar{u}^y(z)/u_*$) について一様に対数則(19)式で与えられ、その平均値は、(20)式に示されるように側壁付近で対数則を、流心付近で一様となるような分布形である。カルマン定数は、2 次元流れと同じく $\kappa = 0.4$ とし、 κ_z 、 C_z の値は著者らの開水路流れにおける移流分散実験時の流速分布の測定例 (RUN122)⁹⁾ を参考に、 $1/\kappa_z = 1.87$ 、 $C_z = 20.2$ 、 $\zeta_1 = 0.325$ とし、アスペクト比 $B/d = 16.8$ とした。想定された $\bar{u}^y/u_*$ の分布形を Fig. 3 に示す。

(2) 一様流中における乱流拡散実験 (RUN-U10)；局所平均流速 $\bar{u}_x(y, z) = 0$ の境界のない等質、等方な二次元乱流場を対象として、粒子を 1 点より 2,000 個放出し、前述のモデルにより、乱流拡散実験を行った。Fig. 4 にステップ数と統計的分散の関係を示した。統計的分散は、Taylor の乱流拡散理論に示されるように、 $n \rightarrow \infty$ で、線形的な成長となる。この勾配より求められる拡散係数は $D \approx 0.11 d^2 / \Delta t$ 程度である。与え

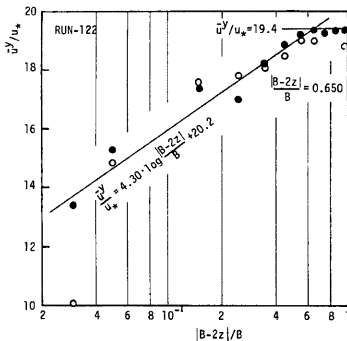


Fig. 3 Lateral distribution of depth-wise average velocity.

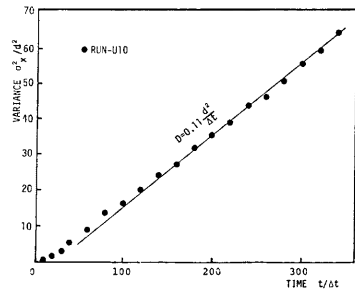


Fig. 4 Growth of variance in uniform turbulent flows.

られた乱れ強さ $u'^2/u_*^2=2.50$, Integral Time Scale $T_L/(d/u_*)=0.72$ より得られる拡散係数は $D/du_*=1.80$ であり, これより, $\Delta t/(d/u_*)=0.06$ 程度とすることができ。以下の解析では, すべて $\Delta t/(d/u_*)=0.06$ として換算した。

(3) 乱流拡散方程式の解との比較 (RUN-L30)⁹⁾; シミュレーションモデルの妥当性を検証するために, 対数則を有する2次元せん断乱流場に, 線源としてトレーサが投入された場合を考え, Euler の乱流拡散方程式の数値解析を行い, 前述の Lagrange 的シミュレーションで得られた結果と比較した。

二次元流れの場合, Euler の乱流拡散方程式は, つぎのように書かれる。

$$-\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_x(y) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots(21)$$

ここに, $\bar{c}$; 時間平均濃度, ϵ_x, ϵ_y ; 各々 x 軸, y 軸方向の乱流拡散係数である。局所平均流速 $\bar{u}_x(y)$ の分布形としては, 対数則

$$\frac{\bar{u}_x - \bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{y}{d} + 1 \right) \quad \left(\eta = \frac{y}{d} \right) \quad \dots\dots\dots(22)$$

に従って, y 軸上の14点に与えた。乱流拡散係数としては $\epsilon_x/du_* = 1.80$ とし, ϵ_y は, Reynolds 相似 ($\epsilon_y/du_* = \kappa\eta(1-\eta)$) で与えた実験 (RUN-E310) と, その平均値 ($\epsilon_y/du_* = \kappa/6$) で与えたもの (RUN-E300) との双方で行った。初期条件は, $-0.1 \leq \xi \leq 0.1$ ($\xi = x/d$) で $\bar{c} = C_0$ とした。なお, 数値計算法としては, ADI 法を用いた。

Lagrange の数値実験, Euler の数値実験の双方で得られた分散係数, および Elder の理論的解析法を適用した結果を比較して示すと, Table 1 のようである。分散係数は, Lagrange の数値実験により得られたものの方が若干大くなるが, 統計的分散の挙動を比較した Fig. 5, および濃度波形を比較した Fig. 6 より, このような Lagrange の数値実験法により分散雲の挙動の特性は十分表現されうものと考えられよう。

4. Lagrange の特性量に関する考察

数値実験によって得られた統計量は, 条件として与えられた乱れ強さとともに, Table 2 にまとめられている。なお, 自己相関係数, 乱れ強さの計算にあたっては, 放出された粒子のうちのいくつか (5~40個) を抽出し, その各々について時系列解析を行った後, あらためて粒子個数により平均化操作して得られた値を用いている。

4.1 乱れ強さ; $[v_x'^2]/u_*^2$

数値実験により得られた値を Table 2 (7) 欄に, (6) 式によって計算された値を (5) 欄に示した。両者の値はよく一致しており, 境界を有するせん断乱流場における主流方向の Lagrange の乱れ強さは

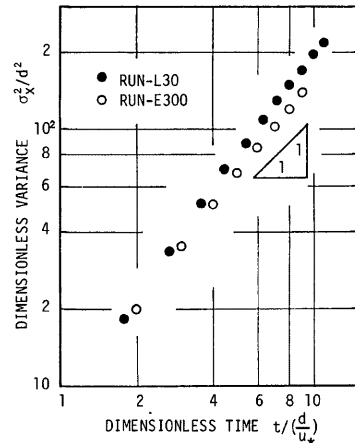


Fig. 5 Comparison of growth of variance by means of Lagrangian and Eulerian simulations.

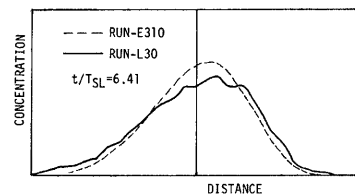


Fig. 6 Comparison of cross-sectional mean concentration by means of Lagrangian and Eulerian simulations.

Table 1 Comparison of results by means of Lagrangian and Eulerian simulations.

	CONDITION				DISPERSION COEFFICIENT	
	(1) ε_x/du_*	(2) ε_y/du_*	(3) $u_x'^2/u_*^2$	(4) $u_y'^2/u_*^2$	(5) D/du_*	(6) D/du_*
RUN-E300	1.80	$\kappa/6$	—	—	8.70	8.75
RUN-E310	1.80	$\kappa\eta(1-\eta)$	—	—	8.43	8.11
RUN-L30	—	—	2.50	0.0926	11.80	8.75

NOTATIONS: (5); Simulated, (6); Elder's Analysis

Table 2 Condition and summary of results by Lagrangian simulations.

RUN NO.	FLOW CONDITION				THEORETICAL RESULTS		SIMULATED RESULTS			
	(1) $u_x'^2/u_*^2$	(2) $u_y'^2/u_*^2$	(3) $u_z'^2/u_*^2$	(4) $\bar{u}/u_*$	(5) $\frac{1}{\Lambda} \int (u''^2 + \frac{1}{\bar{u}^2})/u_*^2 dA$	(6) T_F/d_{u_*}	(7) $[v_x'^2]/u_*^2$	(8) D/du_*	(9) T_{SL1}/d_{u_*}	(10) T_{SL2}/d_{u_*}
RUN-U10	2.50	—	—	0.0	—	—	2.50	1.80	0.720	—
RUN-L10	2.50	0.383	—	20.0	8.75	0.245	8.23	5.45	0.660	0.793
RUN-L20	0.00	0.383	—	20.0	6.25	0.245	5.82	3.61	0.625	0.692
RUN-L30	2.50	0.0926	—	20.0	8.75	1.013	8.41	11.80	1.403	1.878
RUN-L40	0.00	0.0926	—	20.0	6.25	1.013	6.40	10.00	1.560	1.655
RUN-L50	2.50	2.50	—	20.0	8.75	0.037	8.43	2.87	0.340	0.326
RUN-L60	2.50	0.276	—	20.0	8.75	0.338	7.84	6.05	0.770	0.507
RUN-P10	2.50	0.0802	—	20.0	8.85	1.17	8.31	13.90	1.670	—
RUN-P20	2.50	0.0891	—	18.0	7.64	1.05	7.23	11.70	1.620	—
RUN-3A	2.50	0.0926	0.208	19.0	12.68	31.7	11.1	102.0	9.19	6.26
RUN-3B	2.50	0.0926	0.417	19.0	12.68	15.8	11.1	65.0	5.86	4.42

NOTATIONS; U Series; Uniform Flow, L Series; Log-law ($\kappa=0.4$), P Series; Power-law ($n=1/7$)
3 Series; Three Dimensional Flow (5); Lumley's Formula, (6); Fischer's Formula,

$$(9); T_{SL1}=D/[v_x'^2], (10); T_{SL2}=\int_0^\infty R_L(\tau)d\tau$$

Euler の乱れ強さ ((1)欄) に比較して大きくなるとともに、その値は(6)式で与えられることが知られる。また、Euler 的乱れ成分が存在しないと仮定した時 (RUN-L20, L40) にも、Lagrange 的乱れは存在することが明らかである。

4.2 分散係数; D/du_*

(11)式によって定義される分散係数を Table 2 (8) 欄に示した。これらの結果により、分散係数は Euler 的な乱流拡散係数 ($\varepsilon_x=u'^2T_L$) に比較して大きくなるとともに、RUN-L10 と L20, RUN-L30 と L40 の分散係数値の違いより、乱流拡散係数(今の場合 $\varepsilon_x/du_*=1.80$) が加算的な量であることがわかる。さらに、 y 軸方向の乱れ強さとの関係を見ると、 $u_y'^2/u_*^2$ が小さいほど、分散係数値は大きくなっており (RUN-L10, L30, L50, L60), y 軸方向の乱れ強さが分散係数値に及ぼす影響の大きいことがわかる。また、対数則の場合と指数則の場合を比較すると、 $v_x'^2/u_*^2$, $u_y'^2/u_*^2$ がほぼ等しい RUN-L30, L40 と RUN-P10, P20 とでは、同じようにほぼ等しい分散係数値を得ている。

一方、3 次元的せん断乱流場において得られる分散係数は、前述の 2 次元的せん断乱流場におけるものよ

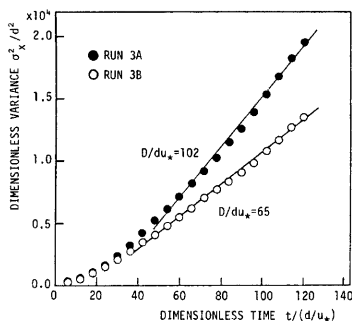


Fig. 7 Growth of variance in three-dimensional bounded turbulent shear flows.

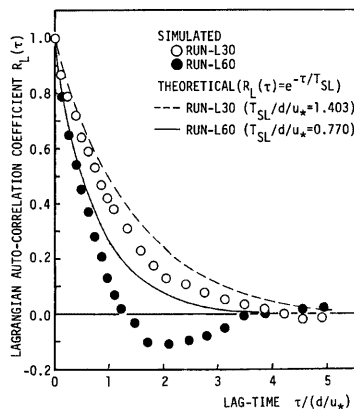


Fig. 8 Lagrangian auto-correlation coefficient in two-dimensional turbulent shear flows.

りも1段と大きくなっているとともに、 u_z^2/u_*^2 の値により大きく変化する (Fig. 7)。y 軸方向の流速分布形の同一な RUN L Series と RUN-3A, 3B との結果の比較より、z 軸方向における速度分布のわずかな非一様性の存在により、分散係数が非常に大きくなることがわかる。

4.3 自己相関係数: $R_L(\tau)$

Fig. 8 に二次元せん断乱流場における Lagrange の自己相関係数、また Fig. 9 に三次元せん断乱流場における Lagrange の自己相関係数を示している。関数形は、2 次元流れにおけるものが、指数関数形

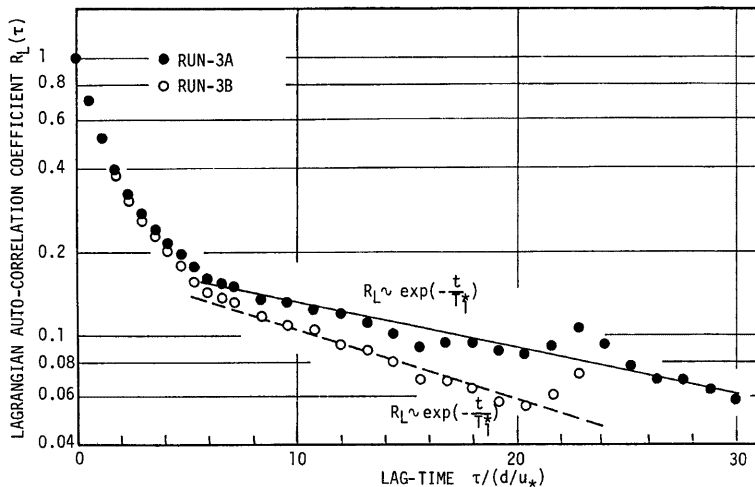


Fig. 9 Lagrangian auto-correlation coefficient in three-dimensional bounded turbulent shear flows.

$$R_L(\tau) = e^{-\tau/T_{SL}}$$

で比較よく近似できる¹⁰⁾のに対し、3次元流れにおける関数形はこれと異なり、長く尾をひく形¹¹⁾となり、片対数紙上にプロットした Fig. 9 にみられるように、遅れ時間により異なった半減期を有している。

4.4 Lagrangian Integral Time Scale; T_{SL}

Taylor の乱流拡散理論(11)式より、 $t \rightarrow \infty$ で分散係数は定数となり

$$D = [v_x'^2] T_{SL} \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$T_{SL} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t R_L(\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots(24)$$

となる。(23)式より逆算される T_{SL} を Table 2 (9) 欄に、また、(24)式より計算される T_{SL2} を(10)欄に示した。また、Fischer の混合時間スケール¹²⁾

$$T_F = \frac{1}{14.8} \frac{l^2}{\varepsilon}$$

より計算される値を(6)欄に示した。これらの値より2次元流れにおいては、(23)、(24)両式より計算される T_{SL} は良く一致し、 $T_{SL} \simeq d/u_*$ の値となる。また、Fischer の混合時間スケール T_F はこれらの値より幾分小さな値となるが良い近似値を与えている。

一方、3次元流れにおいては、(24)式で計算される T_{SL} は、(23)式より得られるものに比較して幾分小さな値となり、相関係数の計算法(この例では、 $y/d=0.5$ 上の $0.025 \leq |z|/B \leq 0.5$ の20点より放出された20個の粒子の8,000 stepの時系列より求められている)に検討の余地があるが、2次元流れのそれに比較して極めて大きくなっている。また、 T_F は、2次元流れの場合と異なり、 T_{SL} に比較して大きな値となっている。

4.2で述べた分散係数値、および上述の結果より、せん断乱流場における分散係数は、Lagrange 的変動速

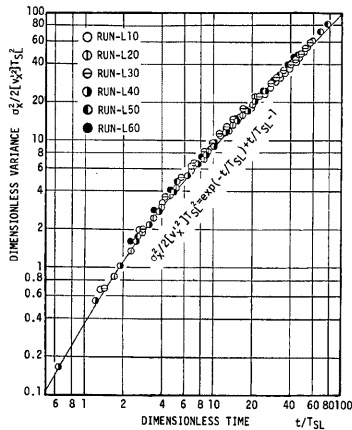


Fig. 10 Behavior of variance in two-dimensional bounded turbulent shear flows.

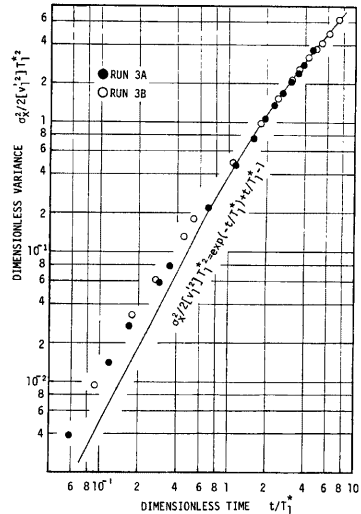


Fig. 11 Behavior of variance in three-dimensional bounded turbulent shear flows.

Table 3 Properties of Lagrangian velocity fluctuation in three-dimensional turbulent shear flows.

RUN NO.	(1) $[v_x'^2]/u_*^2$	(2) $[v_i'^2]/u_*^2$	(3) $[v_v'^2]/u_*^2$	(4) $[v_i'^2]/u_*^2$	(5) $T_i^*/\left(\frac{d}{u_*}\right)$	(6) $T_F/\left(\frac{d}{u_*}\right)$
RUN-3A	12.68	2.50	6.25	3.93	26.0	31.8
RUN-3B	12.68	2.50	6.25	3.93	16.6	15.8

度の強さもさることながら, Lagrangian Integral Time Scale の変化の影響を強くうけて分散係数値の違いとなってあらわれることがわかる。すなわち, **Table 2** (2), (3) 欄と T_{SL} の比較, および前述したように Lagrange 的変動速度が主として粒子の断面内における位置に依存するものであることより, 粒子位置を決定する y 軸あるいは z 軸方向の乱れ強さにより T_{SL} が変化し, 分散係数が変化することがわかる。

4.5 統計的分散; $[X'^2] = \sigma_X^2$

乱流拡散理論との相似性より, 統計的分散の挙動は(10)式で示される。自己相関係数として, 前述の指数関数近似が適用されるものとする(10)式は,

$$\frac{\sigma_X^2(t)}{2[v_x'^2]T_{SL}^2} = \frac{t}{T_{SL}} - 1 + \exp\left(-\frac{t}{T_{SL}}\right) \quad \dots\dots\dots (26)$$

と無次元化して表現される。2次元せん断乱流場における実験値を **Table 2** (7) 欄, (9) 欄の $[v_x']$, T_{SL} で無次元化して両対数紙上にプロットし, (26)式の関係を調べたものが **Fig. 10** である。(26)式が極めてよく成立していることがわかる。

一方, 3次元せん断乱流場においては, 前述したように必ずしも相関係数の指数関数近似は適当ではなく, ここでは, 著者らが開水路流れにおけるトレーサ実験において, 水深方向に平均化された流速 $\bar{u}^y(z)$ の分布の非一様性に注目して得た関係式⁸⁾

$$\frac{\sigma_X^2(t)}{2[v_i'^2]T_i^{*2}} = \frac{t}{T_i^*} - 1 + \exp\left(-\frac{t}{T_i^*}\right) \quad \dots\dots\dots (27)$$

を検討する。ここに, $[v_i'^2] = \frac{1}{B} \int_{-B/2}^{B/2} (\bar{u}^y(z) - \bar{u})^2 dz$, $T_i^* = D/[v_i'^2]$ であり, RUN-3A, 3B におけるこれらの値は, **Table 3** に示されている。RUN-3A, 3B における(27)式の関係を示したものが **Fig. 11** であるが, $t/T_i^* \geq 1$ でよい近似を与えている。また, 前述の T_F と T_i^* の関係 (**Table 3**) をみると, 比較的良好に一致していることもわかる。

これらのことより, 3次元せん断乱流場における混合現象においては, y 軸方向に平均化された局所平均流速の z 軸方向の非一様性, および z 軸方向の乱れ強さが大きな影響を及ぼしていると考えられる。

5. 結 言

境界を有するせん断乱流場における混合現象を Lagrange 的に取扱い, 数値実験を行うことにより, Lagrange 的変動速度の強さ, 自己相関係数, 分散係数, Lagrangian Integral Time Scale 等の Lagrange 的特性量を計測するとともに, Euler 的速度場との関係について考察した。本研究で対象とされた流れの場は, 理想化して単純化されたものではあるが, 2次元せん断乱流場における Lagrange 的特性量と3次元せん断乱流場におけるそれらが, 相当異なっていることが明らかにされた。すなわち

(1) 自己相関関数形は, 2次元流れの場合は指数関数形で近似できるのに対し, 3次元流れの場合はそれと異なり, 後半部に長く尾を引き, その減衰はきわめて遅くなる。

(2) Lagrangian Integral Time Scale は, 2次元流れの場合 $T_{SL} \simeq d/u_*$ 程度の値であるのに対し,

三次元流れの場合は相当大きな値となる。

(3) 分散係数は、3次元流れの場合、2次元流れに比較して相当大きな値となるが、この主因が、上述の Lagrangian Integral Time Scale の相違によるものであることが、自己相関係数より直接 Time Scale を求めることにより確認された。

(4) 統計的分散の挙動については、2次元流れの場合は Lagrangian Integral Time Scale によって規定されるのに対し3次元流れの場合は、横方向の混合時間スケールによって規定され、これは必ずしも上述の Lagrangian Integral Time Scale と一致しない。

(5) 3次元流れにおける混合現象においては、横断方向の速度分布の非一様性ならびに乱れ強さが重要となる。

本研究で対象とした3次元局所平均流速の分布形は、ただ1種であり、アスペクト比や断面形状の違い等により分布形は相当異なってくるものと考えられ、今後、いくつかの流速分布形を対象として実験を行い、結果の確認を得ることが必要であろう。また、我々が最終的な目標とするのは、開水路流れにおける混合現象の解明であるが、実際の速度場は相当複雑であり、本研究で対象としたような単純なものではなく、このような単純化されたモデルでどの程度実際現象が再現できうるのか検討する必要もあろう。

最後に、本研究をすすめるにあたり、数値実験結果の整理に御協力頂いた大学院生戸田圭一氏を始めとする京都大学工学部河川工学研究室の学生諸氏に深甚の謝意を表します。

本研究の一部は文部省科学研究費の補助を受けて行われたものであることを付記する。

参 考 文 献

- 1) Taylor, G. I.: Diffusion by Continuous Movements, Proc. London Math. Society, A20, 1921, pp. 196~214.
- 2) Taylor, G. I.: The Dispersion of Matter in Turbulent Flow through a Pipe, Proc. Royal Society of London, A223, No. 155, 1954, pp. 446~468.
- 3) Tennekes, H. and Lumley, J. L.: Turbulent transport, in A First Course in Turbulence, The MIT Press, 1978, pp. 223~247.
- 4) 日野幹雄: モンテカルロ法による乱流拡散の二、三の計算について, 第9回水理講演会講演集, 1965 pp.67-72.
- 5) 林泰造, 岩崎光隆: 拡散シミュレーションと数値実験, 第19回水理講演会論文集, 1975, pp.167-172.
- 6) 住友恒: 水質変化のシミュレーション, 合田健編水質工学応用編, 丸善, 1976, pp.258~272.
- 7) 浅野富夫: 開水路流れにおける乱れの時空間構造に関する研究, 京都大学学位論文, 1980.
- 8) 藁師寺公文, 岩佐義朗, 綾史郎, 戸田圭一: 開水路流れにおける分散雲の挙動に関する実験的研究, 第37回土木学会年次学術講演会講演概要集 (投稿中), 1982.
- 9) 西川秀昭, 岩佐義朗, 綾史郎: 二次元せん断乱流場における混合過程の数値シミュレーション, 第36回土木学会年次学術講演会講演概要集, 1981. pp.477~478.
- 10) Sullivan, P. J.: Longitudinal Dispersion within a Two-dimensional Turbulent Shear Flow, J. Fluid Mechanis, Vol. 49 part 3, 1971, pp. 551~576.
- 11) 松岡謙, 岩井重久: 分散係数の測定法とその問題点, 第32回土木学会年次学術講演会講演概要集, 1977, pp.454~455.
- 12) Fischer, H. B.: Longitudinal Dispersion in Laboratory and Natural Streams, Report No. KH-R-12, California Institute of Technology, 1966.