

"Oscillating" long-range potential を持つ Schrödinger
作用素に対する radiation condition と極限吸収

名工大 望月 清

京工繊大 内山 淳

§ 1 今迄の結果

$\mathbb{R}^n$ (外部領域でもよい) における Schrödinger 作用素

$$L = -\Delta + V(x)$$

を考える。potential $V(x)$ は実数値函数である。我々の目的
は $V(x)$ に制限を加えて L のスペクトルの性質をできるだけ詳
しく調べることである。以下問題1～問題5を考える。

問題1 L は selfadjoint か?

今迄の結果 次のことを仮定する。

条件1 ある $\mu > 0$ に対して $V(x) \in Q_\mu$ (Stummel class) と

$$\text{する。即ち } \begin{cases} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{|x-y| < 1} |x-y|^{-n+4-\mu} |V(y)|^2 dy < +\infty & (n \geq 4) \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{|x-y| < 1} |V(y)|^2 dy < +\infty & (n \leq 3) \end{cases}$$

とする。このとき

$$\begin{cases} \mathcal{D}(L) = H^2(\mathbb{R}^n) \\ Lu = -\Delta u + V(x)u \text{ for } u \in \mathcal{D}(L) \end{cases}$$

1/)

によって Hilbert space $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ での Schrödinger 作用素 L を定義すると, L は下に半有界な自己共役作用素となる。

問題2 L の essential spectrum $\sigma_e(L)$ はどうなっているか?

今迄の結果 $V(x) = o(1)$ ($|x| = r \rightarrow \infty$) とすると $\sigma_e(L) = [0, \infty)$.

問題3 L の continuous spectrum $\sigma_c(L)$ と $\sigma_e(L)$ との関係はどうなっているか?

今迄の結果 次のことを仮定する。

条件2 $-\Delta + V(x)$ に対して unique continuation property が成り立つ。

このとき,

(a) $V(x) = o(r^{-1})$ なら $\sigma_c(L) \equiv (0, \infty)$ である。(Kato)

(b) $V(x) = o(1)$, $\partial_r V(x) = o(r^{-1})$ なら $\sigma_c(L) \supset (0, \infty)$ である。(Odch)

問題4 L の絶対連続スペクトル $\sigma_{ac}(L)$ と $\sigma_c(L)$ は一致するか?

今迄の結果

(a) $V(x) = O(r^{-1-\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$) (short-range) のときは肯定的である。(Jäger, Agmon, Kuroda, Saito, Mochizuki).

(b) $V(x) = O(r^{-\varepsilon})$, $\partial_r V(x) = O(r^{-1-\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$) (non-oscillating long-range) のときも肯定的である。(Ikebe-Saito, Lavine).

問題5 L の絶対連続部分と $L_0 = -\Delta$ とは unitary

equivalent か? 即ち $\mathcal{H}_{ac}$ から $\hat{\mathcal{H}}_0 = L^2((0, \infty); L^2(S^{n-1}))$ への unitary operator $\mathcal{F}_{\pm}$ が存在して $\mathcal{F}_{\pm} L = \lambda \mathcal{F}_{\pm}$ (diagonalize) となるか?

今迄の結果

(a) $V(x) = O(r^{-1-\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$) のときは肯定的である。(Jäger, Agmon, Kuroda, Saito, Mochizuki).

(b) $\nabla^k V(x) = O(r^{-k-\varepsilon})$ $k=0, 1, \dots, m$ ($\varepsilon > \frac{1}{2}$ のときは $m=2, \frac{1}{2} > \varepsilon > 0$ のときは $m > \frac{2}{\varepsilon}$) のときも肯定的である。(Ikebe, Saito, Agmon).

§ 2 oscillating long-range potential に対する注意

$$V(x) = O(r^{-\varepsilon}), \nabla V = O(r^{-1-\varepsilon}), \dots, \nabla^k V = O(r^{-k-\varepsilon}) \quad (\varepsilon > 0) \quad (r \rightarrow \infty)$$

のとき $V(x)$ は通常 long-range potential といわれているが、以後これを non-oscillating long-range potential と呼ぼう。というのは以下の potential は上の仮定をみたさないからである。

$V(x) = (\log r)^{-1}$ のときには $\partial_r V = O(r^{-1}), \partial_r^2 V = O(r^{-2}), \dots, \partial_r^k V = O(r^{-k})$ であり

$V(x) = \sin(\log r)$ のときには $\partial_r V = O(r^{-1}), \partial_r^2 V = O(r^{-2}), \dots, \partial_r^k V = O(r^{-k})$ である。また

$$V(x) = \frac{\sin br}{r} \quad (b \neq 0 \text{ は定数}) \text{ のときには, } \partial_r V = \frac{b \cos br}{r} - \frac{\sin br}{r^2} = O(r^{-1}),$$

$$\partial_r^2 V = -\frac{b^2 \sin br}{r} - \frac{2b \cos br}{r^2} + \frac{2 \sin br}{r^3} = O(r^{-1}), \dots, \partial_r^k V = O(r^{-1}),$$

である。これらは次の条件をみたすことがわかる。

条件 3 $V(x) = O(1), \partial_r V = O(r^{-1})$

条件 4 ある定数 $a \geq 0$ と $\delta_1 > 0$ で $\partial_r^2 V + aV = O(r^{-1-\delta_1})$ である。

(3.)

これらの条件をみたす potential は oscillating long-range ということにする。

§3 問題3に関して

以下の § では条件1と条件2は仮定する。[1]の結果を述べる。条件3のもとでは、

$$E(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \limsup_{r \rightarrow \infty} \{ r \partial_r V(x) + \lambda V(x) \}$$

とおくと $E(\lambda) < \infty$ である。

Lemma $E(\lambda)$ は $\lambda > 0$ の単調非増大、連続函数であって、

$E(\lambda) \geq \limsup_{r \rightarrow \infty} V(x)$ である。

Theorem 1 $(-\Delta + V(x) - \lambda)u = 0$, $\lambda > E(2)$ の解 $u \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ に対し, $\lambda > E(\lambda) \geq E(2)$ かつ $\liminf_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{\lambda}{2}} \int_{|x|=r} (|\partial_r u|^2 + |u|^2) dS = 0$ をみたす $\lambda > 0$ が存在すれば $u \equiv 0$ である。

Cor. $\sigma_c(L) \supset (E(2), \infty)$

Remark non-oscillating long-range potential に対しては、

すべての $\lambda > 0$ に対して $E(\lambda) = 0$ である。よって任意の $\lambda > 0$ に対してある $\varepsilon > 0$ で、 $\liminf_{r \rightarrow \infty} r^\varepsilon \int_{|x|=r} \{ |\partial_r u|^2 + |u|^2 \} dS = 0$ ならば $u \equiv 0$ という Agmon, Simon の結果を得る。

Remark 条件3をみたしてはいなくても、ある $\lambda > 0$ で $E(\lambda) < \infty$ となる potential (多体問題の場合) に対しては、Theorem 1 が適用できる。

§4 問題4に関して

(4)

ここでは[2]の結果を述べる。以下では条件3と条件4の他に次のことを仮定する。

条件5 $(\nabla - \tilde{x} \partial_r) V(x) = O(r^{-\delta_2})$ ($\delta_2 > 0$, $\tilde{x} = x/\rho_1$)

条件6 $(\nabla - \tilde{x} \partial_r) \partial_r V(x) = O(r^{-\delta_3})$ ($\delta_3 > 0$)

$\sigma > 0$ に対して

$$\Lambda_\sigma = E(\min\{4\sigma, 2\}) + \frac{a}{4}$$

とおくと次のことが成り立つ。

Theorem 2 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$ とおくと $\sigma_{ac}(L) \supset (\Lambda_\delta, \infty)$ である。

Remark 一般に $\Lambda_\delta \geq E(2)$ である。また $a=0$ かつ $\delta > 1/2$ なら $\Lambda_\delta = \Lambda_{1/2} = E(2)$ である。

この定理の証明の概要を述べよう。 $L = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$ とすると、
 $\forall e \in (E(2), \infty)$ 及び $\forall f, g \in \mathcal{H}$ に対し、

$$(E(e)f, g) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_e^\infty \{R(\lambda + i\varepsilon)f - R(\lambda - i\varepsilon)f\}, g) d\lambda$$

である。ここで $R(\zeta) = (L - \zeta)^{-1}$ ($\zeta = \lambda \pm i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$) である。

従って $\mathcal{H}$ で dense な集合に属する f に対して、

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} R(\lambda \pm i\varepsilon)f = R(\lambda \pm i0)f$$

が適当な意味で存在すれば、スペクトルの絶対連続性がわかる。もちろん $\mathcal{H}$ での極限は一般には存在しない。そこで次の weighted L^2 -space を導入する。 $\nu \in \mathbb{R}'$ に対し、

$$L_\nu^2 = \{f \mid (1+r)^\nu f \in \mathcal{H}\} \quad \text{とおく。}$$

すると $\nu > 0$ に対して $L^2_{-\nu} \cap \mathcal{H} \cap L^2_{\nu}$ で $L^2_{\pm\nu}$ は $\mathcal{H}$ で dense である。今 $f(x) \in L^2_{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ が与えられたとき

$$(L - \zeta)u = (-\Delta + V(x) - \zeta)u = f \quad (\zeta = \lambda \pm i\varepsilon, \varepsilon \geq 0)$$

の解 $u = R(\lambda \pm i\varepsilon)f \in L^2_{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ を求めよう。(但し $\alpha, \beta \geq 0$)。上の方程式の解の uniqueness を保証するために、通常 radiation condition が置かれる。それを考えるために、上の方程式を次のように変形する。

$$-e^{-P}\Delta(e^Pu) + 2\nabla P \cdot e^{-P}\nabla(e^Pu) + (V - \zeta + \Delta P - (\nabla P)^2)u = f。$$

ここで $P = P(x, \zeta)$ は複素数値函数である。一般に $\alpha + \beta \leq 2\delta$ なら $u \in L^2_{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ に対し $O(r^{-1-\delta})u \in L^2_{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ が成り立つことに注目して

$$(*) \quad V - \zeta + \Delta P - (\nabla P)^2 = O(r^{-1-\delta})$$

という方程式を考える。この方程式の解 P に対して

$$u \in L^2_{\frac{\alpha+\beta}{2}}, \quad \nabla u + (\nabla P)u = e^{-P}\nabla(e^Pu) \in L^2_{\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

が通常の radiation condition であるようである。例えば V が short-range potential のときは、

$$P = -i\sqrt{\zeta}r + \frac{n-1}{2}\log r \quad (\operatorname{Im}\zeta \geq 0)$$

とおけば

$$\nabla P = -i\sqrt{\zeta}\tilde{x} + \frac{n-1}{2r}\tilde{x}, \quad \Delta P - (\nabla P)^2 - \zeta = \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}$$

だから (*) をみたす。

また,

$$-2\sqrt{\xi} \partial_r Y + (\nabla Y)^2 + V(x) = O(r^{-1-\delta}) \quad (\text{Eikonal 方程式の一種})$$

$$\partial_r Y = O(r^{-\delta}), \quad \Delta Y = O(r^{-1-\delta})$$

をみたす $Y = Y(x, \xi)$ に対しては,

$$p = -i\sqrt{\xi} r + \frac{n-1}{2} \log r + iY$$

とおけば,

$$\nabla p = \left(-i\sqrt{\xi} + \frac{n-1}{2r}\right) \tilde{x} + i\nabla Y,$$

$$V - \xi + \Delta p - (\nabla p)^2 = \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} - 2\sqrt{\xi} \partial_r Y + (\nabla Y)^2 + V + i(\Delta Y \cdot \frac{n-1}{r} \partial_r Y) = O(r^{-1-\delta})$$

だから, $(*)$ をみたしてゐる。ところで, $(*)$ は,

$$(**) \quad V - \xi + \nabla \cdot \vec{k} - \vec{k}^2 = O(r^{-1-\delta})$$

$$(***) \quad \vec{k} = \nabla p$$

と同値である。今 $\vec{k} = \tilde{x} k(x, \xi)$ ($k(x, \xi)$ は複素数値函数) とお

くと, $(**)$ は次の Riccati 型の方程式になる。

$$(*) \quad V - \xi + \partial_r k + \frac{n-1}{r} k - k^2 = O(r^{-1-\delta}).$$

また $(\nabla - \tilde{x} \partial_r) k = O(r^{-1-\delta})$ とすると,

$$p = \int^r k(s\tilde{x}, \xi) ds$$

とおけば,

$$\partial_r p = k(x, \xi), \quad (\nabla - \tilde{x} \partial_r) p = \frac{1}{r} \int_0^r [(\nabla - \tilde{x} \partial_r) k](s\tilde{x}, \xi) s ds = O(r^{-\delta})$$

となり $\vec{k} = \tilde{x} k$ は $(***)$ の近似解となる。さて radiation condition と Theorem 1 とを結びつけるために, α, β に制限を加えよう。

(7.)

以下 $e \in (\lambda_\delta, \infty)$ とし, $\gamma(e)$ を次のように定める。

$$0 < \gamma(e) < \min\{4\delta, 2\} \quad \text{かつ} \quad E(2) \leq E(\gamma(e)) < \min\{\lambda \in e\}.$$

すると $\gamma(e)$ は Th.1 の条件 $\forall \lambda \in e$ に対してみたしている。今

$\alpha = \alpha(e) > 0, \beta = \beta(e) > 0$ を次の条件をみたすようにとる。

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\gamma(e) \leq \beta < 2\delta, & \beta \leq 1 \\ 0 < \alpha \leq 2\delta - \beta, & \alpha \leq \beta. \end{cases}$$

そこで $\delta > \frac{1}{2}$ のとき $\beta = 1$ と取り, $\alpha > 0$ も e に indep. に取れること ε 注意しておく。

さて, $\zeta = \lambda \pm i\varepsilon$ ($\lambda \in e, \varepsilon \geq 0$) に対して

$$\begin{cases} k(x, \zeta) = -i\sqrt{\zeta - \eta V(x)} + \frac{n-1}{2r} + \frac{-\eta \partial_r V(x)}{4(\zeta - \eta V(x))} \\ \eta = \frac{4\zeta}{4\zeta - a} \end{cases}$$

とおくと次のことが成り立つ。

Lemma $K^\pm = \{\lambda \pm i\varepsilon \mid \lambda \in e, 0 \leq \varepsilon \leq 1\}$ に対してある $R_1 = R_1(K^\pm) > 0$ が存在して,

$$(1) \quad |V - \zeta + \partial_r k + \frac{n-1}{r}k - k^2| \leq Cr^{-1-\delta}$$

$$(2) \quad |k(x, \zeta)| \leq C$$

$$(3) \quad \mp \operatorname{Im} k(x, \zeta) \geq C$$

$$(4) \quad \operatorname{Re} k(x, \zeta) + \frac{n-1}{2r} \geq Cr^{-1}$$

$$(5) \quad |(\nabla - \hat{x}\partial_r)k(x, \zeta)| \leq Cr^{-1-\delta}$$

が, $(x, \zeta) \in B(R_1) \times K^\pm$ ($B(R_1) = \{x \mid |x| > R_1\}$) に対して成り立つ。

ここで次のことを用いてゐる。

Prop. 1 $a > 0$ のとき $V(x) = O(r^{-1})$ である。

さて, radiation condition を定義する。

Definition $\zeta \in K^\pm$ とする。 $(-\Delta + V(x) - \zeta)u = f(x)$ の解 $u \in H_{loc}^2$ が radiation condition をみたすとは

$$u \in L^2_{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad \partial_r u + k(x, \zeta)u \in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$$

のときをいう。 radiation condition をみたす解 u は $\zeta \in K^+$ または $\zeta \in K^-$ に応じて outgoing solution または incoming solution という。

Prop. 2 $\varepsilon > 0$ のとき outgoing (incoming) solution は $\mathcal{H}$ に属するから唯一つで $u = R(\lambda \pm i\varepsilon)f$ となる。

Prop. 3 $\varepsilon = 0$ のときも outgoing (incoming) solution は高々一つである。

これは $(-\Delta + V(x) - \lambda)u = 0$ で u が radiation condition をみたすとするとき, β の取り方に注意すれば,

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{\gamma(\varepsilon)}{2}} \int_{|x|=r} |u|^2 dS \leq C \liminf_{r \rightarrow \infty} r^\beta \int_{|x|=r} |\partial_r u + ku|^2 dS = 0$$

となるからである。

Prop. 4 (a priori estimate) $\zeta \in K^\pm$ とし, $(-\Delta + V(x) - \zeta)u = f \in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ の解 $u \in H_{loc}^2$ は radiation condition をみたすとする。すると

$$(A) \quad \|u\|_{\frac{1-\alpha}{2}, B(R)} \leq CR^{-\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{\frac{1+\beta}{2}} \quad (\forall R > R_1)$$

$$(B) \quad \|\nabla u + \tilde{x}k(x, \zeta)u\|_{\frac{1+\beta}{2}, B(R_1)} \leq C\|f\|_{\frac{1+\beta}{2}}$$

$$(C) \quad \|u\|_{\frac{1+\beta}{2}} \leq C \|f\|_{\frac{1+\beta}{2}}.$$

Prop. 5 (極限吸収) $f \in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ に対し $u_{\pm} = R(\lambda \pm i0)f = s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} R(\lambda \pm i\varepsilon)f$ in $L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ が存在する。

Prop. 6 $R(\zeta)f \in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ は $(\zeta, f) \in \mathbb{R}^+ \times L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ に関し連続である。

Prop. 7 $f \in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}, g \in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ に対し

$$(\mathcal{E}(e)f, g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} (R(\lambda + i0)f - R(\lambda - i0)f, g) d\lambda$$

となる。

これより Th. 2 が導かれる。

例 11.

(1) $V(x) = (\log r)^{-1}$ のときは $a=0, \delta=1$ で $E(2) = \Lambda_{\delta} = 0$ である。

(2) $V(x) = \sin(\log r)$ のときは $a=0, \delta=1$ で $E(2) = \Lambda_{\delta} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ である。

(3) Moros-Tuan の例 11 では $V(x) = \frac{4k \sin 2kr}{r} + O(r^{-2})$ ($k > 0$ は定数)

である。このとき $\lambda = k^2$ は固有値である。 $a = 4k^2, \delta = 1$ 故に

$E(2) = 4k^2, \Lambda_{\delta} = 5k^2$ となる。

§5 問題 5 に関して

[3] の結果を述べる。

$\lambda \in \mathbb{C} \ll (\Lambda_{\delta}, \infty)$ とする。 $u \in L^2_{\frac{1+\beta}{2}} \ni f \in L^2_{\frac{1+\beta}{2}}$ に対する outgoing (incoming) solution とする。即ち $u = u(\lambda \pm i0) = R(\lambda \pm i0)f$ である。

Lemma 次の性質をもつ $r_p = r_p(\lambda, f) \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow \infty$) が存在する。

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{|x|=r_p} \{ r^{-\alpha} |u|^2 + r^{\beta} |\nabla u + \tilde{x} k(x, \lambda \pm i0) u|^2 \} dS = 0.$$

Lemma

$$\frac{1}{2\pi i} ([R(\lambda+i0)f - R(\lambda-i0)f], f) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} r_p^{n-1} \|(\lambda - \gamma V(r_p \cdot))^{-\frac{1}{2}} u(r_p \cdot, \lambda \pm i0)\|_{L^2(S^{n-1})}^2.$$

Definition

$$P(r, \lambda \pm i0) = \int_0^r k(s\tilde{x}, \lambda \pm i0) ds = \mp i \int_0^r \sqrt{\lambda - \gamma V(s\tilde{x})} ds + \frac{n-1}{2} \log r + \frac{1}{4} \log(\lambda - \gamma V(x)).$$

とおく。

$$\text{Prop. 8} \quad \frac{1}{2\pi i} ([R(\lambda+i0)f - R(\lambda-i0)f], f) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \|e^{P(r_p, \lambda \pm i0)} u(r_p \cdot, \lambda \pm i0)\|_{L^2(S^{n-1})}^2.$$

条件 7. 条件 4 ~ 条件 6 において $\delta > \frac{1}{2}$ とする。

Remark $\beta = 1$ と取れる。 $\alpha > 0$ も e に indep. に取れる。 $\Lambda_\delta = \Lambda_{\frac{1}{2}}$

である。

$$\text{Prop. 9} \quad \lambda > \Lambda_{\frac{1}{2}} \text{ とする。 } f \in L_1^2(\mathbb{R}^n) \text{ に対し } s\text{-}\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{P(r_p, \lambda \pm i0)} u(r_p \cdot, \lambda \pm i0) \text{ in } L^2(S^{n-1})$$

が存在し、その極限は $\{r_p\}$ の取り方に依らない。

Definition $\lambda > \Lambda_{\frac{1}{2}}$, $f \in L_1^2$ に対し

$$\mathcal{F}_\pm(\lambda)f = s\text{-}\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{P(r_p, \lambda \pm i0)} [R(\lambda \pm i0)f](r_p \cdot) \text{ in } L^2(S^{n-1})$$

とおく。

Lemma $\mathcal{F}_\pm(\lambda)f \in L^2(S^{n-1})$ は $(\lambda, f) \in (\Lambda_{\frac{1}{2}}, \infty) \times L_1^2$ に関し連続である。

Definition L_1^2 から $\hat{\mathcal{H}}_{\Lambda_{\frac{1}{2}}} = L^2((\Lambda_{\frac{1}{2}}, \infty); L^2(S^{n-1}))$ への作用素 $\mathcal{F}_\pm$ を

$$(\mathcal{F}_\pm f)(\lambda, \cdot) = [\mathcal{F}_\pm(\lambda)f](\cdot)$$

で定義する。

Theorem 3 $\mathcal{F}_\pm$ は $\mathcal{H}$ から $\hat{\mathcal{H}}_{\Lambda_{\frac{1}{2}}}$ への partially isometric operator に unique に拡張できる。その extension を再び $\mathcal{F}_\pm$ と表わすと

$$\| \mathcal{E}((\Lambda_{\frac{1}{2}}, \infty))f \| = \| \mathcal{F}_\pm f \|_{\hat{\mathcal{H}}_{\Lambda_{\frac{1}{2}}}}$$

(11)

である。さらに $\mathcal{H}L = \lambda \mathcal{H}$ である。

unitarity を示すために次の仮定を置く。

条件 8 $-\mathbf{r}^2 \Delta V(x) \equiv (\nabla - \tilde{x} \partial_r) \cdot (\nabla - \tilde{x} \partial_r) V(x) = O(r^{-1-2\delta_2})$.

Theorem 4 $\tilde{\delta} = \min\{\delta, 2\delta_2 - 1\}$ とおくと

$$\mathcal{H} \mathcal{E}((\Lambda_{\tilde{\delta}}, \infty)) \mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}_{\Lambda_{\tilde{\delta}}} \equiv L^2((\Lambda_{\tilde{\delta}}, \infty); L^2(S^{n-1})).$$

Cor. $\delta_2 \geq \frac{3}{4}$ のとき $\Lambda_{\tilde{\delta}} = \Lambda_{\frac{1}{2}}$. ($\because \tilde{\delta} \geq \frac{1}{2}$).

Cor. 条件 3 において $\partial_r V = o(r^{-1})$ とすると $\Lambda_{\tilde{\delta}} = \Lambda_{\frac{1}{2}} = \limsup_{r \rightarrow \infty} V(x) + \frac{a}{4}$.

最後の Cor. においては, 任意の $\sigma > 0$ に対して $E(\sigma) =$

$= \limsup_{r \rightarrow \infty} V(x)$ であることに注意すればよい。

§ 6 non-oscillating long-range potential の適用

Theorem 5 $V(x)$ は次の条件をみたすとする。

$$(1) \quad V(x) = o(1), \quad \partial_r V(x) = o(r^{-1}), \quad \partial_r^2 V(x) = O(r^{-1-\delta}) \quad \delta > \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad (\nabla - \tilde{x} \partial_r) V(x) = O(r^{-1-\delta}), \quad (\nabla - \tilde{x} \partial_r) \partial_r V(x) = O(r^{-1-\delta})$$

$$(3) \quad (\nabla - \tilde{x} \partial_r) \cdot (\nabla - \tilde{x} \partial_r) V(x) = O(r^{-1-2\delta})$$

このとき $\mathcal{E}((0, \infty)) \mathcal{H} = \mathcal{H}_{a.c.}$ から $\hat{\mathcal{H}}_0 \equiv L^2((0, \infty); L^2(S^{n-1}))$ の

unitary operator $\mathcal{H}$ が存在して $\mathcal{H}L = \lambda \mathcal{H}$ が成り立つ。

例 $\frac{1}{\log r}, \frac{1}{\log(\log r)}$ 等は, Ikebe, Saito 等の結果は適用され得るが, Theorem 5 は適用できる。

Final remark. Th.1 の証明, Prop.4 の証明, Prop.9 の証明が本質的に重要である。

References

- [1] Mochizuki, K. and J. Uchiyama, On eigenvalues in the continuum of 2-body or many-body Schrodinger operators, Nagoya J. Math. 70 (to appear)
- [2] _____, Radiation conditions and spectral theory for 2-body Schrodinger operators with "oscillating" long-range potentials, I. the principle of limiting absorption, J. Math. Kyoto Univ. (to appear)
- [3] _____, Radiation conditions and spectral theory for 2-body Schrodinger operators with "oscillating" long-range potentials, II. spectral representation J. Math. Kyoto Univ. (to appear)