

半完全最大値の原理をみたす

potential 作用素について.

静岡大 理 近藤亮司

E を $\mathbb{R}$ 上の可算公理をみたす局所 compact な Hausdorff 空間とし、 E の Borel 集合全体の σ -代数を $\mathcal{E}$ で表わす。又 E 上の実数値で有界な $\mathcal{E}$ -可測関数全体を IB , 有界な連続関数全体を C で表わす。 IB 及び C は $\|\cdot\|_\infty$ -ノルム $\|f\| = \sup |f(x)|$ により Banach 空間となる。

今 E 上に、台が全空間 E と一致するような正の Radon 測度 μ が与えられたとし、任意の compact 集合 $F \subset E$ 上

$$N_F(\mu) = \{f \in IB \mid \text{supp}(f) \subset F, \langle \mu, f \rangle = \int f d\mu = 0\}$$

とある。各 $N_F(\mu)$ は $\|\cdot\|_\infty$ -ノルムで位相を与え、

$\mathcal{E}$ の帰納極限

$$N(\mu) = \bigcup_{F: \text{compact } \subset E} N_F(\mu)$$

を考える。 $N(\mu)$ は局所凸な線型位相空間となる。特に誤解

のあそびのとき、 $Nl_F(\mu)$, $Nl(\mu)$ の代りに Nl_F , Nl と書くこともある。このようにして、 $Nl(\mu)$ のええ (μ に属する) null charge と云う。 $Nl(\mu)$ から $\mathbb{C}^n$ の連続線型写像 Σ potential 作用素と呼ぶ。

potential 作用素 ∇ は次の条件：

(SCM) 集合 $\{f > 0\}$ 上で $\nabla f \leq m$ (m は実数) ならば
全空間 E 上 $\nabla f \leq m$.

Σ が成るとき、半完全最大値原理 (semi-complete principle of maximum) Σ が成るといわれる。例 2 以下

例 1. $E = \mathbb{R}^1$, $\mu(dx) = dx$

$$\nabla f(x) = - \int_{\mathbb{R}^1} |x - y| f(y) dy$$

例 2. $E = \mathbb{R}^1$ または $\mathbb{R}^2$ $\mu(dx) = dx$

$$\nabla f(x) = \frac{1}{\pi} \int_E [\log |x - y|] f(y) dy$$

例 3. $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$ $\mu(dx) = dx$

$$\nabla f(x) = \int_E v(x, y) f(y) dy$$

v は Δ (ラプラス) に対する Neumann 核。

等しい。このように potential 作用素になっている。

以下、このように (SCM) が成る potential 作用素が、

次に定式化するように意味のある種の resolvent から自然に出て来ること、及び、ある場合には、このように potential 作用素から resolvent が構成されることを述べる。

1. 記号及び諸定義.

(E, Σ) , $B, \mathbb{C}$ は今迄通りとする. 写像 $K: E \times E \rightarrow R = (-\infty, \infty)$ は.

K.1) 固定した x に対し, $A \mapsto K(x, A)$ は Σ 上の測度

K.2) 固定した A に対し, $x \mapsto K(x, A)$ は Σ -可測.

の 2 条件をみたすとき, (E, Σ) 上の核と呼ばれる. 核 K , H , 実数 f , 測度 μ に対し, $\int$ が定義される限り.

$$Kf : Kf(x) = \int K(x, dy) f(y).$$

$$\mu K : \mu K(A) = \int \mu(dy) K(y, A).$$

$$KH : KH(x, A) = \int K(x, dy) \int H(y, A).$$

と定める. 又核 K は, $K(x, A) \geq 0$ ($\forall x \in E, A \in \Sigma$)

かつ, $K1(x) \leq 1$ ($\forall x \in E$) のとき Markov 型.

$K1(x) = 1$ ($\forall x \in E$) のとき Markov 型と呼ばれる. 正の実数 $p > 0$ を係数とする核の集合 $(\nabla_p)_{p>0}$ があつて.

V.1) (Markov 型)

$$\forall p > 0 \text{ に対し } p \nabla_p 1 = 1.$$

V.2) (resolvent 方程式)

$$V_p - V_q + (p - q)V_p V_q = 0 \quad (\forall p, q > 0)$$

とみたとき Markov resolvent と呼ばれる。V.1) が
V.1_A) (弱 Markov 型)

$$\forall p > 0 \text{ に対し } p V_p 1 \leq 1$$

と弱められるときは弱 Markov resolvent とある。

(強) Markov resolvent が更に

V.3) (強 Feller)

$$\forall p > 0 \text{ に対し } V_p : B \rightarrow \mathbb{C}$$

とみたとき、強 Feller, 3 の上。

V.4) (再帰的)

$$\forall \text{ 開集合 } B (\neq \emptyset) \text{ に対し } \sup_{p>0} V_p(x, B) = \infty \quad (\forall x \in E)$$

とみたとき再帰的と云うことはある。強 Feller で再帰的は弱 Markov resolvent は Markov resolvent であることが示される。

以下の議論で Markov 過程の結果は必ずしも必要ではないが記号を簡単にしたり、内容を直観的に理解するには大いに役立つので、离散係数の Markov 過程の定義だけ与えておく。

E の 1 点 compact 化を $E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$ とし、(E がそれ自身 compact のときは、 Δ は孤立点としてつけ加える)。 E_Δ の Borel 集合全体を $\mathcal{E}_\Delta$ とする。 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$

として、 $\mathbb{Z}_+$ から $E_\Delta \wedge$ の写像 ω で、もし $\omega(n) = \Delta$

ならば、ある $n \geq 1$ の $m \geq n$ に対して、 $\omega(m) = \Delta$ とおこう。

これらの集合を Ω とおす。 $\omega \in \Omega$ の n 座標 $\omega(n) \in X_n(\omega)$

とかく、と各 n に対して、 X_n は Ω から $E_\Delta \wedge$ の写像にた

といる。 $\mathcal{B}_n = (X_0, X_1, \dots, X_n)^{-1}(\mathcal{E}_\Delta^{n+1})$ ($n=0, 1, 2, \dots$)

とし、 $\mathcal{B}_n$ をある集合を最小の σ -代数 $\mathcal{B}_\infty$ とおす。

又各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して、 Ω から $\Omega \wedge$ の写像 $\theta_n \in (\theta_n \omega)(m)$

$= \omega(n+m)$ により定義する。定義から、 $X_m \circ \theta_n = X_{m+n}$

($\forall m, n \in \mathbb{Z}_+$) である。

今、 $(E, \mathcal{E})$ 上に Markov 核 P が与えられると、各 $x \in E$ に対して、 $(\Omega, \mathcal{B}_\infty)$ 上の確率測度 P_x があって、

$$P_x(\{\omega \mid X_1(\omega) \in A_1, \dots, X_n(\omega) \in A_n\})$$

$$= \int_{A_1} \dots \int_{A_{n-1}} P(x, dx_1) P(x_1, dx_2) \dots P(x_{n-1}, A_n)$$

が、ある $n \geq 1$ 、ある $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ に対して成り立

つようにおまることが知られてゐる。このとき、

$$X = (\Omega, (X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}, (\theta_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}, (P_x)_{x \in E})$$

を、 P を推移確率とある Markov process とおす。

2. 不変測度。

$(\nabla_p)_{p>0}$ は $\nabla.1), \nabla.2), \nabla.3), \nabla.4)$ をみたす $(E, \mathcal{E})$

上の Markov resolvent とある。次の定理はよく知られている
ことであり、現在ではより一般な条件で成り立つことが知られて
いるが不変測度の出し方と公式が後の話と関係して来る。

定理 1. $(\nabla_p)_{p>0}$ に對し、

V.5) (不変測度)

$$\forall p > 0 \text{ に對し } p \mu \nabla_p = \mu$$

とみても、 E 全体を台とある正の Radon 測度が存在し、しかもそれは定数倍を除いて唯一通りに定まる。

証明の大筋. $Q = \nabla_1$ とおくと、 Q は (E, Σ) 上の Markov 核と
して、 Q を推移確率とある Markov 過程 $X = (\Omega, (X_n), (\theta_n), (P_x))$
とある。こゝで F の内部が空でなく compact set $F \subset E$
ととり、(E 自身 compact なら $E = F$ とある)。

$$T_F = \inf \{n \geq 1 \mid X_n \in F\} \quad (\inf \emptyset = \infty)$$

とある。こゝで、 F 上の核 Q^F を

$$(0) \quad Q^F(x, A) = P_x(X_{T_F} \in A) \quad (x \in F, A \subset F)$$

により定義する。(解析的には

$$Q^F = \sum_{n=0}^{\infty} (J_{F^c} Q)^n Q J_F \quad (J_F \text{ は } F \text{ 上の制限})$$

である。) Q^F は F 上の Markov 核で、ある F 上の確率
測度 ν_F , 定数 $c > 0$, $0 < \delta < 1$ があって

$$(1) \quad \sup_{x \in F} \|Q^n(x, \cdot) - \nu_F(\cdot)\| \leq c \delta^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

($\|\cdot\|$ は測度の全変動) が成り立つことが示される。従って

2. γ_F は、 $\gamma_F Q^F = \gamma_F$ をみたす唯一つの確率測度である。

3. $F \times E$ 上の関数 G^F は

$$(2) \quad G^F(x, B) = E_x \left(\sum_{0 \leq n < T_F} 1_B \circ X_n \right)$$

により定義される。この時 $K \subset E$ が compact であれば

$$\sup_{x \in F} G^F(x, K) < \infty$$

が示される。そこで

$$(3) \quad \mu = \gamma_F G^F$$

とおけば μ は、 E 全体を台とある Radon 測度で、

$$(4) \quad \mu Q = \mu \quad \text{即ち} \quad \mu V_1 = \mu$$

となる。Resolvent 方程式 $V_p - V_1 + (p-1)V_1 V_p = 0$

より、(V.5) が得られる。

3. Potential 作用素

$(V_p)_{p>0}$ は (V.1) ~ (V.4) をみたす Markov resolvent とし、

μ はその不変測度、 μ に束縛する null charge の空間を N_1 とする。

このとき

定理 2 N_1 から $\mathbb{C}$ への連続線型写像 V が存在して、

(V.6) (Poisson 方程式)

$$V_p f - V f + p V_p V f = 0 \quad (\forall f \in N_1)$$

とみえる。また $\tilde{V}$ は (V.6) とみえる N から $\mathbb{C} \wedge$ の連続線型写像とあると、 N の共役空間 N' の元 l が存在して

$$\tilde{V} f = V f + l(f) \quad \forall f \in N$$

とある。

証明の大意。 $Q = V_1$ とし、 Q^F は (6) により定義される F 上の Markov kernel とある。 ν_F はある F 上の null charge f_F に対す。

$$\begin{aligned} & \| \sum_{k=n}^m (Q^F)^k f_F \| \\ &= \| \sum_{k=n}^m (Q^F)^k f_F - \langle \nu_F, f_F \rangle \| \\ &\leq C \| f_F \| \sum_{k=n}^m \delta^k \end{aligned}$$

とあるのだ。

$$(5) \quad L^F f_F = \sum_{n=0}^{\infty} (Q^F)^n f_F \quad f_F \in N(\nu_F)$$

により、 $N(\nu_F)$ から B_F (F 上の有界可測関数) $\wedge$ の連続写像 L^F が定義される。 L^F は明らかに

$$(6) \quad (I - Q^F) L^F f_F = f_F \quad f_F \in N(\nu_F)$$

とみえる。次は Markov 過程 X を用いて。

$$T_F^0 = \inf \{ n \geq 0 \mid X_n \in F \}$$

とある。 $(E, \mathcal{E})$ 上の核 N^F, H^F は

$$(6) \quad N^F(x, B) = E_x \left(\sum_{0 \leq n < T_F^0} 1_B \circ X_n \right)$$

$$(7) \quad H^F(x, B) = P_x(X_{T_F}^0 \in B)$$

により定義ある。 K が compact のときは、

$$\sup_{x \in E} N^F(x, K) < \infty$$

と仮定する。 G^F と同じである。

よって $f \in N(\mu)$ に対し、 $G^F f$ を考え、 $G^F f$ は B に属し、 $G^F f$ の F 上への制限は $(G^F f)_F$ とかく。

$$\langle \nu_F, (G^F f)_F \rangle = \langle \nu_F G^F, f \rangle = \langle \mu, f \rangle = 0$$

と仮定する。従って、 $(G^F f)_F$ には L^F を作用させることができるのである。

$$(8) \quad G f = N^F f + H^F L^F G^F f$$

と定義する。 G は任意の compact set K に対し、

$$\|G f\| \leq \left[\sup_x N^F(x, K) + \|L^F\| \sup_x G^F(x, K) \right] \|f\|$$

$$(\forall f \in N_K(\mu))$$

と成り立つので、 N から B への線型連続写像である。

$x \in F$ のとき成り立つ関係式

$$N^F(x, B) = 0, \quad Q N^F(x, B) = G^F(x, B) - 1_B(x)$$

$$Q H^F(x, B) = Q^F(x, B) \quad (B \subset F)$$

$$(I - Q^F) L^F f_F^{(x)} = f_F^{(x)} \quad (f_F \in N(\nu_F))$$

$x \notin F$ のとき成り立つ関係式

$$Q H^F(x, B) = H^F(x, B)$$

を用いると、 G は方程式

$$(9) \quad Gf - QGf = f \quad \forall f \in N(\mu)$$

即ち, $Gf - V_1 Gf = f \quad (f \in N(\mu))$ となり、 μ が分る。

よって

$$(10) \quad Vf = Gf - f \quad (f \in N(\mu))$$

と定義すれば V は $N(\mu)$ から $\mathbb{R}$ の連続線型写像となり、

resolvent 方程式より Poisson 方程式 (V.6) をみたす

ことが分る。 (V.6) を書きかえろと。

$$V_p(I + pV)f = Vf \quad (f \in N(\mu))$$

となるので Feller の条件 (V.3) より $V: N \rightarrow \mathbb{C}$ である。

又、 $\tilde{V}$ は V のような他の写像であると。

$$Vf - \tilde{V}f = pV_p(Vf - \tilde{V}f)$$

となり、(V.4) より $Vf - \tilde{V}f = \text{定数}$ であることが分る。

従って $\lambda \in N'$ により $\tilde{V}f = Vf + \lambda(f)$ とかける。

4. 半完全最大値の原理

$(V_p)_{p>0}$ は (V.1) ~ (V.4) をみたす Markov resolvent, μ は不変測度, V は potential 作用素とある。 $Q_p = pV_p$,

$$G_p f = (I + pV)f \quad (f \in N(\mu)) \quad \text{とある。}$$

$$(11) \quad (I - Q_p)G_p f = f \quad (f \in N(\mu))$$

となることが (V.6) から分る。このとき、任意の $p > 0$ に対して

G_p は次の最大値原理をみたす。

補助定理. 任意の $f \in N(\mu)$ に対し. $\{f > 0\} \neq \emptyset$ 上 $G_p f \leq m$,
 かつ, $\mu(\{f > 0\}) > 0$ であれば, 全空間 E で, $G_p f \leq m - f^-$
 が成り立つ. (強められた半完全最大値の原理).
 ($f^- = \max(-f, 0)$, 同じく $f^+ = \max(f, 0)$)

証明には Q_p を推移確率とある Markov 過程 $X^{(p)} = (\Omega, (x_n),$
 $(\theta_n), P_x^{(p)})$ を用いるのが最も直観的で早い. $A = \{f > 0\}$
 とあると, 任意の $x \in E$ に対し.

$$\begin{aligned} G_p f(x) &= E_x^{(p)} \left(\sum_{0 \leq n < T_A^0} f \circ X_n \right) + E_x^{(p)} (f \circ X_{T_A^0}) \\ &= - E_x^{(p)} \left(\sum_{0 \leq n < T_A^0} f^- \circ X_n \right) + E_x^{(p)} (f \circ X_{T_A^0}) \\ &\leq -f^-(x) + m. \end{aligned}$$

この補助定理から次の定理が得られる.

定理 3 ∇ は半完全最大値の原理をみたす.

証明. $\{f > 0\} \neq \emptyset$ 上で $\nabla f \leq m$ とある. もし $\mu(\{f > 0\}) > 0$
 であれば, $\{f > 0\} \neq \emptyset$ 上で

$$G_p f = f + p \nabla f \leq m + \|f\|$$

であるから E 上で $G_p f \leq m + \|f\| - f^- \leq m + \|f\|$

両辺を p で割り, $p \uparrow \infty$ とおけば $\nabla f \leq m$ が E 上で成り

立つ. $\mu(\{f > 0\}) = 0$ のときは, $f \leq 0$ μ -a.e.

従って, $\langle \mu, p \nabla_p f^\pm \rangle = \langle \mu, f^\pm \rangle = 0$ とあるが

$p \nabla_p f^\pm \geq 0$ であり, ∇ は連続であるから $p \nabla_p f^\pm = 0$.

このことから $\nabla f = p \nabla_p \nabla f$ ($\forall p > 0$) となり, $\nabla f =$ 定数. 従って, E 上 $\nabla f \leq m$ となる. (終)

5. potential 作用素から resolvent を構成する問題 (I)

この節では resolvent を求め, E 上に正の Radon 測度 μ (台は E 全体), 及び (SCM) をみたす $N(\mu)$ から $\mathbb{C} \wedge$ の連続線型写像 ∇ が与えられるとき, $\nabla(1) \sim \nabla(6)$ をみたす resolvent が存在するか, という問題を考える. E が compact の時は容易であり, E が compact でないときは未だ結果は得られていない. 満たすべき

定理 4 E が compact とし, μ 及び (SCM) をみたす, 連続 $\nabla: N(\mu) \rightarrow \mathbb{C}$ が与えられるとき, このとき, $\nabla(1) \sim \nabla(6)$ をみたす $(\nabla_p)_{p>0}$ が唯一通り存在する.

証明には次の補助定理が基本的役割を果たす.

補助定理 各 $p > 0$ に対し, 任意の $g \in IB$ に対し, $f^{(p)} \in N$ 定数 c_p が唯一通りに存在して

$$g = (I + p \nabla) f^{(p)} + c_p$$

とかけらる. 又, $g \in \mathbb{C}$ ならば $f^{(p)} \in N \cap \mathbb{C}$ である.

この補助定理を使うと, $g \in IB$ に対して $g = (I + p \nabla) f^{(p)} + c_p$ と表わすことができる.

$$\nabla_p g = \nabla f^{(p)} + c_p / p$$

と定義すれば, $(V_p)_{p>0}$ が $V, 1) \sim V, 6)$ を満たすことを示すのはそう困難ではない。

更に詳しく次のことも分る。

定理 5 $E \in \text{compact}$ とする。 μ, V が定理 4 のように与えられたとき, $(V_p)_{p>0}$ が

$$(V, 7) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \|p V_p f - f\| = 0 \quad \forall f \in \mathbb{C}$$

を満たすための必要充分条件は, $\{Vf + c \mid f \in N; c \text{ は定数}\}$ が $\mathbb{C}$ で dense であることである。

定理 5 の条件の下では, $\mathbb{C}$ 上の強連続 Markov 半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ が存在して

$$V_p = \int_0^\infty e^{-pt} P_t dt \quad (\forall p > 0)$$

となる。 $(P_t)_{t>0}$ の generator $\in A$ とすると, $V(N \cap \mathbb{C}) \subset D(A)$ となり, Poisson 方程式

$$A V f = -f \quad (f \in V(N \cap \mathbb{C}))$$

の成立することが (V, 6) から直ちに導かれる。

6. potential 作用素から resolvent を構成する問題 (II)

5 と同じ問題 $\in E$ が compact ではないときに考えるのは大変困難である。5 と同じように, $\mu \in E$ 全体を台とある正の Radon 測度, $V \in N(\mu)$ から $\mathbb{C} \cap$ の連続線型写像と~~ある~~し。

(SCM) をみたすものがある。次のことを示す。

定理 6 与えられた μ と ∇ に対し。

$$\nabla \cdot 1) \quad p \nabla p \perp = 1$$

$$\nabla \cdot 6) \quad \nabla_p f - \nabla f + (p \nabla_p \nabla f) = 0 \quad \forall f \in N(\mu)$$

をみたす核 ∇_p は存在する（一通り）であり、 $\nabla \cdot 2)$, $\nabla \cdot 3)$ もみたす。

証明は、 $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset E$, $\bigcup_{n \geq 1} F_n = E$ とする。

compact 集合の列をとる。前節補助定理を用いると、各 F_n において、任意の $g \in B$ に対し、 $f_n^{(p)} \in N_{F_n}$, 定数 $C_p^{(n)}$ が存在して、 F_n 上で $g = (I + p \nabla) f_n^{(p)} + C_p^{(n)}$ と表れる。

$g_n = (I + p \nabla) f_n^{(p)} + C_p^{(n)}$ とおくと、(GMP) から、 $\|g_n\| \leq \|g\|$ ($\forall n \geq 1$) が分る。 $g_n \rightarrow g$ (各点収束) で $\|g_n\| \leq \|g\|$ であるから、Lebesgue の定理で、

$$\begin{aligned} \nabla_p g &= \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla_p g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla_p [(I + p \nabla) f_n^{(p)} + C_p^{(n)}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\nabla f_n^{(p)} + C_p^{(n)} / p] \end{aligned}$$

となり、 ∇_p は唯一（通り）に定まる。

$\nabla \cdot 1) \sim \nabla \cdot 6)$ をみたす resolvent が必ずしも存在しないことは、次のような例で分る。

$$\text{例 1. } E = R^1, \quad \mu(dx) = dx$$

$$\nabla f(x) = \int_x^\infty f(y) dy \quad f \in N$$

とある. ∇ は (SCM) をみたす $\mathbb{N}$ から $\mathbb{C}$ への連続な線型写像であって.

$$\nabla_p g(x) = \int_x^\infty e^{-p(y-x)} g(y) dy \quad g \in \mathbb{B} \quad x \in \mathbb{R}^1$$

が $\nabla.1), \nabla.5)$ をみたす唯一の作用素である. $(\nabla_p)_{p>0}$ は $\nabla.1), \nabla.2), \nabla.3), \nabla.5), \nabla.6)$ をみたす再帰性の条件 $\nabla.4)$ は満たす.

例 2. $E = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mu(dx) = dx$

$$\nabla f(x) = \int_x^\infty f(y) dy \quad f \in \mathbb{N}$$

とある. ∇ と同様的に.

$$\nabla_p g(x) = \int_x^\infty e^{-p(y-x)} f(y) dy \quad f \in \mathbb{B}, x \in \mathbb{R}_+$$

は $\nabla.1), \nabla.2), \nabla.3), \nabla.5)$ をみたす唯一の resolvent であるが, 再帰性の条件 $\nabla.4)$, 不変測度の条件 $\nabla.5)$ は満たす.

$\nabla.1) \sim \nabla.6)$ 迄をみたす resolvent $(\nabla_p)_{p>0}$ が存在するための必要充分条件は何であるか. という問題は意味があるが満足な結果は得られなくていいので省略する.

7. あと書き.

以上証明の仕方は全く要するが, 問題の立て方と定理の内容は E が可算集合の場合筆者により考察された [3], [4], [5] の一般空間の振張に当たっている. 定理 1, 2, 3, 6 について

では、もっと強い仮定の下で、そして、もっと不必要に複雑な方法で筆者 [6] に証明されている。定理 4 については、

D. Revuz の類似の結果 [8], [9] がある。が、証明は、こゝで荒筋を述べたこと、は異なっている。しかし [6] における強い仮定を除き、証明を簡略化するのは、[8], [9] の考えを随所に用いた。E に位相を考えた一般の測度空間の場合、Harris の意味で再帰的と呼ばれる Markov resolvent に対して、定理 1, 2, 3 にあたることは、Duflo [1] に述べられている。その後、出来るだけ広いクラスの null charge の空間に対して、potential 作用素を定義する努力も Meyer [7] 等で行われている。なお、半完全最大値の原理という名称は Herz [2] から来ている。

参 考 文 献

- [1] M. Duflo : Opérateurs potentiels des chaînes et des processus de Markov ~~re~~ irréductibles, Bull. Soc. Math. France, 98, (1970) 127-163.
- [2] C. Herz : Les théorèmes de renouvellement. Ann. Inst. Fourier, Grenoble t. 15 (1965) 169-188
- [3] R. Kondō : On weak potential operators for re-

current Markov chains with continuous parameters.

Osaka J. Math. 4 (1967) 327-344.

- [4] : On a construction of recurrent Markov chains, Osaka J. Math. 6 (1969), 13-28
- [5] : On a construction of recurrent Markov chains II, ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ 15 (1970) 510-518.
- [6] : On weak potential operators for recurrent Markov processes, J. Math. Kyoto Univ. 11-1 (1971) 11-44.
- [7] P. Meyer : Solutions de l'équation de Poisson dans le cas recurrent, Univ. de Strasbourg. Sem. de Probabilités 1969/1970 251-269.
- [8] D. Revuz : Application d'un theoreme de Mokobodzky aux operateurs potentiels dans le cas recurrent, Univ. ^{de} Strasbourg, Sem. de Probabilités 1969/1970 208-215
- [9] : Sur la theorie du potentiel pour les processus de Markov recurrents, to appear.
- [10] T. Ueno : Some limit theorems for temporally discrete Markov processes. J. Fac. Sci. Tokyo sect I, 7 (1957)