

W-infinity 代数の諸相

京都大学総合人間学部 高崎 金久 (TAKASAKI Kanehisa)

最近数理解析において“W-infinity 代数”と呼ばれる無限次元 Lie 代数がしばしば話題に登場するようになってきた。ここでは非線形可積分系との関わり合いを中心にこの代数の果たす役割を解説する。

1. W-infinity 代数とは何か? [1]

W-infinity 代数は大きく分けて“量子版”の W_∞ 代数と“古典版”の w_∞ 代数とがあり、これらの中にも様々なタイプがある。その他にもいろいろな変形や拡張が考えられている。

$$\text{W-infty algebras} \quad \begin{cases} W_\infty \text{ ("quantum" version)} \\ w_\infty \text{ ("classical" version)} \\ \text{other variations} \end{cases}$$

典型的な場合としては、1 変数の擬微分作用素（あるいは Laurent 級数係数の微分作用素）のなす代数

$$W_\infty \approx \left\langle \lambda^n \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^\ell \right\rangle \approx \left\langle x^\ell \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \right\rangle$$

が W_∞ のひとつの実現を与える。対応する 2 次元シンプレクティック多様体上の関数（つまりそれら作用素の“symbol”）に対する Poisson 括弧の代数あるいは無限小シンプレクティック写像の代数

$$w_\infty \approx \langle \lambda^n \mu^\ell \rangle \approx \left\langle \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{\partial F}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right\rangle$$

$$\{\lambda, \mu\} = 1, \quad F = F(\lambda, \mu).$$

が w_∞ のひとつの実現を与える。これらに適当な 1 次元中心拡大を付け加えることもある。

このような代数の存在はもちろん昔から知られていたが、80 年代末、共形場の理論の対称性 (Virasoro 代数) をさらに拡張するためのひとつの候補として (W-infinity 代数という新しい名前まで貰って) 場の理論の観点から研究されるようになった [2]。しかも、思いがけないことに、間もなく発見された 2 次元量子重力理論の厳密解 (これは KP ヒエラルヒーなどの非線形可積分系の理論と密接な関係がある) を特徴付けるのにもこの代数が大変役に立つことがわかり、たちまち多くの物理学者の関心を集めることになった。これまでに W-infinity 代数との関わり (多少怪しげなものも含め) が明らかになっている数理論理の話題を列挙すると以下になる。

- W-infinity 対称性をもつ 2 次元場の理論の模型
- 非線形可積分系 (ソリトン方程式, 自己双対重力, その他)
- 2 次元量子重力, 2 次元弦模型, black hole
- 量子 Hall 効果, Chern-Simons 理論, 1 次元量子流体
- 2 次元完全流体, その差分スキーム
- ...

これらのうち最初の 4 つは実際には互いに密接に関連し合っている。しかも、いずれの場合も W-infinity 代数がなんらかの意味で問題の可解性・可積分性の鍵となっているらしい。

2. 2 次元の場の理論における共形 (Virasoro) 対称性の拡張

共形場の理論 [3] の基本的対称性は Virasoro 代数であるが、実際に得られる共形場の模型はもっと大きい対称性を持ち、それによって模型の構造が決まることが多い。そのような拡大された対称性の代数として早い時期に見いだされたのは Zamolodchikov の W_N 代数と呼ばれるものである [4]。Virasoro 代数は物理的には “spin 2” の対称性とみなせるのだが、 W_N 代数はさらに “spin 3, ..., N” の生成元をもつ。ただしこれは Virasoro 代数と違って Lie 代数ではない。

W_N はソリトン方程式の Hamilton 構造とも関係がある [5]。KdV 方程式の Hamilton 構造 (実は二通りあるが、そのうちのひとつ) は Virasoro 代数の実現を与えることが以前からわかっていた。KdV 方程式の 2 階の Lax 作用素を N 階に置き換えて得られる “一般化 KdV 方程式” の Hamilton 構造についても同様にして 一種の代数構造 (Gelfand-Dikii

代数) が現れるが, それが W_N 代数の一種なのである. この Hamilton 構造は一般化された変形 KdV 方程式あるいは $\mathfrak{sl}(N)$ 戸田場の方程式によっても記述することができる. またその幾何学的な意味は $\mathfrak{sl}(N)$ に関連した Hamiltonian reduction として説明される. さらに, 本来の共形場の理論における W_N 代数に対しても同様の解釈ができる [6].

Bakas と Bilal はこのような W_N 代数に対して適当な意味で $N \rightarrow \infty$ の極限が存在すること, その極限(彼等はそれを W_∞ と名付けたが, 現在の記号の慣用ではむしろ w_∞ である)は 2 次元多様体上の面積保存微分同型(つまりシンプレクティック写像)の群の Lie 代数 $\mathfrak{sdiff}(\Sigma)$ に他ならないこと, などを見いだした [7]. 図式的に言えば次のようになる.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_N \approx w_\infty \approx \mathfrak{sdiff}(\Sigma).$$

正確に言えば, $\mathfrak{sdiff}(\Sigma)$ よりもむしろそれに付随する Poisson 代数 $\text{Poisson}(\Sigma)$ が現れるのだが, 物理学者はよくこの二つを混同するので, 我々もそれらの区別についてあまりうるさく言わないことにする. とにかく, この極限は Lie 代数であり, 従って数学的にはもとの W_N 代数よりもわかりやすいものである.

当然, このような代数がどのような場の理論の模型と対応しているのか, ということが問題になる. Bakas [2] は W_N 代数と戸田場の方程式の関係に注目し, $N \rightarrow \infty$ の極限において戸田場の方程式

$$\begin{aligned} \partial_z \partial_{\bar{z}} u_n + \exp(u_{n+1} - u_n) - \exp(u_n - u_{n-1}) &= 0, \\ u_n &= u_n(z, \bar{z}), \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(正確には $\mathfrak{sl}(N)$ に付随するもの) のスケール極限

$$\begin{aligned} \partial_z \partial_{\bar{z}} u + \partial_s \exp(\partial_s u) &= 0, \\ u &= u(z, \bar{z}, s), \quad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

が w_∞ と関係するだろう, と主張した. このことは Park [8] によって実際に確かめられた. ただし, Park は Hamilton 構造よりもむしろ模型の対称性としての $\mathfrak{sl}(N)$ が $N \rightarrow \infty$ の極限において w_∞ に移行することを指摘している. その意味で Park の示したことは Lie 代数のレベルでは

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathfrak{sl}(N) \approx w_\infty \approx \mathfrak{sdiff}(\Sigma)$$

というように要約できる。(Bakas 自身は Saveliev-Vershik の “continuous Lie algebra” [9] に基づくやや異質の分析を行っている。)

$\mathfrak{sl}(N)$ の $N \rightarrow \infty$ 極限が $\text{sdiff}(\Sigma)$ になる, という主張は以前から物理学者には知られていて [10], それを Yang-Mills 理論や相対論的膜 (membrane) の理論に応用する試みもなされていた [11]. Park はおなじ視点から 4 次元の自己双対重力を 2 次元の $\mathfrak{sl}(N)$ 対称性をもつ模型の $N \rightarrow \infty$ 極限として導く試みを行っている [12].

3. なぜ $\mathfrak{sl}(N)$ は $N \rightarrow \infty$ において W-infinity に化けるのか? [13]

次のような $N \times N$ 行列を考える.

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^{N-1} \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix},$$

ここで $\omega = \exp(2\pi i/N)$. この 2 つの行列は次のような代数的関係式を満たす.

$$hg = \omega gh, \quad g^N = h^N = 1.$$

この $hg = qgh$ (q な 0 でない定数) という形の代数は昔の Weyl 型正準交換関係の研究から, 最近の非可換トーラスや量子群の研究にいたるまで, 様々な問題に顔を出す. 上の g, h という行列はその一つの表現を与えるわけである.

$\mathfrak{sl}(N)$ との関係を見るため, g, h を用いて

$$T_m^{(N)} = \frac{iN}{4\pi M} \omega^{m_1 m_2 / 2} g^{m_1} h^{m_2}$$

という行列をつくる. ここで m は整数値をとる double index $m = (m_1, m_2)$, また M はあとで $N \rightarrow \infty$ の極限をとるときに用いるパラメータである. 上のような g, h の代数的関係式からこれらが

$$[T_m^{(N)}, T_n^{(N)}] = \frac{N}{2\pi M} \sin\left(\frac{2\pi M}{N} m \times n\right) T_{m+n}^{(N)},$$

$$m \times n = m_1 n_2 - m_2 n_1,$$

という交換関係を満たすことはすぐにわかるが、さらに $m = (0, 0)$ を除いておけば $\mathfrak{sl}(N)$ の生成系 (“sine generator”) になることも知られている. [$m = (0, 0)$ を加えれば $\mathfrak{gl}(N)$ の生成系になる.]

さてここで $N \rightarrow \infty$ の極限を Lie 代数の構造定数に対してとることを考える. これには二通りの場合がある:

(i) M を固定, $N \rightarrow \infty$. この極限で得られる交換関係は

$$[T_m, T_n] = m \times n T_{m+n}$$

となる. この形の交換関係は 2 次元の Poisson 代数 $\text{Poisson}(\Sigma)$ に特徴的なもので, 例えばトーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ 上の Poisson 代数の場合

$$T_m = e^{im\theta} = \exp i(m_1\theta_1 + m_2\theta_2)$$

(ただし (θ_1, θ_2) はトーラス上の角変数座標) という対応によって上のような交換関係を Poisson 括弧の意味で満たす生成系が得られる. この他にも平面 $\mathbf{R}^2$, 円柱 $\mathbf{R} \times S^1$ などで同様の生成系がつくれる. これらは w_∞ 代数の実現を与える.

(ii) $M, N \rightarrow \infty, M/N \rightarrow \Lambda (\neq 0)$. この極限で得られる交換関係は

$$[T_m, T_n] = \frac{1}{2\pi\Lambda} \sin(2\pi\Lambda m \times n) T_{m+n}$$

となる. これはもとの $T_m^{(N)}$ の交換関係と実質的に同じで, パラメータの rescaling により N 依存性を消して普遍的な形に書き直したものだと思ってもよい. 非可換トーラス代数を初めとして, この Lie 代数の実現もいろいろある. 例えば円周上の角変数 θ を使って定義される作用素

$$T_m = \exp[i m_1 \theta + 2\pi \Lambda m_2 \partial_\theta]$$

(1 次元における Heisenberg-Weyl 作用素そのもの) はその一つの実現を与える. これは円周上の関数のなす可換環とその上に作用する shift $\theta \rightarrow \theta + 2\pi\Lambda$ の生成する離散群との接合積とみなすこともできる. もう一つの重要な実現としては, トーラス上の関数に対する Moyal 括弧

$$\{F, G\}_\Lambda = \frac{1}{2\pi\Lambda} \sin \left[2\pi\Lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1 \partial\theta'_2} - \frac{\partial^2}{\partial\theta_2 \partial\theta'_1} \right) \right] F(\theta) G(\theta') \Big|_{\theta'=\theta}$$

がある。いずれの場合も特徴的なのは、Poisson 代数の場合と違って、Lie 積が結合代数の交換子として書けるということである。最初の場合については定義によりそうになっている。Moyal 括弧の場合も結合代数の構造を star product

$$F * G = \exp \left[2\pi\Lambda i \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta'_2} - \frac{\partial^2}{\partial\theta_2\partial\theta'_1} \right) \right] F(\theta)G(\theta')|_{\theta'=\theta}$$

により入れると、($2\pi\Lambda$ というパラメータで正規化した) 交換子として書ける。star product は実は “Weyl ordering” で書いた (擬) 微分作用素の合成規則そのものである。[定義式右辺の中の

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta'_2} - \frac{\partial^2}{\partial\theta_2\partial\theta'_1}$$

においてどちらか一方のみを残せば通常の “normal ordering” または “anti-normal ordering” での合成規則になる。] これらは W_∞ 代数の実現を与えている。

(ii) は $\Lambda \rightarrow 0$ の極限において (i) に帰着する。 $\hbar = 4\pi\Lambda$ を Planck 定数と思えばこれは量子論から古典論への極限をとることに相当する。もともと W_∞ と w_∞ の関係はそのような関係にある。

4. KP ヒエラルヒー・戸田ヒエラルヒーと W-infinity

KP ヒエラルヒーや戸田ヒエラルヒーの理論 [14] に W-infinity が現れるのは理論の構成 (擬微分作用素や差分作用素を基本的な構成要素としている) から見て当然のことではある。具体的には次のような形で現れる。

● KP ヒエラルヒーの場合：

$$W_\infty \approx \left\langle x^\ell \left(\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \right\rangle \approx \left\langle \lambda^n \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^\ell \right\rangle$$

ここで x は空間座標、 λ はそれに双対なスペクトルパラメータ、 $n \in \mathbb{Z}, \ell \geq 0$ 。

● 戸田ヒエラルヒーの場合：

$$W_\infty \approx \left\langle s^\ell e^{n\hbar\partial/\partial s} \right\rangle \approx \left\langle \lambda^n \left(\hbar \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^\ell \right\rangle$$

ここで s は格子の空間の座標、 λ は $\log s$ に双対なスペクトルパラメータ、 $n \in \mathbb{Z}, \ell \geq 0$ 。 s -空間での表示は前節で触れた円周上の角変数による T_m の実現 (実質的には差分作用素) に似ていることに注意。

いずれの場合も準古典極限 ($\hbar \rightarrow 0$) を考える際の Planck 定数の入れ方を示してある。通常は $\hbar = 1$ とする。戸田ヒエラルヒーの場合、上の定式化では $\hbar$ が格子間隔の役割を果たしていることに注意されたい。これは表現論的に見て戸田格子の各格子点が量子論的エネルギー準位に相当することによる。また、Bakas, Park の仕事に現れた戸田場の方程式のスケール極限の導出もこの格子間隔の選び方によるものであって、実是一種の準古典極限なのである。

これらの W_∞ 代数の構造は大別して二通りの形で K P および戸田ヒエラルヒーの理論に現れる。一つは Lax 方程式系の Hamilton 構造 (Gelfand-Dickey 理論の拡張) として現れる [15]。もう一つは理論の対称性 (頂点作用素から得られる) として現れる [14]。これはちょうど、既に述べたような KdV・変形 KdV・ $sl(N)$ 戸田場の方程式における W_N と $sl(N)$ の関係に相当する。これらは同じ代数構造 (上に示した擬微分作用素や差分作用素により与えられる) が二つの異なる形態で現れてきたものと考えられる。

K P ヒエラルヒーの場合について、以上のことをもう少し詳しく説明しておく [16]。

K P ヒエラルヒーの理論には通常は Planck 定数が入っていないが、量子力学の通常の処法にならって Planck 定数を入れて定式化することもできる。そのとき Lax 表示は

$$\hbar \frac{\partial L}{\partial t_n} = [B_n, L], \quad B_n = (L^n)_{\geq 0}$$

で与えられる。ここで $(\)_{\geq 0}$ は例のごとく擬微分作用素の ∂^n , $n \geq 0$, の 1 次結合の部分 (つまり微分作用素部分) をあらわす。Lax 作用素は

$$L = \hbar \partial_x + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}(\hbar, t, x) (\hbar \partial_x)^{-n}, \quad \partial_x = \partial / \partial x$$

というように $\hbar \partial_x$ で展開され、その係数は $\hbar$ に関して

$$u_n(\hbar, t, x) = u_n^{(0)}(t, x) + O(\hbar) \quad (\hbar \rightarrow 0)$$

というように振舞うことを要請する。このとき新たに k という変数を導入して

$$\mathcal{L} = k + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}^{(0)}(t, x) k^{-n}$$

という Laurent 級数をつくと交換子を Poisson 括弧で置き換えた形の Lax 方程式系

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_n} = \{B_n, \mathcal{L}\}, \quad B_n = (\mathcal{L}^n)_{\geq 0}$$

を満たす。ここで Poisson 括弧は

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial k} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial k}$$

で定義され、また $(\)_{\geq 0}$ は k^n , $n \geq 0$, の 1 次結合の部分（つまり多項式部分）をあらわす。これが無分散 K P ヒエラルヒーの Lax 表示に他ならない。このように無分散 K P ヒエラルヒーは K P ヒエラルヒーの準古典極限として得られる [17]。Lax 表示において確かに W_∞ （擬微分作用素の代数）から w_∞ （Poisson 括弧の代数）への縮約が起きていることに注意されたい。

K P ヒエラルヒーを上のように定式化するとき、Baker-Akhiezer 函数と τ 函数も $\hbar$ に依存し、 $\hbar \rightarrow 0$ において次のような漸近形をもたねばならないことがわかる。

$$\Psi(\hbar, t, x, \lambda) = \exp[\hbar^{-1} S(t, x, \lambda) + O(\hbar^0)],$$

$$\tau(\hbar, t) = \exp[\hbar^{-2} F(t) + O(\hbar^{-1})],$$

ここで

$$S(t, x, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \lambda^n + x \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} S_{n+1}(t, x) \lambda^{-n},$$

$$S_{n+1}(t, x) = - \frac{1}{n} \frac{\partial F(t)}{\partial t_n} \Big|_{t_1 \rightarrow t_1 + x}.$$

Baker-Akhiezer 函数の漸近形は量子力学でよく知られた WKB 形である。 τ 函数の方は 2 次元量子重力理論などで知られた分配函数と自由エネルギーの関係式に対応している。実際、無分散 K P ヒエラルヒーとその仲間は 2 次元量子重力理論や位相的共形場の理論の解を特殊解として含んでいて [18]、その場合には確かにそのような解釈ができる。その意味で無分散 K P ヒエラルヒーの一般の解に対しても $F(t)$ を自由エネルギーと呼ぶ。

さらに頂点作用素や自由 fermi 場の理論を利用すれば、K P ヒエラルヒーの W_∞ 対称性から無分散ヒエラルヒーの w_∞ 対称性を導出することもできる。詳しいことについては引用文献にゆずる [16]。

戸田ヒエラルヒーとその準古典極限（無分散 K P ヒエラルヒーにならって無分散戸田ヒエラルヒーと呼ばれるが、あまりよい呼び名とは思えない）の関係も同様に説明できる [19]。

5. 自己双対重力とその可積分変形

自己双対重力（自己双対真空 Einstein 方程式）を Monge-Ampère 型方程式（物理学者は Plebanski 方程式と呼ぶ）

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial p \partial \hat{p}} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q \partial \hat{q}} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p \partial \hat{q}} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q \partial \hat{p}} = 1$$

の形に書くと w_∞ 代数の構造が見えてくる．例えば $(\hat{p}, \hat{q})$ という変数の組に注目して

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial \hat{p}} \frac{\partial B}{\partial \hat{q}} - \frac{\partial A}{\partial \hat{q}} \frac{\partial B}{\partial \hat{p}}$$

という Poisson 括弧を考えると，Plebanski 方程式は

$$\left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial p}, \frac{\partial \Omega}{\partial q} \right\} = 1$$

と書ける．これは偶然ではなく，twistor 理論の立場から分析を進めることで実は w_∞ のループ代数

$$\mathcal{L}w_\infty = \mathbf{C}[\lambda, \lambda^{-1}] \otimes w_\infty$$

がこの w_∞ 代数の背後に隠れていることがわかる [20]．既に触れたように Park はこのことを $\mathfrak{sl}(N)$ の $N \rightarrow \infty$ 極限の立場から説明している [12]．

ところで，KP ヒエラルヒーと無分散 KP ヒエラルヒーが Lie 代数のレベルで

$$W_\infty \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} w_\infty$$

という関係に結ばれていることを考えると

$$\mathcal{L}W_\infty \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \mathcal{L}w_\infty$$

という関係によって自己双対重力と結ばれる可積分系（ W_∞ のループ代数 $\mathcal{L}W_\infty$ に対応する）があってもおかしくない．じつはそのような方程式が Strachan によって提案されている [21]．これは Plebanski 方程式の Poisson 括弧 $\{ \ , \ }$ を既に説明したような Moyal 括弧 $\{ \ , \ }_\hbar$ で置き換えたもの

$$\left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial p}, \frac{\partial \Omega}{\partial q} \right\}_\hbar = 1$$

である。

この Moyal 代数により変形された自己双対重力も実は可積分であることがわかる [22]。しかもこの場合には Plebanski 方程式と違って K P ヒエラルヒーの dressing operator $W = 1 + w_1 \partial_x^{-1} + \dots$ に相当するものがつくれる。(実際には戸田ヒエラルヒーのように 2 個の dressing operator $W, \hat{W}$ が必要。) これは Moyal 括弧の背後に star product による結合代数の構造があることによっている。これらの dressing operator を使って K P・戸田ヒエラルヒーの理論に近い解の記述が得られる。

6. W-infinity に関連するその他の話題

● W_∞ 代数における余随伴軌道法

余随伴軌道法を W_∞ 代数の様々な実現に対して適用して得られる Lax 方程式や零曲率方程式の研究がいくつかなされている [23]。その中には K P・戸田ヒエラルヒーに関連する見慣れない方程式や以下に述べる 2 次元流体の方程式のいわば“q-変形”というべきものが含まれている。

● 2 次元理想流体の余随伴軌道法による記述, 差分スキーム

2 次元の理想流体の運動方程式を $\text{sdiff}(\Sigma)$ に関する余随伴軌道により説明したのは Arnold である [24]。これは様々な応用をもっている。さらに, $\text{sdiff}(\Sigma)$ を $\text{sl}(N)$ で近似して余随伴軌道法を適用することにより, 保存則の存在など, もとの問題の特徴を保った差分スキームが得られることを Zeitlin が指摘している [25]。

● Moyal 代数係数の非可換 K P・戸田ヒエラルヒー

K P・戸田ヒエラルヒーの多成分版は擬微分作用素の係数を $N \times N$ 行列値に置き換えることにより得られる。ここで $N \rightarrow \infty$ の極限をうまく取れば Moyal 代数が係数に現れるだろう。これは発見的な議論だが, そのような Moyal 代数係数の K P・戸田ヒエラルヒーの理論を実際に ($N \rightarrow \infty$ の極限によらずに) 直接つくることができる。またその準古典極限をつくることもできる。これらは高次元における可積分ヒエラルヒーの例を与える。その中には自己双対重力やその Strachan による変形が自然に埋め込まれることもわかる [26]。

● 2 次元量子重力と弦理論

2次元量子重力とそれに関係する弦の理論は W-infinity 代数が様々な形で関わっている。いわば問題の宝庫である。

- $c < 1$ ($d < 1$) の弦模型, 重力と結合した共形場 — ここでは K P や戸田ヒエラルヒーの解に対する “W-constraint” という形で W-infinity 代数が現れる [27]。また Painlevé 方程式 (I, II 型) を初めとするモノドロミー保存変形の理論が関わっている [28]。
- 位相的弦模型, 重力と結合した位相的共形場 — 既に触れたように, 位相的共形場は無分散 K P ヒエラルヒーなどとの関係があるが, それが重力と結合したものはむしろ K P ヒエラルヒーに関係が深い [29]。この模型は上の模型の極限的な場合とも見なせるが, 少し取扱いやすくなっていて, Kontsevich 積分という形で解を具体的に書くことができる [30]。この場合も W-constraint が現れる。
- $c = 1$ ($d = 2$) の弦模型における “タキオン” の動力学 — ここでも W-infinity に関連する非線形可積分系が解を特徴付ける方程式として現れる [31]。
- $d = 2$ の弦模型における “B R S コホモロジー” の構造 — これは理論に含まれる物理的状態を決定するものであるが, そこに新たな w_∞ 代数が現れる [32]。

この他に black hole の問題などさまざまな話題がある。

● 4次元における $N = 2$ の超弦理論

$d = 4$, $N = 2$ の超弦理論に現れる物理的状態の運動方程式は Plebanski 方程式に他ならない [33]。従って間接的にはあるが, それを通じて $\mathcal{L}w_\infty$ と関係していることになる。

● 量子 Hall 効果, Chern-Simons 理論

量子 Hall 効果は 2次元系に垂直に磁場がかかっている系で起きる。磁場の存在は問題の自由度を実質的に空間 1次元 (相空間では 2次元) に落とす。例えばこの系に関する Chern-Simons 力学系と呼ばれる模型は変数 (A_1, A_2) と Lagrangian

$$L \sim -\frac{k}{8\pi} \epsilon_{ij} A_i A_j$$

をもつ。これはいわゆる特異系であって, A_i の正準共役量を計算すると

$$P_i = \frac{k}{8\pi} \epsilon_{ij} A_j$$

というように A_i で書けて, (A_1, A_2) が正準共役になる. この系の Hamilton 形式では Hamiltonian が消えて 2 次元のシンプレクティック多様体だけが残る. 系の対称性としては $\text{sdiff}(\Sigma)$ つまり w_∞ 代数が現れる訳である. 以上のことを量子力学的に扱うと今度は W_∞ が現れる [34].

7. 様々な W-infinity 代数

これまで説明してきた以外にも W-infinity 代数の概念には様々な変形がある [1].

- supersymmetric W-infinity (超対称性をもつ拡張).
- topological W-infinity (Witten の位相的場の理論に習った拡張).
- W_∞^N 代数. これは W_∞ に $\text{sl}(N)$ あるいは $\text{gl}(N)$ 内部対称性をとり入れたもので, 例えば N 成分 K P ヒエラルヒーの対称性として現れる.
- W_∞, w_∞ 代数. これは W_∞^N において $N \rightarrow \infty$ の極限をとったもの. 非線形可積分系においては, W_∞ は Moyal 代数係数非可換 K P ヒエラルヒーの対称性として, また w_∞ はその準古典極限として実現されると期待される.
- 任意次元のシンプレクティック多様体 M 上の Moyal 代数 $\text{Moyal}(M)$ ならびに Poisson 代数 $\text{Poisson}(M)$. 上の W_∞, w_∞ は $\dim M = 4$ の場合と考えられる. このような代数は自己双対重力を高次元化した hyper Kähler 幾何学に伴って現れる [20].
- 体積保存微分同型の Lie 代数 $\text{sdiff}(V)$, $\dim V = 3$. これは W-infinity とはかなり異質だが, 自己双対重力のある種の可積分変形 (特殊な電磁場と結合したものなど) に現れる [35]. また高次元の多様体上の $\text{sdiff}(M)$ を用いてある種の Calabi-Yau 多様体などを理解する試みもある [36].

8. まとめ

W-infinity 代数は様々な可積分系, 特に K P・戸田ヒエラルヒーや自己双対重力などにおいて, 基本的な役割を果たす. また, 2 次元量子重力など様々な物理系にも姿をあらわす. これらの W-infinity 代数はなんらかの意味で問題の可積分性・可解性と深く関わっている. また共通の W-infinity 代数の構造をもつ系の間にはなんらかの内在的な関連があると期待される. さらに W-infinity 代数の概念自体も様々な形で拡張されている. 以上のようなことについて解説してきた.

W-infinity 代数が K P・戸田ヒエラルヒーにおいて演じる役割は Kac-Moody 代数がこれらの reduction として得られる可積分系 (KdV, Sine-Gordon, など) において演じる役割に比べることができる。W-infinity 代数はどちらかといえばこのように、様々な reduction を行う前の、より普遍的な可積分系を理解することに向いている。また見方を逆転して Kac-Moody 代数やそのもとになる $sl(N)$ から $N \rightarrow \infty$ という極限を考えることによって W-infinity 代数に到達することもできる。これは高次元の可積分系を見つける重要な手がかりを与える。実際、そのようにして 2 次元の可積分系から 4 次元の自己双対重力の方程式を導いたり、K P や戸田ヒエラルヒーの高次元化を探ったりすることがなされている。

参考文献

- [1] 各種の W-infinity 代数とその応用に関する review として
Sezgin, E., Aspects of W_∞ symmetry, Texas A& M preprint CTP-TAMU-9/91, IC/91/206 (hep-th/9112025); Area-preserving diffeomorphisms, w_∞ algebras and w_∞ gravity, Texas A& M preprint CTP-TAMU-13/92 (hep-th/9202086).
- [2] Bakas, I., The structure of the W_∞ algebra, Commun. Math. Phys. 134 (1990), 487-508.
Pope, C.N., Romans, L.J., and Shen, X., The complete structure of W_∞ , Phys. Lett. 236B (1990), 173-178.
Pope, C.N., Romans, L.J., and Shen, X., Ideals of Kac-Moody algebras and realizations of W_∞ , Phys. Lett. 245B (1990), 72-78.
- [3] 共形場の理論とその応用に関する review として
Zamolodchikov, A.B., Exact solutions of conformal field theory in two dimensions and critical phenomena, Reviews in Math. Phys. 1 (1990), 197-234.
- [4] Zamolodchikov, A.B., Infinite additional symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory, Theor. Math. Phys. 65 (1986), 1205-1213.
Fateev, V.A., and Zamolodchikov, A.B., Conformal quantum field theory models in two dimensions having Z_3 symmetry, Nucl. Phys. B280 [FS18] (1987), 644-660.
- [5] Di Francesco, P., Itzykson, C., and Zuber, J.-B., Classical W -algebras, Commun. Math. Phys. 140 (1991), 543-567 およびそこに引用されている文献参照.
- [6] Radul, A.O., Lie algebras of differential operators, their central extension, and W -algebras, Funct. Anal. Appl. 25 (1) (1991), 25-38, およびそこに引用されている文献参照.
- [7] Bilal, A., A remark on the $N \rightarrow \infty$ limit of W_N -algebras, Phys. Lett. 227B (1989), 406-410.
Bakas, I., The large- N limit of extended conformal symmetries, Phys. Lett. 228B (1989), 57-63.
- [8] Park, Q-Han, Extended conformal symmetries in real heavens, Phys. Lett. 236B (1990), 429-432.

- [9] Saveliev, M.V., and Vershik, A.M., Continual analogues of contragredient Lie algebras, *Commun. Math. Phys.* 126 (1989), 367-378.
- [10] J. Hoppe, Quantum theory of a massless relativistic surface, Ph.D. thesis (MIT, 1982); *Elem. Part. Res. J. (Kyoto)* 80 (3) (1989), 145-202.
 Fairlie, D.B., and Zachos, C.K., Infinite-dimensional algebras, sine brackets, and $SU(\infty)$, *Phys. Lett.* 224B (1989), 101-107.
 Pope, C.N., and Stelle, K.S., $SU(\infty)$, $SU_+(\infty)$ and area-preserving algebras, *Phys. Lett.* 226B (1989), 257-263.
 Hoppe, J., Diffeomorphism groups, quantization, and $SU(\infty)$, *Int. J. Mod. Phys. A* 4 (19) (1989), 5235-5248.
- [11] Floratos, E.G., Iliopoulos, J., and Tiktopoulos, G., A note on $SU(\infty)$ classical Yang-Mills theories, *Phys. Lett.* 217B (1989), 285-288.
 Floratos, F.G., and Leontaris, G.K., Integrability of the self-dual membranes in (4+1) dimensions and the Toda lattice, *Phys. Lett.* 223B (1989), 153-156.
 Hoppe, J., Membranes and integrable systems, *Phys. Lett.* 250B (1990), 44-48.
- [12] Park, Q-Han, Self-dual gravity as a large- N limit of the 2D non-linear sigma model, *Phys. Lett.* 238B (1990), 287-290; 2-D sigma model approach to 4-D instantons, *Int. J. Mod. Phys. A* 7 (1992), 1415-1448.
- [13] この節の内容とそれに関連する各種の話題を紹介した本として
 Hoppe, J., *Lectures on integrable systems*, *Lecture Notes in Physics*, New Series m-10 (Springer-Verlag, 1992).
- [14] Sato, M., and Sato, Y., Soliton equations as dynamical systems in an infinite dimensional Grassmann manifold, in: *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Sciences*, U.S.-Japan seminar, Tokyo 1982 (North-Holland, Amsterdam, and Kinokuniya, Tokyo, 1982).
 Date, E., Jimbo, M., Kashiwara, M., and Miwa, T., Transformation groups for soliton equations, in: *Nonlinear Integrable Systems — Classical Theory and Quantum Theory*, Kyoto 1981 (World Scientific, Singapore, 1983).
 Ueno, K., and Takasaki, K., Toda lattice hierarchy, in: *Group representations and systems of differential equations*, *Adv. Stud. Pure. Math.* vol. 4 (Kinokuniya, Tokyo, 1984).
- [15] Watanabe, Y., Hamiltonian structure of Sato's hierarchy of KP equations and a coadjoint orbit of a certain formal Lie group, *Lett. Math. Phys.* 7 (1983), 99-106.
 Yamagishi, K., A Hamiltonian structure of KP hierarchy, $W_{1+\infty}$ algebra, and self-dual gravity, *Phys. Lett.* B259 (1991), 436-441.
 Yu, F., and Wu, Y.-S., Hamiltonian structure, (anti-)self-adjoint flows in KP hierarchy and the $W_{1+\infty}$ and W_∞ algebras, *Phys. Lett.* 263B (1991), 220.
- [16] Takasaki, K., and Takebe, T., Quasi-classical limit of KP hierarchy, W-symmetries and free fermions, Kyoto preprint KUCP-0050/92 (July, 1992). (hep-th/9207081)
- [17] Lebedev, D., and Manin, Yu., Conservation Laws and Lax Representation on Benny's Long Wave Equations, *Phys. Lett.* 74A (1979), 154-156.
 Kodama, Y., A method for solving the dispersionless KP equation and its exact solutions, *Phys. Lett.* 129A (1988), 223-226.
 Kodama, Y., and Gibbons, J., A method for solving the dispersionless KP hierarchy and its exact solutions, II, *Phys. Lett.* 135A (1989), 167-170.

- [18] Krichever, I.M., The dispersionless Lax equations and topological minimal models, *Commun. Math. Phys.* 143 (1991), 415-426.
 Dubrovin, B.A., Hamiltonian formalism of Whitham-type hierarchies and topological Landau-Ginsburg models, *Commun. Math. Phys.* 145 (1992), 195-207.
 Takasaki, K., and Takebe, T., SDiff(2) KP hierarchy, in: *Infinite Analysis*, RIMS Research Project 1991, *Int. J. Mod. Phys. A*7, Suppl. 1B (1992), 889-922.
- [19] Kodama, Y., Solutions of the dispersionless Toda equation, *Phys. Lett.* 147A (1990), 477-482.
 Takasaki, K., and Takebe, T., SDiff(2) Toda equation – hierarchy, tau function and symmetries, *Lett. Math. Phys.* 23 (1991), 205-214; Quasi-classical limit of Toda hierarchy and W-infinity symmetries, in preparation.
- [20] Boyer, C.P., and Plebanski, J.F., An infinite hierarchy of conservation laws and nonlinear superposition principles for self-dual Einstein spaces, *J. Math. Phys.* 26 (1985), 229-234.
 Takasaki, K., Symmetries of hyper-Kähler (or Poisson gauge field) hierarchy, *J. Math. Phys.* 31 (1990), 1877-1888.
- [21] Strachan, I.A.B., The Moyal algebra and integrable deformations of the self-dual Einstein equations, *Phys. Lett.* B282 (1992), 63-66.
- [22] Takasaki, K., Dressing operator approach to Moyal algebraic deformation of selfdual gravity, Kyoto preprint KUCP-0054/92 (December, 1992). (hep-th/9212103)
- [23] Hoppe, J., Olshanetsky, M., and Theisen, S., Dynamical systems on quantum tori algebras, Karlsruhe preprint KA-THEP-10/91 (October, 1991).
- [24] Arnold, V., Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Ann. Inst. Fourier* 16 (1966), 319-361.
- [25] Zeitlin, V., Finite-mode analogues of 2D ideal hydrodynamics: coadjoint orbits and local canonical structure, *Physica D*49 (1991), 353-362.
- [26] Takasaki, K., in preparation.
- [27] このことについては物理学者による多数の論文があるが, *Communications in Mathematical Physics* 誌に掲載されて数学者に入手し易い次の論文のみ掲げておく. そこでの引用文献も参照されたい. ([28] [30] についても同様)
 Fukuma, M., Kawai, H., and Nakayama, R., Infinite dimensional Grassmannian structure of two dimensional string theory, *Commun. Math. Phys.* 143 (1991), 371-403.
 Yoneya, T., Toward a canonical formalism of non-perturbative two-dimensional gravity, *Commun. Math. Phys.* 144 (1992), 623-639.
- [28] Moore, G., Geometry of the string equations, *Commun. Math. Phys.* 133 (1990), 261-304.
 Fokas, A.S., Its, A.R., and Kitaev, A.V., Discrete Painlevé equations and their appearance in quantum gravity, *Commun. Math. Phys.* 142 (1991), 313-344; The isomonodromy approach to matrix models in 2D quantum gravity, *Commun. Math. Phys.* 147 (1992), 395-430.
- [29] 位相的共形場と非線形可積分系の関連についての review として
 Dijkgraaf, R., Intersection theory, integrable hierarchies and topological field theory, IASSNS-HEP-91/91 (December, 1991). (hep-th/9201003)

- [30] Kontsevich, M., Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function, *Commun. Math. Phys.* 147 (1992), 1-23.
Adler, M., and van Moerbeke, P., A matrix integral solution to two-dimensional W_p -gravity, *Commun. Math. Phys.* 147 (1992), 25-56.
- [31] Avan, J., and Jevicki, A., Classical Integrability and Higher Symmetries of Collective String Field Theory *Phys. Lett. B* 266 (1991), 35-41.
Awada, M.A., and Sin, S.J. The string difference equation of $d = 1$ matrix model and $W_{1+\infty}$ symmetry of the KP hierarchy, *Int. J. Mod. Phys. A* 7 (1992), 4791-4802.
D. Minic, J. Polchinski, and Z. Yang, Translation-invariant backgrounds in 1+1 dimensional string theory, *Nucl. Phys. B* 369 (1992), 324-350.
G. Moore and N. Seiberg, From loops to fields in 2d gravity, *Int. Jour. Mod. Phys. A* 7 (1992) 2601-2634.
Das, S.R., Dhar, A., Mandal, G., and Wadia, S.R., Gauge theory formulation of the $c = 1$ matrix model: symmetries and discrete states, *Int. J. Mod. Phys. A* 7 (1992) 5165-5195.
Dhar, A., Mandal, G., and Wadia, S.R., Non-relativistic fermions, coadjoint orbits of w_∞ and string field theory at $c = 1$, *Mod. Phys. Lett. A* 7 (1992), 3129-3146; Classical Fermi fluid and geometrical action for $c = 1$, IASSNS-HEP-91/89 (March, 1992). (hep-th/9204028)
Marshakov, A., On the string field theory for $c \leq 1$, FIAN/TD-8/92 (June, 1992). (hep-th/9208022)
Dijgraaf, R., Moore, G., and Plesser, R., The partition function of 2D string theory, IASSNS-HEP-92/48, YCTP-P22-92 (August, 1992). (hep-th/9208031)
- [32] Klebanov, I.R., and Polyakov, A.M., Interaction of discrete states in two-dimensional string theory *Mod. Phys. Lett. A* 6 (1991), 3273-3281.
Witten, E., Ground ring of two dimensional string theory *Nucl. Phys. B* 373 (1992), 187-213.
Witten, E., and Zwiebach, B., Algebraic structures and differential geometry in 2-d string theory, *Nucl. Phys. B* 377 (1992), 55-112.
- [33] Ooguri, H., and Vafa, C., Geometry of $N=2$ strings, *Nucl. Phys. B* 361 (1991), 469-518.
- [34] Cappelli, A., Trugenberger, C.A., and Zemba, G.R., Infinite symmetry in the quantum Hall effect, CERN-TH 6516/92 (May, 1992). (hep-th/9206027)
Kogan, I.I., Area preserving diffeomorphisms and W_∞ symmetry in a 2+1 Chern-Simons theory, UBCTP-92-23 (revised August 1992). (hep-th/9208028)
Iso, S., Karabali, D., and Sakita, B., Fermions in the lowest Landau level: bosonization, W infinity algebra, droplets, chiral bosons, CCNY-HEP-92-6 (August, 1992). (hep-th/9209003)
- [35] Takasaki, K., Volume-preserving diffeomorphisms in integrable deformations of self-dual gravity, *Phys. Lett. B* 285 (1992), 187-190.
- [36] Park, Q-Han, A master equation for multi-dimensional non-linear field theories, DAMTP R-9224, SNUTP 92-86 (July, 1992). (hep-th/9211037)

補足: “hep-th/xxxxxxx” は高エネルギー物理のプレプリントライブラリーに Tex file

の形で保存されている論文の番号をあらわす。京都大学基礎物理学研究所のプレプリントサーバーに“ftp”することによりこれらの論文を入手することができる。例えば hep-th/9207081 を入手するには以下のようにする。

1. ftp 130.54.107.21 (これはサーバーの IP address である)
2. user ID: anonymous (サーバーは user ID を聞いてくるので “anonymous” と答える)
3. Password: ... (次にパスワードを聞いてくるので自分の E-mail address を答える。)
4. cd HEP-TH (hep-th のプレプリントを収めてあるディレクトリにうつる)
5. cd 9207 (ディレクトリは 4 けたの数を名前にもつサブディレクトリに分かれている。
最初の 2 けたが年, 次の 2 けたが月をあらわしている)
6. get hep-th.9207081 (自分の機械に TeX source file が送られてくる)
7. quit

高エネルギー物理以外の分野のプレプリントもおなじサーバーから入手できる。こうして入手した論文には各業界標準のプレプリント書式ファイルを input するものが多い。それらの書式ファイルはサーバーの別のディレクトリに入っているので、前述のように anonymous ftp でサーバーに入ってから搜してみるとよい。