

有限小領域平均応力に基づく破壊基準を用いた 材端切欠き梁の破壊解析

増田 稔・田浦 理

A Fracture Analysis of End Notched Timber Beams using the Fracture
Criterion Based on Average Stresses in the Finite Small Area

Minoru MASUDA and Osamu TANOURA

Key words: fracture criterion, notched beam, wood beam, end notch, finite element method

要 旨

木材梁に切欠きがあるとその部分に応力集中が生じるため、切欠きのない場合に比べてかなり低い荷重で破壊に至る。本研究では、「木材の破壊は、ある有限の小領域の平均応力が破壊の条件を満たした時に生じる」とする増田の提案する有限小領域理論を、材端に切欠きを持つ梁の曲げ問題に適用し、クラック発生荷重の理論値と実験値との比較により、有限小領域理論の妥当性を検討した。

切欠き率が12.5, 25, 37.5, 50%の直角切欠き4種と傾斜の異なる切欠き2種の計6種類の試験体について3点曲げ試験を行い、またこれについて有限要素法を用いて応力解析を行った。切欠き部周辺での有限小領域における平均応力を数通りの異なる寸法の有限小領域について計算し、それが破壊条件を満たすときの荷重、すなわちクラック発生荷重を求め、実験値と比較した。

その結果、直角切欠きを持つ材では、有限小領域が繊維方向0.8~1.2mm×繊維直角方向0.2~0.4mmにおいて、実験値に近い理論値が得られた。しかし斜めの切欠きや切欠き率の小さい場合には、理論値が実験値より大きな値となった。これらはいずれも切欠き底においてせん断応力が支配的となっている場合であり、解析に用いたせん断強度が実際よりも大きい、あるいは、せん断の応力-ひずみの関係が塑性的（非線形）であることを示唆した。なおこの非線形性は画像相関法を用いた著者の他の研究において確かめられた。従って、せん断強度としてねじりにより求まる値よりもイス型せん断により求まるより低い値を用いることにより、理論値と実験値はよく一致した。

1. 緒 言

木材を構造部材として用いる場合、他の部材との接合点において切欠かれることが多いが、切欠き隅には応力が集中するため、切欠きのない場合に比べて低い荷重で破壊に至る。従って、これらの切欠きを持つ材の破壊荷重を理論的に予測し対策を講じることは、木材を有効利用するために重要である。しかしながら、単なる弾性応力解析では切欠き隅が特異点すなわち、応力が荷重の大小に関わらず無限大となる点となってしまう、破壊荷重を予測することはできない。そこで考え出されたのがいわゆる線形破壊力学による解析であるが、木材のような異方体に適用しよ

うとする場合、モード I（開口）とモード II（面内せん断）の混合した応力状態での破壊基準（クライテリオン）を、どのようにすべきかなど、未解決の点が多い。

そこで増田は、線形破壊力学の基本的概念を包含し、かつ特異点を持つ場合も持たない場合も同一手法で統一的に解ける解析方法として「有限小領域破壊理論」を提案した^{1,2)}。有限小領域破壊理論とは、“切欠き付近の応力（あるいはひずみ）解析を行い、有限小領域の平均応力（あるいは平均ひずみ）が破壊条件に達したとき破壊が生じる”とする考え方であり、たとえ特異な応力集中部があっても、ある有限の小領域での平均値をとるので、有限の応力あるいはひずみとなり、従来の破壊基準（クライテリオン）の適用が可能となる^{3,4)}。

2. 実験および結果

実験にはカナダ産の SPF (Spruce-Pine-Fir) 材の中からパインのみを選び出して用いた。試験体の形状は長さ540mm、高さ85mm、幅30mmで、切欠きの深さは切欠き率 (b/h) を12.5, 25, 37.5, 50%の4種とした (Fig. 1 (i))。また切欠き率が37.5%の場合については、切欠きが斜めになる試験体も2種作製した (Fig. 1 (ii), 1 (iii))。切欠きのない梁についても試験を行い、各々について10体ずつ合計70体を測定し、材料の選定にあたっては切欠き部周辺や試験体下側（引張側）に節などの欠点がないように、また各種類ごとの比重の平均がほぼ同一になるように配慮した。

曲げ試験は、スパン500mmの両端単純支持、中央集中荷重とし、材端下側の引張側に切欠きを置いた。梁のたわみの測定には1/100mm精度のデジタル変位計（小野測器、GS-001）を用い、曲げ負荷の測定には10t万能試験機（島津製作所 RH-10）を用いて行った。

また、無欠点材の曲げヤング率を求めるため、別途、長さ540mm、高さ15mm、幅25mmの試験体を用いて曲げ試験を行った。実験結果を Table 1 に示す。

90°の端部切欠きを持つ A～D の試験体では切欠き底に初期クラックが発生し、クラックが進展してから最終的な破壊に達するものが多く、主に繊維に直角方向の引張（横引張）で破壊した。しかし傾斜切欠きを持つ（R, S）試験体では初期クラックが徐々に進展して終局破壊に至る試験体数（ n ）は少なく、主にせん断力によって一気に破壊した。既往の研究¹⁾では「切欠きを持つ梁のクラック発生荷重は、荷重—変位曲線の比例限度と一致している」として初期クラックを求めたが、今回の実験では初期クラックが発生しないで、比例限度を超してから一気に破壊して

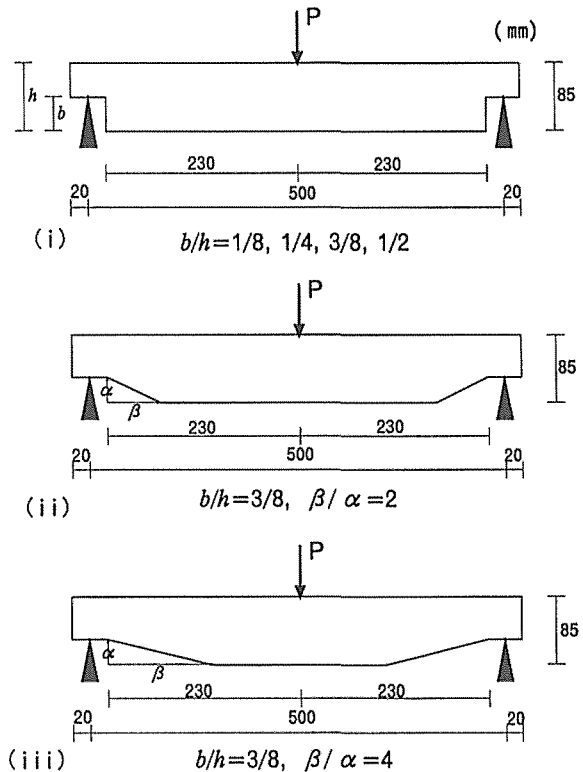


Fig. 1 Geometry of end-notched beams and methods of bending tests

(i) Rectangular notched beam

(ii), (iii) Inclined notched beam

Table 1 Experimental results of the bending tests

Type of specimens	b/h	β/α	$P_{\max}$ (kgf)	Ratio to N (no notch)	COV (%)	P_c (kgf)	Ratio to $P_{\max}$	n	COV (%)	Density (g/cm ³)
N	0.0	0	1547	100	9.8	—	—	—	—	0.540
A	12.5	0	1261	81.5	15.0	1103	87.4	10	13.8	0.534
B	25.0	0	836	54.1	11.9	732	87.6	9	11.0	0.528
C	37.5	0	649	41.9	21.6	528	81.3	7	32.4	0.534
D	50.0	0	470	30.4	16.4	401	85.2	7	15.0	0.521
R	37.5	2	866	56.0	18.6	845	97.6	3	21.2	0.535
S	37.5	4	1198	77.4	11.0	1198	100.0	0	11.0	0.528

Number of specimens is 10 for each type.

N: specimens without notches

A, B, C, D: specimens with rectangular notches

R, S: specimens with inclined notches

$P_{\max}$: ultimate load

P_c : crack initiation load

n: number of specimens whose ultimate fracture occurs after gradual propagation of initial crack

Density: average density of 10 specimens

しまうものも多いので、 P_c (クラック発生荷重)としては「目視により初めてクラックが確認できた荷重」を用いた。従って、試験体 R, S では最大荷重 $P_{\max}$ と P_c が等しくなるものが多い。

3. 解析方法および結果

解析に用いる弾性定数としては実験で求めた曲げヤング率 E_b (スパン梁丈比が大きいので $E_b = E_L$ と見なした) をもとに他の弾性定数を推定した (Table 2)。なお推定には澤田の研究結果⁵⁾ より次式を用いた。

$$E_T = 0.045E_L$$

$$G_{LT} = 0.055E_L$$

$$\mu_{LT} = 0.5$$

E : ヤング率 (弾性率)

G : せん断弾性率

μ : ポアソン比

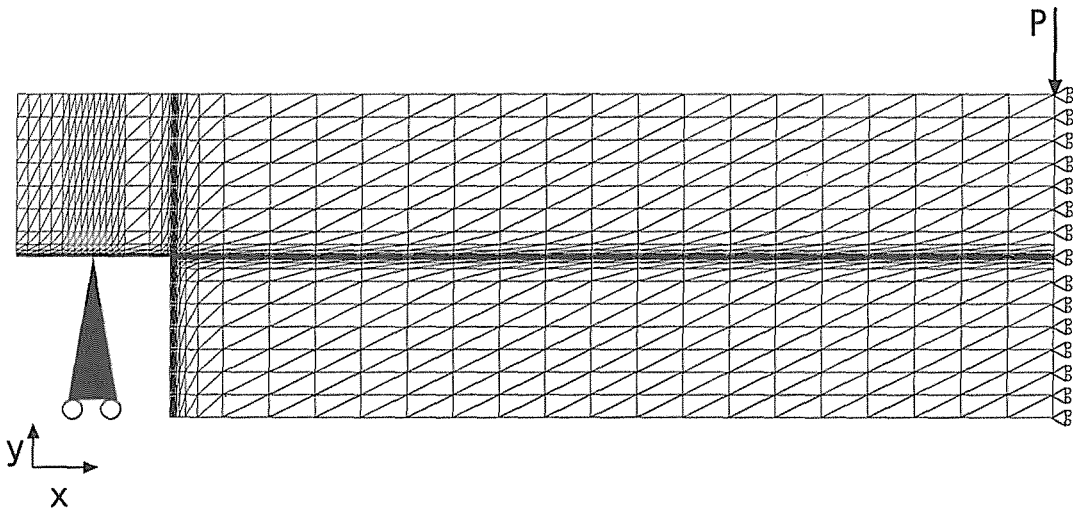
L, T : それぞれ繊維方向および接線方向

Table 2 Elastic constants used for the finite element analysis

$E_x (E_L)$ (10 ³ kgf/cm ²)	$E_y (E_T)$ (10 ³ kgf/cm ²)	$G_{xy} (G_{LT})$ (10 ³ kgf/cm ²)	$\mu_{yx} (\mu_{TL})$
143.0	6.4	7.9	0.023

試験はスパン方向に左右対称であるので、スパン中央より左半分のみについて解析を行った。応力解析には有限要素法 (FEM, Finite Element Method) を用いたが、FEM 解析プログラムとして、FORTRAN 言語で書かれた東大大型計算機センターのライブラリ・プログラム Y6/TC/AA01/(菊池文雄ほか) 等方体用 2 次元解析プログラムを、独自に異方体用に手直しし、さらにより細かい要素分割ができるように改良したものを用いた。計算には京都大学の大規模計算機センターのメインフレーム FACOM M1800 を用いた。

FEM で用いる要素分割の様子を試験体 D を例にとり Fig. 2 に示す。応力集中を正しく表現するため、応力の集中する切欠きの隅はメッシュを細かくし、そこから離れると徐々に粗くなるようにした。また支持点周りも細かくした。メッシュの一番粗いところの寸法は、 x 方向 (スパン方向, 繊維方向) で 12mm, y 方向 (梁丈方向) で 6mm であった。また一番細かいところの寸法

Fig. 2 Finite element mesh used in Type D specimen ($b/h=0.5$)

は x 方向で 0.4mm , y 方向で 0.1mm (試験体 R では一部 0.05mm の部分がある) であった。Fig. 2 には長方形を左下がりに切った三角形要素が示されているが, 右下がりとも左下がりの影響をなくするため, 実際の応力解析にはその両方を行い, 平均値を用いた。

今回の解析では, 弾性限度内でぜい性的に破壊が起こるものとしてクラック発生荷重の予測を行った。まず第一段階として, 荷重 1000kgf を試験体に加え, その時の各要素の応力を FEM により計算する。次に切欠き底付近の有限小領域の平均応力を計算し, 破壊条件式(1)に代入して f_A を求め, 次に $f_A = 1$ となる時の荷重 P_{tc} を計算した^{3,4)}。

$$f_A^2 = \xi_x \left(\frac{\bar{\sigma}_x}{\sigma_{xcr}} \right)^2 + \xi_y \left(\frac{\bar{\sigma}_y}{\sigma_{ycr}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\tau}_{xy}}{\tau_{xycr}} \right)^2 \geq 1 \quad (1)$$

— : 有限小領域における平均応力

cr : 破壊応力

ξ : $\bar{\sigma} \geq 0$ (引張応力) の時 $\xi = 1$

$\bar{\sigma} < 0$ (圧縮応力) の時 $\xi = 0$

破壊条件式(1)には σ_{xcr} , σ_{ycr} , τ_{xycr} の値が必要であるが, それは JIS 試験体で得られる値ではなく, 寸法効果を考慮して有限小領域に対応した寸法での値をとるべきと考えられる。しかしそのような実験値は未だ得られていないので, ここでは寸法効果を加味した以下の推定値を用いた^{3,6-8)}。

$$\sigma_{xcr} = 1500 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$$

$$\sigma_{ycr} = 80 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$$

$$\tau_{xycr} = 120 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$$

有限小領域の大きさとしては, 繊維方向に $0.4, 0.8, 1.2, 1.6\text{mm}$ を仮定し, 繊維に直角方向には $0.2, 0.4, 0.8\text{mm}$ について検討した。なお, 斜めの切欠きでは Fig. 3 からわかるように有限小領域のとり方が完全な長方形ではなく, 長方形の一部が斜めに切り取られた形になる。

破壊条件式(1)によって求められるクラック発生荷重の理論値と, 実験値との比を Table 3 に示す。また, 試験体 C が破壊する荷重 (618 kgf) を各試験体に与えた時の, 破壊条件式中の

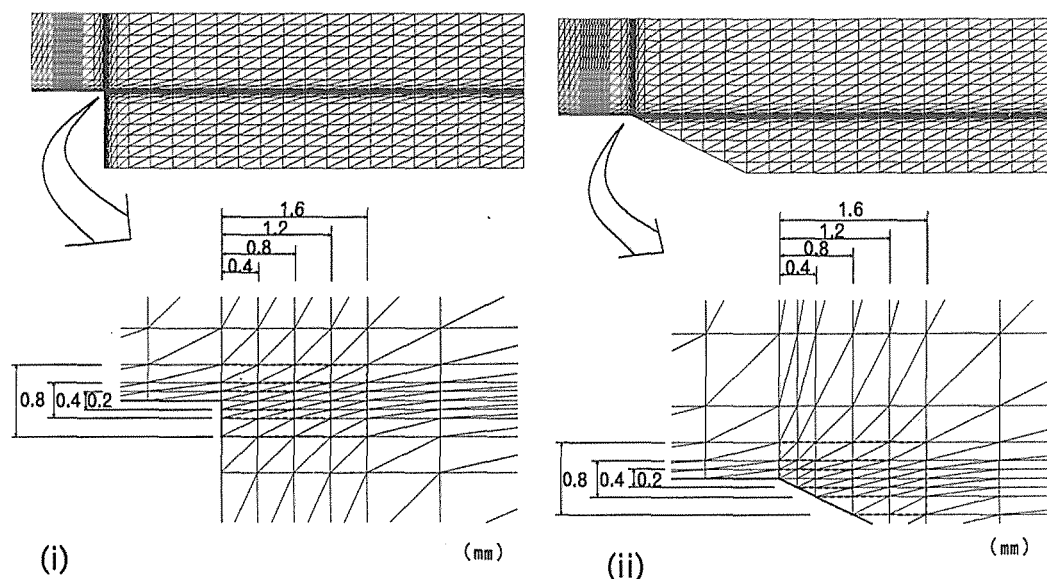


Fig. 3 Finite element meshes and the finite small area

(i) Type A ~ D specimen

(ii) Type R specimen

$(\bar{\sigma}_x/\sigma_{xcr})^2$, $(\bar{\sigma}_y/\sigma_{ycr})^2$, $(\bar{\tau}_{xy}/\tau_{xycr})^2$ を Fig. 4. に示した。

4. 考 察

Fig. 4 を見てわかるとおり, 90° の切欠きを持つ試験体 A ~ D では $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\tau}_{xy}$ が切欠き率の増加とともにそれぞれ同じように増加し, 破壊が主として横引張応力により引き起こされていることがわかる。しかし傾斜切欠きを持つ試験体 R, S では, 全般的に応力が小さく, かつ $\bar{\tau}_{xy}$ が $\bar{\sigma}_y$ に比べて相対的に大きくなっている。このことは, 傾斜切欠きを付けると $\bar{\sigma}_y$ が小さくなり, 破壊に対する $\bar{\tau}_{xy}$ の影響が大きくなることを示しており, 試験体 R, S の破壊の主因がせん断応力であったという実験結果と一致している。

Table 3 を見てみると, それぞれの有限小領域において A ~ D の P_{tc}/P_c の値は似ているが, R, S 特に S の値が異なっている。その原因としては, τ_{xycr} の推定値として用いた $120 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ が大き過ぎたことが推測される。木材のせん断破壊について, 大河平, 鈴木⁸⁾ のねじり試験によるせん断強度の研究があるが, 塑性を考慮に入れたせん断破壊などまだ不明な点が多く, 未だ τ_{xycr} の確かな値は得られていない。

そこで τ_{xycr} の値を変えて P_{tc} を求めてみた。その結果を Table 4 に示す。 τ_{xycr} の値を小さくすると COV (変動係数) が全体的に小さくなるのがわかる。すなわち, $\tau_{xycr} = 80 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ の時, 試験体 S でも理論値と実験値の値が近くなり, COV も小さくなった。参考のため τ_{xycr} の値を変化させた場合のクラック発生荷重の理論値を, 有限小領域が $1.6\text{mm}(x) \times 0.2\text{mm}(y)$ の場合を例にとり Fig. 5 に示す。 $\tau_{xycr} = 80 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ の時に実験値と理論値がよく一致することがわかる。

せん断における応力とひずみの関係を調べるため, 直方体せん断試験⁹⁾における荷重増加に伴う変形の様子をビデオマイクロスコープで撮影・収録し, 画像相関法によりひずみの測定を行っ

Table 3 Theoretical load of crack initiation and ratio to experimental result.

 $(\sigma_{\text{scr}}=1500, \sigma_{\text{ycr}}=80, \tau_{\text{xycr}}=120 \text{ (kgf/cm}^2\text{)})$

Specimen type		A	B	C	D	R	S		
b/h (%)		12.5	25	37.5	50	37.5	37.5		
β/α		0	0	0	0	2	4		
P_c (kgf)		1102.8	732.8	527.6	400.5	845.2	1197.6	Ave.	COV (%)
Finite small area $a_x \times a_y$ (mm×mm)	0.4×0.2	859	529	385	298	784	1598	0.87	27.4
		0.78	0.72	0.73	0.74	0.93	1.33		
	0.8×0.2	1081	661	479	369	885	1666	1.02	18.3
		0.98	0.90	0.91	0.92	1.05	1.39		
	1.2×0.2	1260	767	554	425	963	1742	1.15	13.6
		1.14	1.05	1.05	1.06	1.14	1.45		
	1.6×0.2	1414	858	618	473	1027	1807	1.25	10.5
		1.28	1.17	1.17	1.18	1.21	1.51		
	0.4×0.4	970	590	426	328	882	—	0.87	11.6
		0.88	0.80	0.81	0.82	1.04	—		
	0.8×0.4	1175	710	511	392	953	1810	1.10	19.0
		1.07	0.97	0.97	0.98	1.13	1.51		
	1.2×0.4	1348	812	583	446	1020	1850	1.22	13.9
		1.22	1.11	1.10	1.11	1.21	1.54		
	1.6×0.4	1500	901	645	492	1078	1896	1.32	10.7
		1.36	1.23	1.22	1.23	1.28	1.58		
	0.4×0.8	1166	695	497	380	—	—	0.97	5.7
		1.06	0.95	0.94	0.95	—	—		
	0.8×0.8	1348	800	570	435	1075	—	1.15	7.8
		1.22	1.09	1.08	1.09	1.27	—		
	1.2×0.8	1511	894	635	483	1122	2055	1.34	14.7
		1.37	1.22	1.20	1.21	1.33	1.72		
	1.6×0.8	1658	978	694	527	1168	2067	1.43	11.3
		1.50	1.34	1.32	1.32	1.38	1.73		

The upper values show theoretical results: P_{tc} . The lower values show P_{tc}/P_c i. e. ratio of theoretical and experimental results.

x : longitudinal (grain) direction

y : direction perpendicular to the grain

P_c : experimental values of crack initiation load

P_{tc} : theoretical values of crack initiation load

た結果⁹⁾, 応力とひずみの関係 (s-s 曲線) が弾塑性と言うほどではないが, 強い非線形性を示し, JIS いす型せん断試験での破壊強度よりかなり低い応力において s-s 曲線に屈曲点が観察された。これについては更に詳細な研究を行っており, 今後, このような材料非線形を考慮した破壊の解析が必要となる。

5. 結 論

今回の研究により, 以下のことが明らかとなった。

Table 4 Theoretical load of crack initiation and ratio to experimental results.

($\sigma_{xcr}=1500$, $\sigma_{ycr}=80$, $\tau_{xycr}=80$ (kgf/cm²))

Specimen type		A	B	C	D	R	S		
b/h (%)		12.5	25	37.5	50	37.5	37.5		
β/α		0	0	0	0	2	4		
P_c (kgf)		1102.8	732.8	527.6	400.5	845.2	1197.6	Ave.	COV (%)
Finite small area $a_x \times a_y$ (mm×mm)	0.4×0.2	723 0.66	453 0.62	333 0.63	259 0.65	582 0.69	1181 0.99	0.70	19.9
	0.8×0.2	893 0.81	560 0.76	411 0.78	320 0.80	655 0.78	1215 1.01	0.82	11.5
	1.2×0.2	1027 0.93	645 0.88	473 0.90	367 0.92	712 0.84	1265 1.06	0.92	8.0
	1.6×0.2	1141 1.03	717 0.98	526 1.00	408 1.02	758 0.90	1308 1.09	1.00	6.5
	0.4×0.4	834 0.76	516 0.70	376 0.71	291 0.73	662 0.78	— —	0.74	4.4
	0.8×0.4	988 0.90	612 0.84	447 0.85	345 0.86	712 0.84	1332 1.11	0.90	11.9
	1.2×0.4	1116 1.01	692 0.94	505 0.96	391 0.98	759 0.90	1349 1.13	0.99	8.0
	1.6×0.4	1225 1.11	762 1.04	556 1.05	430 1.07	801 0.95	1378 1.15	1.06	6.5
	0.4×0.8	1031 0.94	624 0.85	450 0.85	346 0.86	— —	— —	0.88	4.5
	0.8×0.8	1166 1.06	707 0.97	510 0.97	392 0.98	815 0.96	— —	0.99	4.0
	1.2×0.8	1283 1.16	781 1.07	563 1.07	433 1.08	846 1.00	1521 1.27	1.11	8.6
	1.6×0.8	1386 1.26	846 1.15	611 1.16	469 1.17	877 1.04	1517 1.27	1.17	7.1

Refer to Table 3.

- 1) 直角切欠きの存在で繊維に直角方向の引張応力が増大し、破壊荷重が著しく低下する。傾斜切欠きをもつ試験体では、直角切欠きに比べ、繊維に直角方向の引張応力が小さくなり、破壊荷重の低下も小さくなる。終局的には、せん断応力が主因となって破壊に至る。
- 2) 有限小領域破壊理論によるクラック発生荷重の予測値は実験値とよく一致した。特に、破壊条件式で用いる τ_{xycr} としてねじり試験などで得られる値より低い値、すなわちイス型せん断試験に近い値を用いると、予測値と実験値はさらにより一致を示した。
- 3) 有限小領域の大きさとしては、繊維方向が0.8～1.6mm、繊維と直角方向では0.2～0.4mmが最適であることがわかった。これは割裂試験などの既往の結果^{1-4,10)}と一致し、木材の細胞の大きさのかたまりがユニットであることを示唆している。
- 4) せん断変形に対する応力-ひずみ関係の非線形性を今後より一層明らかにする必要があり、非線形性あるいは塑性を考慮に入れることにより、より正確な破壊強度予測が期待できる。

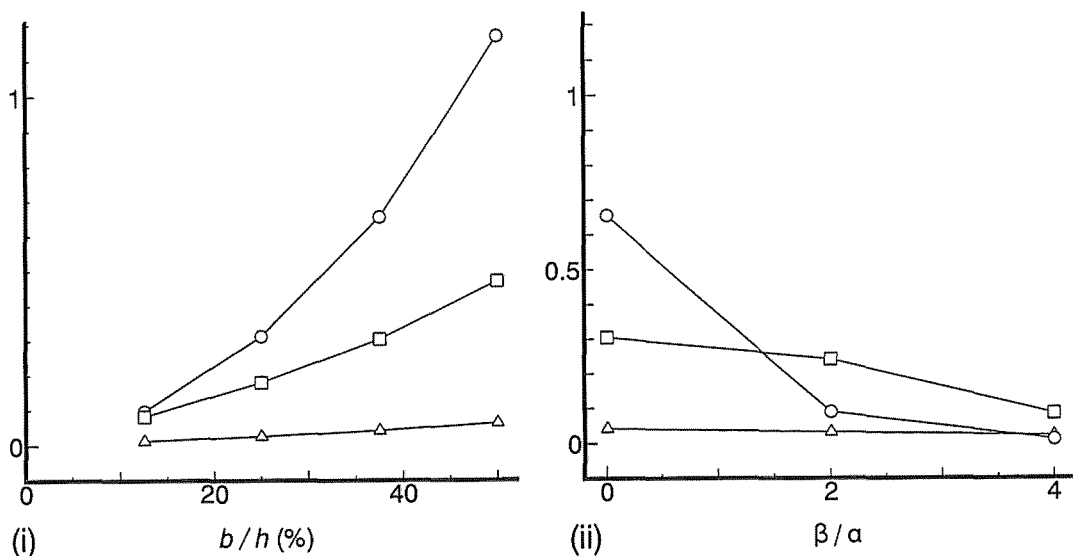


Fig. 4 Influences of notch ratios and inclined angles on the stress levels in the finite small area

Finite small area: 1.6mm (x) $\times$ 0.2 mm (y), $P=642\text{kgf}$ ($f_A=1$ in case C)

(i) Rectangular notched specimens (A ~ D)

(ii) Inclined notched specimens (C, R, S)

$$\triangle : \left(\frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{\sigma}_{\text{ver}}} \right)^2 \quad \circ : \left(\frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_{\text{ver}}} \right)^2 \quad \square : \left(\frac{\bar{\tau}_{xy}}{\bar{\tau}_{\text{xyer}}} \right)^2$$

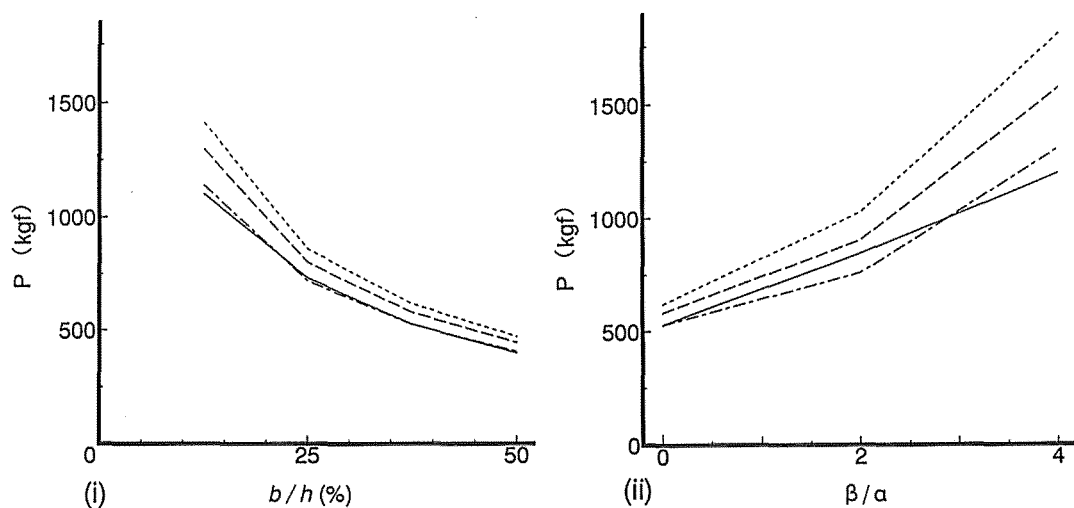


Fig. 5 Influences of notch ratios and inclined angles on the crack initiation load

Finite small area: 1.6mm (x) $\times$ 0.2mm (y)

(i) Rectangular notched specimens (A ~ D)

(ii) Inclined notched specimens (C, R, S)

— Experimental
 - - - $\tau_{\text{xyer}}=120$ (kgf/cm²)
 - · - $\tau_{\text{xyer}}=100$ (kgf/cm²)
 · · · $\tau_{\text{xyer}}=80$ (kgf/cm²)

なお、本研究を遂行するにあたり、試験体作製に御協力いただいた林産機械学講座澤田豊助手並びに木材工学講座松本純治君に謝意を表します。

文 献

- 1) 増田 稔 (1986) 木材の破壊条件に関する理論的考察. 京大演報58. 241-250
- 2) M. Masuda (1988) Theoretical consideration on fracture criteria of wood — Proposal of finite small area theory. Proceedings of the 1988 International Conference on Timber Engineering, Seattle. Vol. 2. 584-595
- 3) M. Masuda (1990) Fracture Criteria of Wood — Proposal of the Finite Small Area Fracture Criterion — Application to a Block Shear Test. Proceedings of the 1990 International Timber Engineering Conference, Tokyo. Vol. 1. 28-33
- 4) M. Masuda (1994) Theoretical consideration of fracture criteria of wood: Proposal of non-linear finite small area fracture criterion. Pacific Timber Engineering Conference Gold Coast Australia. Vol. 2. 479-485
- 5) 澤田 稔 (1970) 木質平面材料の強度性能. 木材学会誌. 16(6). 251-256
- 6) 大河平行雄・増田 稔・鈴木直之 (1988) 米ツガ材引張強さの寸法効果. 三重大学生物資源学部紀要.No 1. 1-6
- 7) 大河平行雄・増田 稔・鈴木直之 (1989) 木材圧縮強さの寸法効果. 三重大学生物資源学部紀要.No 2. 13-21
- 8) 鈴木直之・大河平行雄 (1982) 木材矩形断面棒のねじり試験によるせん断強さの測定について. 三重大学農学部学術報告.No65. 41-49
- 9) 小池寿典・増田 稔 (1995) 画像相関法を用いた直方体 2 面せん断のひずみ解析. 第45回日本木材学会大会発表要旨集. 146
- 10) 見館雅寿 (1994) 引張側中央部に切欠きを持つ木材梁の破壊条件に関する理論的考察. 京都大学農学部林産工学科 課題研究論文

Summary

Fracture loads of end notched beams were analysed by using the finite small area fracture theory¹⁻⁴⁾ (FAFT). The theory(FAFT) is that "failure in wood occurs when the average stresses (or average strains) in the finite small area satisfy the fracture criterion."

Tension stress perpendicular to the grain at the reentrant corner is the primary cause of fracture when the notch is rectangular (Type A ~ D). But in the case of inclined notch (Type R and S), fracture occurs in shear.

The theoretical results coincide well with the experimental ones. And this comparison suggests that stress-strain relationship in shear is non-linear or near elasto-plastic. So that 30% smaller τ_{xyer} than that obtained in torsion test *i. e.* near chair type shear strength gives good agreement between theoretical and experimental results when FAFT is used based upon the elastic analysis of stress distribution.

This study suggests that sizes of the finite small area of FAFT are 0.8 ~ 1.6mm in grain direction and 0.2 ~ 0.4mm in perpendicular to the grain. These sizes coincide with those obtained in previous studies^{1-4,10)}. Theoretical analysis using FAFT based on non-linear stress analysis will give more accurate prediction of fracture load in wood structural elements.