

Shift の cyclic vectors と 正定値関数の分解

福岡教育大学 内山 充 (Mitsuru Uchiyama)

1. H^2 によつて単位円周 ∂D 上の Hardy 空間を表わす。その n -直交和を H_n^2 , その上の移動作用素を S_n と書く。 $\gamma \in B(\mathcal{H})$ に対して $\bigvee_{n=0}^{\infty} \gamma^n \mathcal{L} = \mathcal{H}$ となる集合 $\mathcal{L}$ は cyclic と呼ばれる。 $f \in H_n$ が S_n の cyclic である必要十分条件は f が outer function である。これについては次のような拡張が得られた。

命題 1. 集合 $\{h_1, \dots, h_m\} \subset H_n$ が S_n に対して cyclic であるための必要十分条件は $m \geq n$ かつ 行列 $M = (h_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ の n 次小行列式のうち少なくとも一つは 0 でなく, 又それらは共通な inner function を因子に持たない。ここで $h_j = \begin{pmatrix} h_{1j} \\ \vdots \\ h_{nj} \end{pmatrix}$ と表記している。

証明 (必要性) H_n^2 に属する関数 $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e_i$ を e_i と書く。各 i に対し多項式 $p_{ij}^{(k)}$ を

$$e_j = \lim_{k \rightarrow \infty} (p_{1j}^{(k)} h_1 + \dots + p_{mj}^{(k)} h_m) \quad \text{in } H_n^2 \quad (1)$$

となるようにとる。 $m \times n$ 行列 $(p_{ij}^{(k)})$ を $P^{(k)}$ とおく。 H_n^2 に属する n 個の関数から成る行列の行列式は ある j に対し

H^2 に属し, その関数に関して連続である。従って (1) から

$$1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \det (M \cdot p^{(k)}) \quad \text{in } H^2$$

となる。これから $m \geq n$ かつ

$$1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\sigma} \det M_{\sigma} \cdot \det p_{\sigma}^{(k)} \quad (2)$$

を得る。ここで σ は m 個から n 個取り出す組み合わせで、

$M_{\sigma}, p_{\sigma}^{(k)}$ はそれに対応する小行列である。(2) から、

$\det M_{\sigma} \neq 0$ なる σ は存在し、 $\det M_{\sigma}$ は共通な inner function を因子にもたない事が分る。

(十分性) $\bigvee_{k=0}^{\infty} S_n^k \{h_1, \dots, h_m\}$ が H_n^2 ではないと仮定すればある $n \times l$ ($l \leq n$) 行列値 inner function $\oplus$ により $\oplus H_l^2$ と表わされる。従って $h_j = \oplus g_j$ ($1 \leq j \leq m$) となる $g_j \in H_l^2$ がある。 H^2 の関数を成分にもつ $l \times m$ 行列 $(g_1, \dots, g_m)$ を G と表わせば

$$M = \oplus G \quad \therefore M_{\sigma} = \oplus G_{\sigma}$$

となる。ここで G_{σ} は $l \times n$ 小行列である。ある σ に

ついて $\det M_{\sigma} \neq 0$ から $l = n$ となる。従って

$\det M_{\sigma}$ は $\det \oplus$ を共通因子とするから仮定に反する。

2. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の contraction T の unitary part が ルーグ測度に関して 絶対連続なら

は、 H^∞ に属する g について $g(T)$ が定義できる。

Alexander は

$$g_1(T)x_1 + \dots + g_n(T)x_n = 0 \text{ for } g_i \in H^\infty \Rightarrow g_1 = \dots = g_n = 0$$

をみたす ベクトル $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ は $\overset{T \text{ に対し}}{\text{解析的に}}$ 一次独立であると定義した。Alexander は次の命題を証明しているが基本的には M. Cambern, M. Uchiyama の結果そのものである。

命題 (Alexander). H_n^2 のベクトル $\{h_j = (h_{ij})_{1 \leq i \leq n} \mid 1 \leq j \leq n\}$ が S_n に対して解析的-一次独立である $\iff \det(h_{ij}) \neq 0$

証明 $\Leftarrow$ 明白.

($\Rightarrow$) Cambern, Uchiyama の結果により

各 t について $\{h_j\}_{1 \leq j \leq n}, \dots, \{h_n\}_{1 \leq j \leq n}$ の張る空間の次元は一定でかつ、その直交補空間は 共役正則関数によって張られる。従って $\det(h_1, \dots, h_n) = 0$ ならば $f_j \in H^2$ で

$$\overline{(f_j(e^{it}))}_{1 \leq j \leq n} \perp (h_k(e^{it}))_{1 \leq k \leq n} \quad (k=1, \dots, n)$$

なるものがある。これは $\sum_{j=1}^n f_j(e^{it}) h_{kj}(e^{it}) = 0$ を意味し

$$f_1 h_1 + \dots + f_n h_n = 0 \text{ となる。}$$

これから $g \cdot f_i \in H^\infty$ となる g をとれば 証明終り。

系 2. $\{h_1, \dots, h_n\}$ が S_n に対して cyclic ならば解析的-一次独立である。

系 3. $\{h_1, \dots, h_n\}$ が S_n に対して 解析的-一次独立 $\iff$

$\{h_1(e^{it}), \dots, h_n(e^{it})\}$ が a. e. 一次独立である。

片側移動作用素に擬相似になる作用素はどのようなものか、という問題がある。これについて Alexander は $T \subset S$ かつ T が解析的-一次独立な cyclic vectors をもてば $T \sim S$ である事を示した。これについてもう少し詳しい結果を得た。

定理 4. $T \subset S_n$, n 個のベクトルから成る集合が T に対して cyclic ならば $T \sim S_n$ 。特に $X T = S_n X$ $T Y = Y S_n$ なる quasi-affinity X, Y で、ある outer function ψ に対して $X Y = \psi(S_n)$ $Y X = \psi(T)$ をみたすようなものが存在する。

補助定理 H_n^2 上の S_n に対して $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ が cyclic であるとき、ある outer $\psi \in H^\infty$ に対して $X f_i = \psi e_i$ $X S_n = S_n X$ なる quasi-affinity X が存在する。

($\circ$) $h \in H^\infty$ と $|h(e^{it})| = 1 / (\|f_1(e^{it})\|^2 + \dots + \|f_n(e^{it})\|^2 + 1)^{1/2}$ となる outer function とする。 H_n^2 の列ベクトルから $n \times n$ 行列 $(f_1, \dots, f_n)$ を Δ とおくと $\|h \cdot \Delta(e^{it})\| \leq 1$ 。

$h \cdot \Delta$ の algebraic adjoint を P とおく。

$$h P f_1 = P \cdot h \cdot \Delta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \det(h \Delta) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \det(h \Delta) e_1$$

$$\det(h \Delta) = h^n \cdot \det \Delta$$

命題 1 から $\det \Delta$ は outer である。従って

hP を X , $\det(h\Delta)$ を ν とすればよい。

定理4の証明 X_1 を $X_1 T = S_n X_1$ なる quasi-affinity, $\{h_1, \dots, h_n\}$ を T に対して cyclic としよう。

$\{X_1 h_1, \dots, X_1 h_n\}$ は S_n に対して cyclic だから系2によつて S_n に対して解析的-一次独立。従つて $\{h_1, \dots, h_n\}$ は T に対して解析的-一次独立。Alexander と同様に

$$T Y = Y S_n, \quad Y e_i = F(T) h_i \quad \text{for some } F \in H^\infty$$

なる quasi-affinity Y の存在を示す事は容易。補助定理から $C S_n = S_n C$, $C X_1 h_i = Y e_i$ なる C , ϕ がある。 $X = C X_1$ とおけば

$$Y X h_i = \psi(T) F(T) h_i, \quad X Y e_i = F \psi e_i$$

となり、定理は証明できた。

3. T の生成する weakly closed algebra を $\mathcal{A}(T)$ と表わす。*-algebra に対する Von Neumann の double commutant theorem と同じような事がいつ成立するかという問題がある。すなわち $\mathcal{A}(T)'' = \mathcal{A}(T)$ となるような T はどのようなものか? これについて K. Takahashi の次のような定理がある。ここではその簡単な証明を与えよう。 T の unitary part は絶対連続であるとしよう。

定理 (K. Takahashi). $X T = S X$ なる dense range を持つ X があれば $\{\mathcal{A}(T)\}'' = \mathcal{A}(T)$

証明 $XT=SX$ なる dense range をもつ X が存在すれば

$$A \in \{A(T)\}'' \Rightarrow A \in \text{alg Lat } T \quad \text{を示そう。}$$

実際, $\forall x \in \mathcal{H}$ に対して $\mathcal{L}_x = \bigvee_{n \geq 0} T^n x$ とおこう。

$$\exists Y_1: H_1^2 \rightarrow \mathcal{L}_x \quad \text{dense range} \quad Y_1 S_1 = T Y_1.$$

今 $C S = S_1 C$ なる dense range をもつ C は存在する。

$Y: H_1^2 \rightarrow \mathcal{H}$ を Y_1 の値域を拡大したものとする。

$$Y C S = Y S_1 C = Y_1 S_1 C = T Y_1 C = T Y C$$

$$\therefore Y C X T = T Y C X \quad \therefore Y C X A = A Y C X$$

$$\therefore A \overline{Y C X \mathcal{H}} \subset \overline{Y C X \mathcal{H}} \quad \therefore A \mathcal{L}_x \subset \mathcal{L}_x$$

次に $(X \oplus X)(T \oplus T) = (S \oplus S)(X \oplus X)$, $A \oplus A \in \{A(T \oplus T)\}''$ より

$$A \oplus A \in \text{alg Lat } (T \oplus T).$$

一般に $\underbrace{A \oplus \cdots \oplus A}_n \in \text{alg Lat } (\underbrace{T \oplus \cdots \oplus T}_n)$

$$\therefore A \in \mathcal{A}(T).$$

4. ここでは $L^2(\partial D)$ 上の e^{it} による積作用素を V とする。Szegő の定理から $f \in L^2$ が V に対して cyclic である必要十分条件は $f \neq 0$ a.e. $\int_0^{2\pi} \log |f(e^{it})| dt = -\infty$.

$\Theta(e^{it})$ を ∂D 上で定義された n 次正值行列を値にもつ関数で, 各成分は L^2 級であるとしよう。このとき $\theta_1, \dots, \theta_n \in H_n^2$ があり, 各 (i, j) 成分が (θ_j, θ_i) となれば Θ は分解

可能 (factorable) と呼ばれる。特に scalar の場合には Szegő - Beurling の結果から $0 \leq f \in L^1$ について 次の命題は同値である。

- (a) f は分解可能である
- (b) $\int_0^{2\pi} \log f(e^{it}) dt > -\infty$
- (c) $\bigvee_{n=0}^{\infty} V^n f^{1/2}$ が V^* によって不変ではない。

更に一般の正值関数 Θ については、次の Masani - Wiener の定理がある。

定理 (M-W) Θ の列ベクトルを $(h_1, \dots, h_n)$ とすれば Θ が分解可能である必要十分条件は $\bigvee_{n=0}^{\infty} V_n^* (h_1, \dots, h_n)$ が V_n, V_n^* に対して不変であるような部分空間を含まない。ここで V_n は n 個の V の直交和、すなわち L_n^2 上の e^{it} による横作用素である。

定理 (Devintz) $\Theta(e^{it})^{-1}$ が a.e. 存在し

$\int_0^{2\pi} \log^+ \|\Theta(e^{it})^{-1}\| dt < \infty$ ならば Θ は分解可能。

定理 (Wiener) $\Theta(e^{it})$ が有限行列で、a.e. 可逆のとき、 Θ が分解可能である必要十分条件は

$$\int_0^{2\pi} \log \det \Theta(e^{it}) dt > -\infty.$$

以上の事が分解可能性について分っている大きな結果だと思うが、Devintz の定理は一般的には逆は成立しない。

例えば 各自然数 j について $|f_j(e^{it})|^2 = e^{-\frac{1}{t+j}}$ なる

$f_j \in H^2$ が存在する。 $\Theta(e^{it}) = \text{diag}(f_1, \dots, f_n)$

とすれば $\|\Theta(e^{it})^{-1}\| = e^{\frac{1}{t}} < \infty$ かし

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \|\Theta(e^{it})^{-1}\| dt = \infty.$$

それでも有限行列の場合には Devinatz の逆も成立する。

命題 5. Θ が有限行列で $a.e.$ 可逆 のとき次は同値.

(1) Θ は分解可能

(2) $\int_0^{2\pi} \log \det \Theta(e^{it}) dt > -\infty$

(3) $\int_0^{2\pi} \log^+ \|\Theta(e^{it})^{-1}\| dt < \infty$

($\because$) (2) $\Rightarrow$ (3) を示せばよい。

$$\|\Theta(e^{it})^{-1}\| \leq \frac{\|\Theta(e^{it})\|^{n-1}}{\det \Theta(e^{it})} \leq \frac{\|\Theta(e^{it})\|_1^{n-1}}{\det \Theta(e^{it})}$$

ここで $\|\Theta(e^{it})\|_1$ は Θ の対角成分の和であるから可積分である。従って

$$\int \log \|\Theta(e^{it})^{-1}\| dt \leq (n-1) \int \log \|\Theta(e^{it})\|_1 dt - \int \log \det \Theta dt < \infty.$$

無限の場合について次の結果を得た。

定理 6. $\Theta(e^{it})$ が $a.e.$ 可逆とする。

$$\left. \begin{array}{l} I - \Theta(e^{it}) \in (Z.C) \quad a.e. \\ \int \log \det \Theta(e^{it}) dt > -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \Theta \text{ は分解可能}$$

証明. (i) $0 \leq \Theta(e^{it}) \leq I$ $a.e.$ としよう。 $\|\Theta(e^{it})^{-1}\| \geq 1$

$$\therefore \log^+ \|\Theta(e^{it})^{-1}\| = \log \|\Theta(e^{it})^{-1}\| \quad \Theta(e^{it}) \text{ の } contractive$$

algebraic adjoint $\Theta(e^{it})^a$ と $0 \leq \det \Theta(e^{it}) \leq 1$ がある, 7

$$\Theta(e^{it})^{-1} = \frac{\Theta(e^{it})^c}{\det \Theta(e^{it})} \quad \text{である.}$$

これから $\int \log^+ \|\Theta(e^{it})^{-1}\| dt < \infty$ となる.

(ii). $I - \Theta(e^{it}) \in (\tau.c)$ より $\Theta(e^{it})$ は a.e. 有界である.

しかし一様有界とは限らない. $\|\Theta(e^{it})\| = M(t)$ とおく.

$$I - \Theta(e^{it}) = A^+(e^{it}) - A^-(e^{it}), \quad A^+, A^- \geq 0 \text{ a.e.}$$

と分解する. $\Theta(e^{it}) = \int_{(0, M(t)]} \lambda dE_t(\lambda)$ としたとき

$$A^+(e^{it}) = E_t(0, 1] - \int_{(0, 1]} \lambda dE_t(\lambda), \quad A^-(e^{it}) = -E_t(1, M(t)] + \int_{(1, M(t)]} \lambda dE_t(\lambda)$$

そこで

$$B(e^{it}) \equiv E_t(1, M(t)] + \int_{(0, 1]} \lambda dE_t(\lambda), \quad C(e^{it}) \equiv E_t(0, 1] + \int_{(1, M(t)]} \lambda dE_t(\lambda)$$

とすれば

$$I - B(e^{it}) = A^+(e^{it}) \in (\tau.c), \quad \|B(e^{it})\| \leq 1 \quad \text{a.e.}$$

$$I - C(e^{it}) = -A^-(e^{it}) \in (\tau.c), \quad C(e^{it}) \geq 1 \quad \text{a.e.}$$

$$B(e^{it})C(e^{it}) = \Theta(e^{it}) \quad \text{となるから}$$

$$\det \Theta(e^{it}) = \det B(e^{it}) \cdot \det C(e^{it})$$

そこで $\det B(e^{it}) \leq 1$, $\det C(e^{it}) \geq 1$ に注意すれば

$$-\infty < \int \log \det \Theta(e^{it}) dt = \int \log \det B(e^{it}) dt + \int \log \det C(e^{it}) dt$$

から $-\infty < \int \log \det B(e^{it}) dt$ である. (i) より

$$\int \log^+ \|B(e^{it})^{-1}\| dt < \infty \quad \text{となる. 従って}$$

$$\|\Theta(e^{it})^{-1}\| \leq \|C(e^{it})^{-1}\| \cdot \|B(e^{it})^{-1}\| \leq \|B(e^{it})^{-1}\| \quad \text{から}$$

$\int \log^+ \|\Theta(e^{it})^{-1}\| dt < \infty$ となり Θ は分解可能である.

(注) 定理の逆は成立しない。その例は以下によって得られる。

$(0, 2\pi]$ において $l_n(t)$ を $l'_n(t) \downarrow e^{-\frac{1}{t}}$ $l_n(t) \geq \delta_n > 0$ となるようにとる。 $l_{n+1}(t)/l_n(t)$ を $g_{n+1}(t)$, $l_0=1$ とおく。

$$\int \log g_{n+1}(t) dt = \int \log l_{n+1}(t) dt - \int \log l_n(t) dt > -\infty$$

従って $g_n(t) = |f_n(t)|^2$ $f_n \in H^2$ なる f_n がある。

$$\prod_i g_i(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n+1}(t)}{l_n(t)} = e^{-\frac{1}{t}}$$

$\Omega = \text{diagonal}(f_1, \dots, f_n, \dots)$ とおけば

$\Omega^* \Omega$ は factorable, しかし

$$\int \log \det(\Omega^* \Omega) dt = \int \log (\prod g_i(t)) dt = -\infty.$$