

二者択一の定理の折り紙への応用

九州大学・大学院数理学研究院 川崎 英文

Hidefumi Kawasaki
Faculty of Mathematics,
Kyushu University

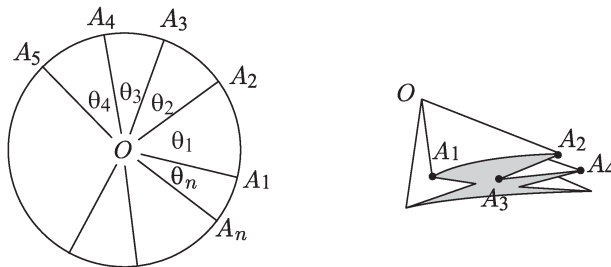
折り鶴を折る工程を思い浮かべれば分かるように、ほとんどの伝承折り紙は折りたためる。その証拠に、我々は紙を机の上に置き、辺と辺を合わせたり、点と点を合わせたりして、紙を折りたたみながら、折り紙を折っている。そして最後の工程で、鶴の羽を広げたり、風船を膨らませたりして、立体的な作品に仕上げるのである。

このように、紙を平坦に折ること（平坦可折性）は折り紙の基本操作であり、折り紙を数学的に考察する上で基本的かつ重要な研究課題である。単頂点折り、折り紙分子、繰り返し模様については平坦可折性の研究が進んでいるが、対称性のないものについてはさほど研究が進んでいない。本論文では、凸 n 角形の n 個の頂点から折り線が伸びる n 頂点折り、いわゆるねじり折りの平坦可折性を考察する。

本研究では、これまで折り紙の数学的な研究で全く使われなかった二者択一の定理を用いる。二者択一の定理とは、線形等式・不等式系（線形システムとよぶ）が解をもつかどうかを、その双対な線形システムで特徴づける定理であり、最適化の分野でよく用いられてきた。本研究を通して、二者択一の定理が折り紙の研究に有効であることを示す。

1 単頂点折り

展開図が1点から放射状に延びる n 本の半直線からなるものを単頂点折りとよび、その平坦可折性は完全に解明されている。 n -頂点折りは単頂点折りを含むので、単頂点折りに関する基礎知識が必要になる。本節でそれを紹介する。



定理 1 (川崎の条件) n 本の半直線からなる単頂点折りについて、 n 本の折り線にうまく山谷をつけて折りたたむことが出来るための必要十分条件は、 n が 2 以上の偶数で、

角の交代和 $\theta_1 - \theta_2 + \cdots - \theta_n$ が 0 になることである. 特に, $n = 4$ の場合を**伏見の条件**とよぶ.

単頂点折りが川崎の条件を満たすときでも, 山谷を適切に選ばなければ折りたためない. 次の補題は自明であるが, 山谷を決める際に意外と役に立つ.

補題 1 扇形を中心から延びる 2 本の線で折りたたむとき, $\alpha > \delta < \beta$ ならば, δ を挟む 2 つの折り線の山谷は逆になる. これを**極小角条件** (隣接山谷条件) とよぶ.

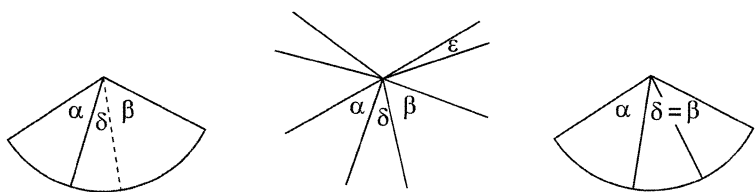


図 1: (左) δ を挟む 2 つの折り線の山谷は逆になる. (中) δ は極小角で, ε が最小角である. (右) $\delta = \beta$ の場合は, δ を挟む折り線の山谷は自由に選べる.

定理 2 (前川の条件) 平坦な単頂点折りの山線数と谷線数の差は 2 である.

頂点周りの最小角と最大角が一意に決まるとき, その頂点は**正則**であるという.

補題 2 正則な頂点における, 4 本の折り線からなる単頂点折りが折りたためるならば, 最大角を挟む折り線の山谷は同じである (**最大角条件**).

2 n 頂点折り

頂点が $v_1, \dots, v_n$ の凸多角形周りの n 頂点折りとは, 図 2 (左) のように, 展開図が, 凸 n 角形の頂点と辺, 及び, 頂点から出る複数本の半直線からなる折り方である. また, 頂点 v から出る辺と半直線の数の合計を**次数**とよび, $\deg v$ と書く.

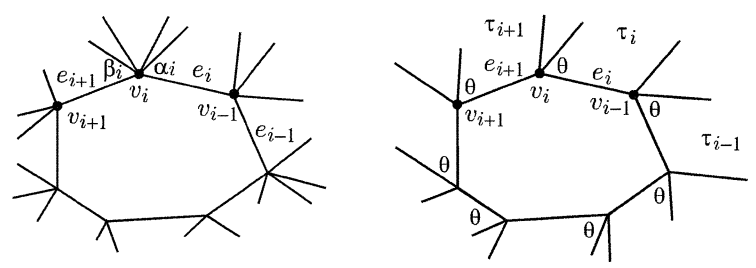


図 2: n -頂点折り (左) が折りたためるならば, (右) のように, 各頂点の次数は 4 で, 帯が辺となす角はすべて等しい.

n -頂点折りが折りたためるならば、定理3で示すように、各頂点の次数は4になる。また、図2(右)のように、辺 e_i の両端から出る2本の半直線は平行になり、それらで囲まれる領域 τ_i を帯とよぶ。さらに、帯 τ_i と辺 e_i がなす角はすべて等しい。

定理3 ([6]) n 頂点折りに適当に山谷をつけて折りたためるならば、以下が成立する。

- (a) 各頂点から出る半直線は2本である。
- (b) 隣接する2頂点から出る半直線4本のうち、内側の2本は平行で山谷は逆である。
- (c) 帯が多角形の辺となす角はすべて等しい。

平坦可折であるための6つの必要条件：伏見の条件、川崎の条件、前川の条件、極小角条件、最大角条件、平行条件を合わせて (n 頂点折りの) 平坦可折条件とよぶ。

3 ねじり折りとホール

平坦可折条件を満たす n 頂点折りで、多角形の辺の山谷が同じものをねじり折りとよぶ。本節では、移動後の図形には τ' の様に'をつけて表す。図3はねじり折りの工程であるが、多角形 P の中央に、帯 τ' や錐 C'_i で覆われない領域ができる。境界も含めたその領域をホールとよぶ。ホールの正確な定義は(3.4),(3.5)で与える。

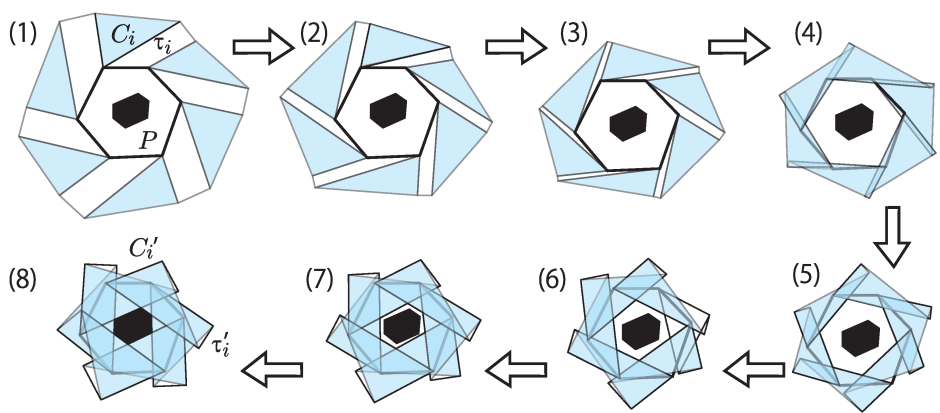


図 3: Twist2.eps

補題3 図4の帯 τ_1 と錐 C_1 を折ると、 C_1 は A_1 を中心に 2θ 回転した錐 C'_1 に移る。

証明. 直線 l, m が点 c で交わり、 l から m への反時計回りの角度が θ のとき、直線 l, m に関する鏡映の積 $R_m R_l$ は c における反時計回りの θ 回転になる。これを図4に適用すればよい。 ■

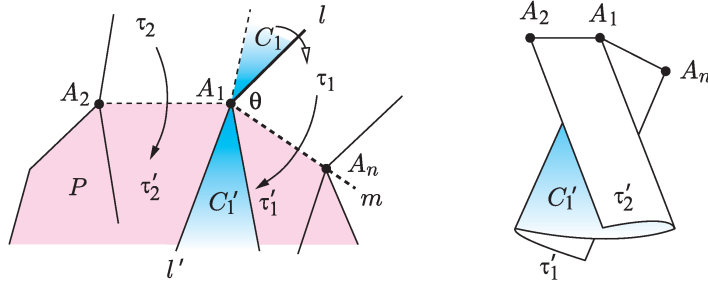


図 4: 錐 C_1 を l で山折りした後, 帯 τ_1 を m で谷折りすると, C_1 は -2θ 回転する.

定理 4 ([6]) ねじり折りが折りたためるための必要十分条件は, ホールが空でないことである.

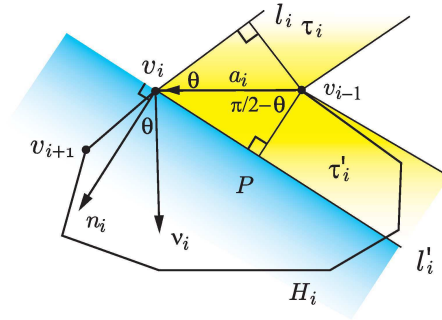


図 5: 帯 τ_i で定まる半空間 H_i .

以下において, ホールを正確に定義し, その性質を調べる. 図 5 の様に, 多角形 P の有向辺ベクトルと内向きの法線ベクトルを, それぞれ

$$a_i := v_i - v_{i-1}, \quad \nu_i := R_{\frac{\pi}{2}} a_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.1)$$

とし, 閉半空間を

$$P_i := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \nu_i^T x \geq \nu_i^T v_i\} \quad (3.2)$$

とおくと, 凸多面体 P は $P = P_1 \cap \dots \cap P_n$ と表される. 同様に, 帯 τ'_i の左側の閉半空間を H_i とすると, H_i の境界の法線ベクトル n_i を

$$n_i := R_{\frac{\pi}{2}-\theta} a_i \quad (3.3)$$

で与えることができて,

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid n_i^T x \geq n_i^T v_i\} \quad (3.4)$$

となる. このとき, $H := H_1 \cap \cdots \cap H_n$ を**ホール**とよぶ. すなわち

$$H = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid n_i^T x \geq n_i^T v_i \ (i = 1, \dots, n)\}. \quad (3.5)$$

ホールを解析するために, 二者択一の定理を利用する. **二者択一の定理**とは, 線形等式・不等式系 (線形システム) が解を持つかどうかを, 双対システムとよばれる別の線形システムの解で特徴づける定理であり, 本論文では Gale の二者択一の定理 [4] が有効に機能する.

定理 5 (Gale) A を $n \times m$ 行列, $b \in \mathbb{R}^n$ として, 線形不等式 $Ax \geq b$ が解 $x \in \mathbb{R}^m$ をもつことと, 双対システム (3.6) が解 $y \in \mathbb{R}^n$ をもたないことは同値である.

$$y \geq 0, \quad y^T A = 0, \quad y^T b > 0. \quad (3.6)$$

ホールの場合, 双対システムは次のよう表される.

$$y = (y_1, \dots, y_n) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n y_i n_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n y_i n_i^T v_i > 0. \quad (3.7)$$

定理 6 (a) ホールが空でないための必要十分条件は, (3.8) を満たす $y = (y_1, \dots, y_n)$ が存在しないことである.

$$y \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n y_i a_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n y_i n_i^T v_i > 0. \quad (3.8)$$

- (b) 帯が垂直 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) の場合, ホールは空である.
- (c) $\theta = 0$ の場合, ホールは P に一致する.
- (d) ホールは θ に関して非単調増加で, 連続的に変化する.
- (e) ある $0 < \bar{\theta} < \frac{\pi}{2}$ が存在して, 任意の $0 \leq \theta \leq \bar{\theta}$ に対してホールは空でなく, 任意の $\bar{\theta} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に対してホールは空である.

定理 7 (Helly, [5, Theorem 21.6]) $C_i \subset \mathbb{R}^d$ ($i = 1, \dots, n$) を凸集合の集まりとする. もし, それらの共通集合が空ならば, $|I| \leq d + 1$ なる $I \subset \{1, \dots, n\}$ で, $\cap_{i \in I} C_i$ が空になるものが存在する.

定理 6(b) と Helly の定理を組み合わせると, 次の結果が得られる.

定理 8 次の 3 条件は互いに同値である.

- (a) ホールは空である.

- (b) 高々3つの $p, q, r \in \{1, \dots, n\}$ が存在して, $H_p \cap H_q \cap H_r$ は空である.
 (c) 高々3つの $p, q, r \in \{1, \dots, n\}$ と $y_p, y_q, y_r \geq 0$ が存在して,

$$y_p n_p + y_q n_q + y_r n_r = 0, \quad y_p n_p^T v_p + y_q n_q^T v_q + y_r n_r^T v_r > 0. \quad (3.9)$$

定理 9 凸多面体 P の辺 a_i を延長した直線で定まる閉半空間で, P を含む側を P_i とする. ホールが空でないとき, $\cap_{i \in I} P_i$ が有界であるような $I \subset \{1, \dots, n\}$ に対して

$$\bigcap_{i \in I} H_i^c = \emptyset. \quad (\because \bigcap_{i \in I} \tau_i^{\circ'} = \emptyset). \quad (3.10)$$

ただし, H_i^c は H_i の補集合を表す. 特に, 辺 a_p, a_q, a_r を延長した直線で P を含む三角形が形作られるとき,

$$H_p^c \cap H_q^c \cap H_r^c = \emptyset. \quad (\because \tau_p^{\circ'} \cap \tau_q^{\circ'} \cap \tau_r^{\circ'} = \emptyset) \quad (3.11)$$

4 謝辞

本研究は JSPS 科研費 16K05278 の助成を受けている. .

参考文献

- [1] 伏見康二, 伏見満枝, 折り紙の幾何学, 日本評論社, (1979).
- [2] 川崎敏和, 平坦折り紙の山折り線と谷折り線の関係, 佐世保工業高等専門学校研究報告, 第 27 号, (1990) 55-79.
- [3] 川崎敏和, バラと折り紙と数学と, 森北出版.
- [4] O. L. Mangasarian: *Nonlinear programming* (McGraw-Hill, New York, 1969).
- [5] R. T. Rockafellar: *Convex Analysis* (Princeton University Press, 1970).
- [6] 山口大貴, 川崎英文: 多角形周りの平坦折り. 日本応用数理学会 2016 年度年会, 予稿集, (2016), 448-449.