

有理楕円曲面における或る種の双有理変換

静岡大理 藤本圭男 (Yoshio Fujimoto)

sectionをもつ相対的極小な有理楕円曲面が $\mathbb{P}^2$ の 9 点ブローアップであり、 $\mathbb{P}^2$ の 3 次曲線の pencil から構成できる事はよく知られている。これに或る種の双有理変換を施して、重複ファイバーを持つ有理楕円曲面を構成する事を目標とする。

重複ファイバーを持つ有理楕円曲面は、sectionを持つ場合と比較して余り知られていない様だ。主な理由は $\mathbb{P}^2$ の 9 点ブローアップであるにもかかわらず、特異点を許す $\mathbb{P}^2$ の曲線の pencil を扱う為、構成が面倒なこと、或いは重複ファイバーが唯 1 本故、(log 変換によらない) 分岐被覆を用いる構成が困難な事による。

しかし、永田先生の "rational surface I, II." において、無限個の (-1) -曲線を含む代数曲面の構成の際、用いられた virtual linear system (i.e. $\mathbb{P}^2$ の指定された何点かで、与えられた重複度の特異点をもつ曲線の linear system) の一部として、

上記の "Halphen" linear pencil は既に何度も登場している。又、
 広中・松村 "Formal functions and formal embeddings" の Remark (5.1.2.)
 でも、以下の命題 1 と関連した事実が述べられていた。

尚、ここで扱う双有理変換は、Harbourne & Lang (Trans. 1988) が "Halphen transform" と呼んでいるものの一部と本質的に同等である。以下で構成する重複ファイバーをもつ有理楕円曲面は、 $\mathbb{P}^2$ の 9 点ブローアップとみた際、blow-up の中心は必然的に infinitely near point を含む。故に、'Halphen' pencil より更に退化した $\mathbb{P}^2$ の曲線の pencil が登場する。

命題 1. C を $\mathbb{P}^2$ の非特異 3 次曲線とし、 C の変曲点 Q を 1 つ固定する。 C に Q を単位元とするアーベル群の構造を入れ、群演算を $\pm$ で記す。今、 C 上に 9 点 $P_1, \dots, P_9$ (infinitely near point も許す) をとり、 $\mathbb{P}^2$ を 9 点 P_i ($1 \leq i \leq 9$) で blow-up して得られた曲面を S とおく、この時、 S が有理楕円曲面の構造を持つ為の必要十分条件は、 $P_1 + \dots + P_9 \in C$ が位数有限 (m とおく) になることである。更に次のいずれかが成り立つ。

A) $m = 1$ ならば S は section をもつ。

B) $m > 1$ ならば、 S は重複度 m の重複ファイバーを唯一本持つ。

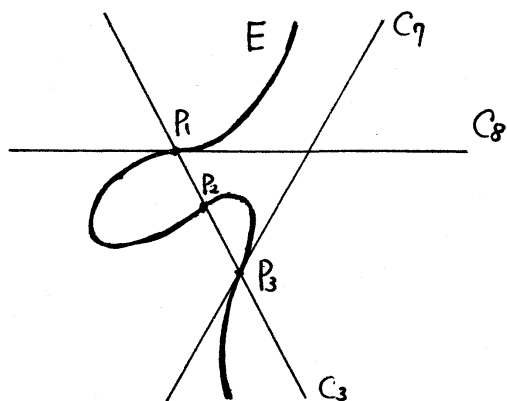
elliptic fibration は共に、 $\mathbb{P}^1$ に $-mK_S$ で一意的に与えられる。

命題1の証明は、楕円曲面の標準因子公式とAbelの定理から従う。次に命題1からの直接の帰結として、標題の双有理変換を定義する。

命題2. $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を section を持つ相対的極小な有理楕円曲面、2個の section $\Omega_i (i=1, 2)$ でその差 $\Omega_1 - \Omega_2$ が torsion section (位数 m) と仮定する。次に φ の正則ファイバー f を任意にとり、(-1)曲線 Ω_2 を blow-down し、一点 $P := \Omega_1 \cap f$ を blow-up して曲面 X を得る。この時、 $\bar{f}$ を f の proper transform とすると、 $\pi_{|m\bar{f}|}: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は唯一本の重複ファイバー $m\bar{f}$ を許す有理楕円曲面になる。

注 Ω_1 の proper transform $\bar{\Omega}_1$ は、 $\pi_{|m\bar{f}|}: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ の特異ファイバーの既約成分に変身する。

例 E を $\mathbb{P}^2$ の非特異3次曲線、 $P_1, P_3 \in E$ は変曲点。
 C_6, C_7 を各々 P_1, P_3 における接線とする。



E と $C_3 + C_4 + C_8$ により生成される P^2 の 3 次曲線の pencil を L とする。有理写像 $\pi_{14}: P^2 \dashrightarrow P^1$ の不確定点を P^2 の 9 点ブローアップで解消して、section をもつ有理楕円曲面 S を得る。容易な計算より、 S の Mordell-Weil 群は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と同型で、 $\{e_i, 1 \leq i \leq 3\}$ より成る。(cf. 下図)

S を 1 点 $P_2 = E' \cap e_2$ で blow-up し、 e_1 を blow-down して、新たに X を得る。 $\pi_{13}E: X \rightarrow P^1$ により X は重複度 3 の重複ファイバー $3\bar{E}$ を唯一本持つ有理楕円曲面となる。この際、 S の I_9 -型特異ファイバーは、 X の II^* -型特異ファイバーに変身する。

$3E$ と $6C_3 + 2C_4 + C_8$ により生成される P^2 の 9 次曲線の pencil を L' とおく。有理写像 $\pi_{14}: P^2 \dashrightarrow P^1$ の不確定点を、 P^2 の 9 点ブローアップで解消して、 X を得る。

