

l_p -space 間の diagonal operator を通して

分解可能な operator について

九州工大 加藤 幹雄

Banach space 間の operator の研究に於いて, 特定の operator を通しての分解可能性は, しばしば扱われている。nuclear operator が diagonal operator $D: l_\infty \rightarrow l_1$ を通して分解されること, absolutely p -summing operator が $C(K) \hookrightarrow L_p(K)$ を通して分解されること等はよく知られている。ところでこれまでに, l_p -space 間の具体的な operator について, 一定の結果が得られてきている。例えば, inclusion map についての absolutely summing 性, diagonal operator の nuclear norm, 或いはそれらの approximation numbers 等である。これに伴って, 最近, それらの operator を通して分解可能であるような operator がいくつか導入され, 研究されている。一つは, Jarchow [4], Terzioğlu [10] による (p, q) -factorable operator ((p, q) -operator ともいう) であり, これは inclusion map $l_p \hookrightarrow l_q$ ($p \leq q$) を通して分解される operator である。もう

一つは, Hutton [2] による r -factorable operator であり, これは type $l_{\frac{1}{r},1}$ (i.e. approximation numbers の sequence が Lorentz space $l_{\frac{1}{r},1}$ に属する) の diagonal operator $D: l_{\infty} \rightarrow l_1$ を通して分解される operator である。なお, これらの operator はいずれも, Pietsch の意味で p -factorizable operator ([7], l_p -space を通して分解可能), また, (p, q, r) -nuclear operator ([8]) の class に属し, そこで統一的に議論されている。

さて, r -factorable operator (Hutton) の導入の直接的な意義を振り返ってみよう。

$T: E \rightarrow F$; nuclear

$\Leftrightarrow$ T は nuclear diagonal operator $D: l_{\infty} \rightarrow l_1$ を通して分解される。

そして, type l' operator は Hilbert space 間で nuclear operator と一致するが, 上と同様の形の命題は不成立である。即ち,

$T: E \rightarrow F$; of type l'

$\nRightarrow$ T は type l' の diagonal operator $D: l_{\infty} \rightarrow l_1$ を通して分解される。 (cf. [2])

この事から次の様な問題が生じるだろう:

(1) type l' の diagonal operator $D: l_{\infty} \rightarrow l_1$ を通して

分解される operator の研究。

(2) type l' operator は type ? の diagonal operator $D: l_\infty \rightarrow l_1$ を通して分解できるか？

(3) 一般に, type l^p operator に関する分解定理は得られないか？

(1)の観点から, 1-factorable operator, それを拡張して, r -factorable operator が導入された訳であるが, §1 では, さらに分解を (l_p, l_q) 間 ($p > q$) に一般化し, 彼女の main theorem (tensor product characterization) が同様の形で成立する様に定義を拡張する。即ち, (l_p, l_q) 間の type $l_{\frac{p}{s}, s}$ ($1/s = 1/q - 1/p$) の diagonal operator による分解可能性を議論する。この際, (2)に関連して type l_p operator との関係が主眼の一つであり, これについて一定の結果が得られるが, best ではない。

(2)については, Banach space 間ではまだ殆んど何も得られていない。§2 でこれにふれる。

(3)も未解決であるが, §3 では, この観点から Terzioğlu, Jarchow 等の結果を見直してみたい。

§1

E, F 等は Banach space とする。まず若干の定義を思い起しておこう。

$T \in \mathcal{L}(E, F)$ の n -th approximation number は $\alpha_n(T) = \inf \{ \|T - A\| ; A \in \mathcal{L}(E, F), \text{rank of } A \leq n \}$ で定義される。

diagonal operator $D \sim \{\lambda_n\} : l_p \rightarrow l_q$ ($1 \leq q < p \leq \infty$) は, $D(\{\xi_n\}) = \{\lambda_n \xi_n\}$ で定義される operator であり, 以下の議論に於いて $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ ($\forall n$) と仮定して一般性を失わない。

これについて次のことが基本的である。

補助定理 ([3], [9]) $1 \leq q < p \leq \infty$, $1/s = 1/q - 1/p$ とする。

$D \sim \{\lambda_n\} : l_p \rightarrow l_q$ ($|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$) の approximation number は $\alpha_n(D) = \left\{ \sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i|^s \right\}^{1/s}$ である。

$1 \leq p \leq \infty$ に対して,

$$l_p(E) = \{ \{x_n\} \subset E ; \{ \langle x_n, f \rangle \} \in l_p (\forall f \in E') \}$$

$$l_p^{(*)}(E') = \{ \{f_n\} \subset E' ; \{ \langle x, f_n \rangle \} \in l_p (\forall x \in E) \}$$

とする。

以下, 特に断わらない限り, $1 \leq q < p \leq \infty$, $0 < r < \infty$ とし, $1/s = 1/q - 1/p$ とする。

定義 $T \in \mathcal{L}(E, F)$ が (l_p, l_q) - r -factorable であるとは T が type $l_{\frac{p}{r}, s}$ の diagonal operator $D : l_p \rightarrow l_q$ (i.e. $\{\alpha_n(D)\} \in l_{\frac{p}{r}, s}$) を通して分解されることである。

この operator の class を $\mathcal{F}_{p, q, r}(E, F)$ で表わす。

$T \in \mathcal{F}_{p, q, r}(E, F)$ に対して,

$$f_{p, q, r}(T) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \alpha_{n-1}(D)^s \right\}^{1/s}$$

とおく。ここで $\inf$ は $T = VDU$, $\|U\| \leq 1$, $\|V\| \leq 1$,
 $\{\alpha_{n-1}(D)\} \in \ell_{p,s}$ なる分解全体にわたってとる。

命題 1 $(\mathcal{K}_{p,q;r}, f_{p,q;r})$ は quasi-normed ideal
 である :

$$f_{p,q;r}(T_1 + T_2) \leq 2^{1+1/p+1/q+\max(1/s, 1/s')} \{f_{p,q;r}(T_1) + f_{p,q;r}(T_2)\}$$

$$(\forall T_1, T_2 \in \mathcal{K}_{p,q;r}(E, F))$$

命題 2 $T \in \mathcal{L}(E, F)$ について次は同値。

(i) T は diagonal operator $D \sim \{\lambda_n\} : \ell_p \rightarrow \ell_q$ を通して
 分解される,

(ii) T は $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n \otimes g_n$ ($\{\lambda_n\} \in \ell_s$, $\{f_n\} \in \ell_p^{(*)}(E')$, $\{g_n\} \in \ell_q(F)$)
 と表現される。(i.e. Pietsch [8] の意味で (s, p, q') -nuclear)

次の characterization は極めて有効である。

定理 1 $T \in \mathcal{L}(E, F)$ について次は同値。

(i) T は (ℓ_p, ℓ_q) - r -factorable,

(ii) T は $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n \otimes g_n$ と表現される。ここで, $\{f_n\} \in \ell_p^{(*)}(E')$,
 $\{g_n\} \in \ell_q(F)$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^r |\lambda_n|^s < \infty$.

包含関係については次が成り立つ。

命題 3

(i) $q < p \leq p_1$ ならば

$$\mathcal{K}_{p,q;r} \subset \mathcal{K}_{p_1,q;r}, \quad f_{p_1,q;r} \leq \max(1, r^{1/p_1-1/p}) f_{p,q;r}$$

(ii) $q \leq q_1 < p$ ならば

$$\mathcal{F}_{p,q;r} \subset \mathcal{F}_{p,q_1;r}, \quad f_{p,q;r} \leq \max(1, r^{1/q - 1/q_1}) f_{p,q_1;r}$$

(iii) $r_1 \leq r$ ならば,

$$\mathcal{F}_{p,q;r} \subset \mathcal{F}_{p,q;r_1}, \quad f_{p,q;r_1} \leq f_{p,q;r}.$$

例

(i) $q < p_1 < p$, $s/(s_1 - s) \leq r$ ($1/s_1 = 1/q - 1/p_1$) とする。

$\{\lambda_n\} \in l_{\frac{s_1}{r+1}, s_1} \setminus l_{\frac{s}{r}, s}$ (e.g. $\lambda_n = n^{-1/r} [\log(n+1)]^{-1/s}$) をとり,

$T \sim \{\lambda_n\} : l_{p_1} \rightarrow l_q$ とすると, T は (l_{p_1}, l_q) - r -factorable であるが, (l_p, l_q) - r -factorable ではない。

(ii) $q < q_1 < p$, $s/(s_1 - s) \leq r$ ($1/s_1 = 1/q_1 - 1/p$) とする。i) の

様に $\{\lambda_n\}$ をとり, $T \sim \{\lambda_n\} : l_p \rightarrow l_{q_1}$ とすると, T は, (l_p, l_{q_1}) - r -factorable であるが (l_p, l_q) - r -factorable ではない。

(iii) $r_1 < r$ とする。 $\{\lambda_n\} \in l_{\frac{s}{r_1+1}, s} \setminus l_{\frac{s}{r+1}, s}$ (e.g. $\lambda_n = n^{-(r+1)/s} [\log(n+1)]^{-1/s}$) をとり, $T \sim \{\lambda_n\} : l_p \rightarrow l_q$

とすると, T は (l_p, l_q) - r_1 -factorable であるが, (l_p, l_q) - r -factorable ではない。

type l^p operator との関係について次の定理を得る。

定理 2

(i) (l_p, l_q) - r -factorable operator は of type $l_{\frac{r}{r+1} + \varepsilon}$ ($\forall \varepsilon > 0$),

(ii) type $l_{\frac{r}{r+1}}$ の operator は (l_p, l_q) - r -factorable.

この定理と Pietsch の良く知られた結果から, factorable operator による nuclear space の特徴づけが得られる。

系 locally convex space E に対して次は同値。

- (i) E : nuclear space,
 (ii) E の適当な 0 -基本近傍系 $\mathcal{U}$ をとると, $\forall U \in \mathcal{U}$ に対して, 次の性質をもつ $V \in \mathcal{U}$ が存在する:

$$\begin{cases} V \text{ は } U \text{ に absorb され,} \\ E(V) \rightarrow E(U) \text{ は } (l_p, l_q)\text{-}r\text{-factorable.} \end{cases}$$

(i) $\rightarrow$ (ii) は任意の p, q, r について成立, (ii) $\rightarrow$ (i) は或る p, q, r について成立すればよい。

他の operator との関係について, 次を得る。

命題 4

- (i) $(l_p, l_q)\text{-}r\text{-factorable operator}$ は Pietsch [8] の意味で $(t, p, q')\text{-nuclear}$ ($\frac{q}{r+1} < t \leq q$)。
 (ii) $(l_p, l_q)\text{-}r\text{-factorable operator}$ は $\frac{q}{r+1} < 1 \leq t \leq q$ のとき Perissinaki-Pietsch [6] の意味で, $\frac{q}{r+1} < t \leq 1 \leq q$ のとき Ha [1] の意味で, $t\text{-nuclear}$ である。

さて次に factorable operator の合成について考える。
 まず次を得る。

定理 3 $s \geq 1, r > 0, \frac{s}{r+1} < 1$ とする。 $1 = \frac{1}{s} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q'}$, $1 \leq q < p \leq \infty$ とする。このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} n^r d_{n-1}(T)^s < \infty$ ならば, T は $(l_p, l_q)\text{-}r_1\text{-factorable}$ ($0 < r_1 < \frac{r+1}{s} - 1$) である。

定理 4 $s \geq 1$, $r_1, r_2 > 0$, $\frac{s}{r_1 + r_2} < 1$ とする。 $T: E \rightarrow F$ が (l_p, l_q) - r_1 -factorable, $S: F \rightarrow G$ が (l_p, l_q) - r_2 -factorable ならば, $S \circ T: E \rightarrow G$ は (l_p, l_q) - r -factorable である ($0 < r < \frac{r_1 + r_2}{s} - 1$)。

§ 2

type l' operator は type ? の diagonal operator を通して分解できるか? (2)の問題に対して分解の仕方は若干異なるが, Hilbert space 間においては明らかに次が成り立つ。

命題 5 Hilbert space 間の operator $T: H_1 \rightarrow H_2$ に対して次は同値。

- (i) T : of type l^1 ,
- (ii) T は type l^1 の diagonal operator $D: l_2 \rightarrow l_2$ を通して分解される。

§ 3

Terzioğlu, Jarchow の 2, 3 の結果を我々の観点から整理してみよう。考える空間 H_1, H_2 は Hilbert space である。

定理 5 ([10]) $T: H_1 \rightarrow H_2$ について次は同値。

- (i) T : of type l^1 ($\Leftrightarrow$ nuclear),
- (ii) T は inclusion map $l_1 \hookrightarrow l_\infty$ を通して分解される。

定理6 ([10]) $T: H_1 \rightarrow H_2$ について次は同値。

- (i) T : of type l^2 ($\Leftrightarrow$ Hilbert-Schmidt 型),
- (ii) T は inclusion map $l_2 \hookrightarrow l_\infty$ を通して分解される。

これらを含む形で次が得られている。

定理7 ([4]) $1 \leq p < q \leq \infty$, $p \leq 2 \leq q$, $1/r = 1/p - 1/q$ のとき, $T: H_1 \rightarrow H_2$ に対して次は同値。

- (i) T : of type l^r ($\Leftrightarrow$ r -Schatten class の op.),
- (ii) T は inclusion map $l_p \hookrightarrow l_q$ を通して分解される。

文 献

- [1] C. W. Ha, Approximation numbers of linear operators and nuclear spaces, J. Math. Analysis Appl. 46 (1974), 292-311.
- [2] C. V. Hutton, p -factorable operators, Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975), 167-180.
- [3] C. V. Hutton, J. S. Morrell and J. R. Retherford, Diagonal operators, approximation numbers, and Kolmogoroff diameters, J. Approximation Theory 16 (1976), 48-80.
- [4] H. Jarchow, Factorization through inclusion mappings between l_p -spaces, Math. Ann. 220 (1976), 123-135.
- [5] K. Miyazaki and M. Kato, Factorable operators through a diagonal operator between l_p -spaces, Bull. Kyushu Inst. Tech. (M. & N. S.) 24 (1977), 49-57.

- [6] A. Persson and A. Pietsch, p -nukleare und p -integrale Abbildungen in Banachräumen, *Studia Math.* 33 (1969), 19-62.
- [7] A. Pietsch, ℓ_p -faktorisierbare Operatoren in Banachräumen, *Acta Sci. Math.* 31 (1970), 117-123.
- [8] A. Pietsch, *Theorie der Operatorenideale (Zusammenfassung)*, Jena, 1972.
- [9] A. Pietsch, s -numbers of operators in Banach spaces, *Studia Math.* 51 (1974), 201-223.
- [10] T. Terzioğlu, Remarks on (p, q) -factorable operators, *Bull. Acad. Pol. Sci.* 23 (1975), 165-168.