

余次元 2 例外極小集合を持つ 力学系の構成

広島大学・理学研究科 中山 裕道 (Hiromichi Nakayama)
Faculty of Science, Hiroshima University

余次元 1 の離散力学系では、例外極小集合はコントロール集合になる。一方、余次元が非常に高い場合、例外極小集合は様々な形を取りうる。そこで本稿では、余次元 2 の場合について考える。余次元 2 の時は、例外極小集合も平面的になる。平面的な図形で、ある種の対称性を持つものはそれほど知られていない。この点で、余次元 2 の例外極小集合は分類することができると考える。本稿では、分類と構成のうち、構成について考えたいと思う。(講究録であることを考慮し、図を多用してみた)。

1 S^1 の微分同相写像

同相写像 f について、 f -不変な閉部分集合で、包括関係について極小になるものを、極小集合という。円周 S^1 の同相写像の場合、極小集合は周期点かコントロール集合か S^1 全体になる。実際に、コントロール集合になることができるかについては、 f の微分可能性に関連していて、次の 2 つの定理により解決している。

定理 1 (Denjoy 1932). 周期点を持たない C^2 微分同相写像 $f: S^1 \rightarrow S^1$ は、無理数回転と位相共役になる。

定理 2 (Denjoy's example (Bohl 1916)). 極小集合がコントロール集合になる C^1 微分同相写像 $f: S^1 \rightarrow S^1$ が存在する。

定理 1 は、 C^2 微分同相写像のときは、コントロール集合にはならないことを示しており、一方、定理 2 は C^1 微分同相写像のときは反例があることを主張している。

本稿では、円周上の微分同相写像についての上の古典的な結果を、曲面の微分同相写像に拡張する試みについて述べる。

2 目的

定義 3. 極小集合 $\mathcal{M}$ が例外的であるとは、 $\mathcal{M}$ が有限集合、有限個の単純閉曲線、多様体全体でないときとする (図 1)。

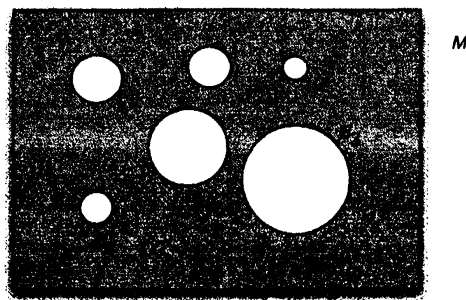


図 1: トーラスの局所連結極小集合

注意 4. 例外極小集合という場合に、コントロール集合をいれない流儀もある.

予想 5. 閉曲面の C^3 微分同相写像は、局所連結な例外極小集合を持たない.

予想 5 へのアプローチとしては、 C^3 微分同相写像の極小集合を分類する道と C^2 微分同相写像で局所連結な極小集合を持つ例を構成する道の 2 つが考えられる. 本稿では、このうちの構成について考えることにする.

3 C^0 構成

Denjoy は、円周の無理数回転を取り、その 1 本の軌道に沿って無限個の区間を挿入し、 C^1 counter example を構成した (図 2). この節では、稠密軌道に円板を挿入していくという方針で、高次元への拡張を行う (図 4).

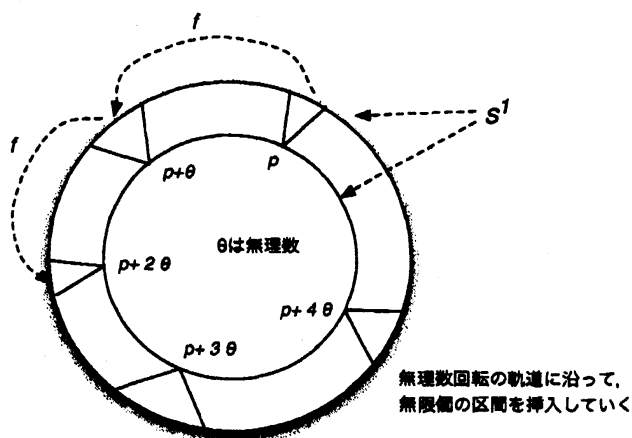


図 2: Denjoy counter example

M を閉多様体とする. 次の 3 つの性質を満たす M の開球の族 $\{B_i\}_{i=1,2,\dots}$ が取れたとする (図 1).

(1) $\{\overline{B_i}\}$ は互いに交わらない閉球になっている.

(2) $\overline{\bigcup_{i=1,2,\dots} B_i} = M$

(3) $\{B_i\}$ は null-sequence. すなわち, $\text{diam } B_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ が成り立つ.

このとき, $M \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ を Sierpiński M -set という.

定理 6 (Whyburn). もし M が閉曲面ならば, Sierpiński M -set は同相を除いて一意である.

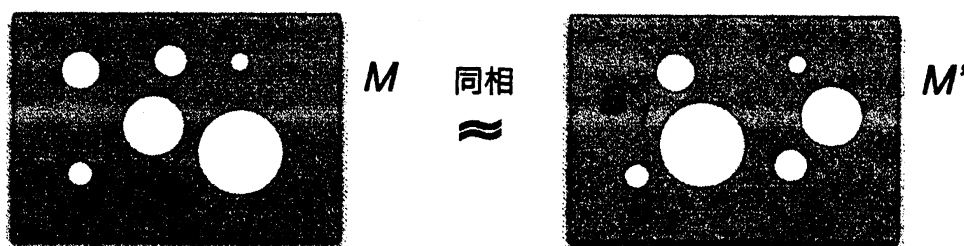


図 3: $\{B_i\}$ と $\{B'_i\}$ は条件 (1) (2) (3) を満たすものとする

特に, M が 2 次元球面の時, Sierpiński M -set は Sierpiński carpet と呼ばれる. (Sierpiński carpet を極小集合とする S^2 の同相写像は存在しないことが知られている ([1])).

定理 7 (Aarts and Oversteegen). Sierpiński T^2 -set を極小集合に持つトーラス T^2 の同相写像が存在する.

以下, この節では, この拡張について紹介し, 証明の概略を述べる.

定理 8 (with Biś, Walczak). M を閉微分可能多様体とする (1 次元以上). G を, 微分同相群 $\text{Diff}(M)$ の有限生成部分群とする. 任意の点 $x \in M$ について, その軌道 $G(x)$ が稠密であるとする. このとき, 同相群 $\text{Homeo}(M)$ の部分群 $\hat{G}$ が存在して, G と同型で, かつ, Sierpiński M -set を極小集合に持つ.

証明の概略.

第 1 段階 (inverse limit $\hat{M}$ の構成)

M の元 x_0 を取り固定する. 以下, x_0 を通る軌道 $G(x_0)$ の各点に円板を挿入することで, inverse limit を定義する (図 4 参照).

$G(x_0)$ の元を $x_0, x_1, x_2, \dots$ と書くことにし (順番は特に気にしない), $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を O_n とする. いま, 十分小さい $\varepsilon_n > 0$ を取る. 各 $x_j \in O_n$ について, $\{w \in T_{x_j}M; |w| < 1 + \varepsilon_n\}$ を D_j^n と書き, $p_j^n: \{w \in D_j^n; 1 < |w| < 1 + \varepsilon_n\} \rightarrow M \setminus O_n$ を

$$p_j^n(w) = \exp_{x_j} \left(\frac{|w| - 1}{|w|} w \right)$$

($j = 0, 1, \dots, n$) により定義する. そこで, $M \cup \bigcup_{j=1}^n D_j^n$ を p_j^n により貼り合わせてできるものを M_n とする. M_n には, M と同相になるように距離 d_n を入れる. 挿入

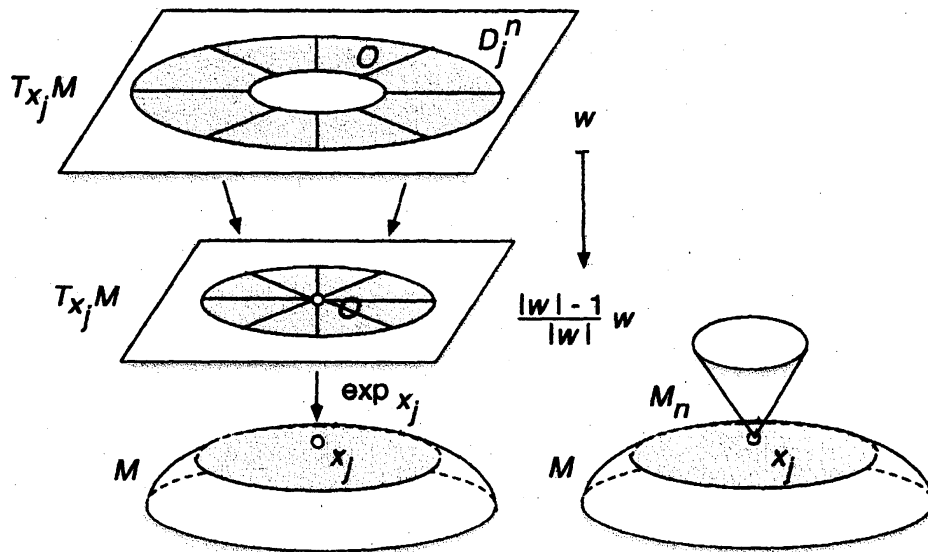


図 4: x_j に円板を挿入する

された円板 $\{w \in D_{n+1}^{n+1}; 0 \leq |w| < 1\}$ を 1 点につぶす写像を, $\psi_{n,n+1}: M_{n+1} \rightarrow M_n$ とし, $\psi_{kl} = \psi_{k,k+1} \circ \psi_{k+1,k+2} \circ \dots \circ \psi_{l-1,l}: M_l \rightarrow M_k$ ($k < l$) を射影とする inverse limit を $\hat{M}$ と書く. すなわち,

$$\hat{M} = \{(M_n, \psi_{kl})\} = \{(z_n) \in \prod_{n \geq 0} M_n; \psi_{kl}(z_l) = z_k \ (k < l)\}$$

とする. ここで, Daverman の Decomposition theory により, $\hat{M}$ は M と同相となり, 更に, 挿入された円板を引いた残りは Sierpiński M -set になることがわかる.

第 2 段階 (準同型 $G \rightarrow \text{Homeo}(M)$ の構成)

以下, $\pi_n: M_n \rightarrow M$ を射影とする.

同相写像 $h \in G$ について, $\hat{h}: \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ を定義する. そこで, $(z_n) \in \hat{M}(\subset \prod_{n \geq 0} M_n)$ について, $(w_n) = \hat{h}((z_n))$ を次のように定める.

(1) z_0 が $G(x_0)$ に含まれないとき, $h\pi_n(z_n) = \pi_n(w_n)$ により, $\hat{h}$ を定義する (図5).

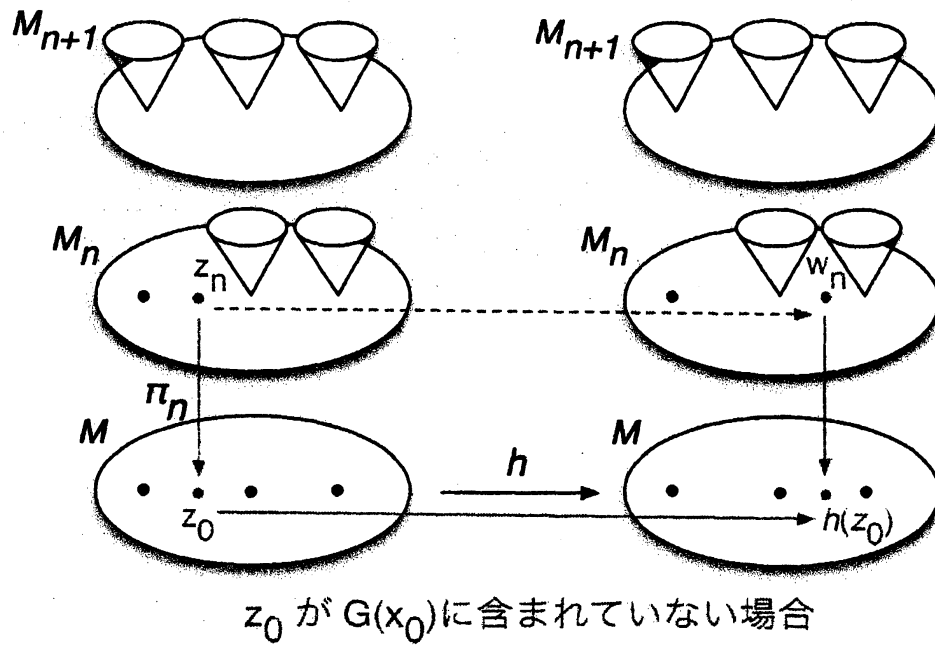
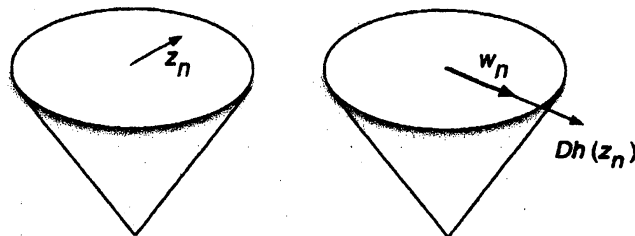


図 5: $\hat{M}$ 上の同相写像の構成 (1)

(2) z_0 が $G(x_0)$ に含まれるとき. すなわち, $z_0 \in O_m$, $h(z_0) \in O_m$ となる m が存在するとき (図6).

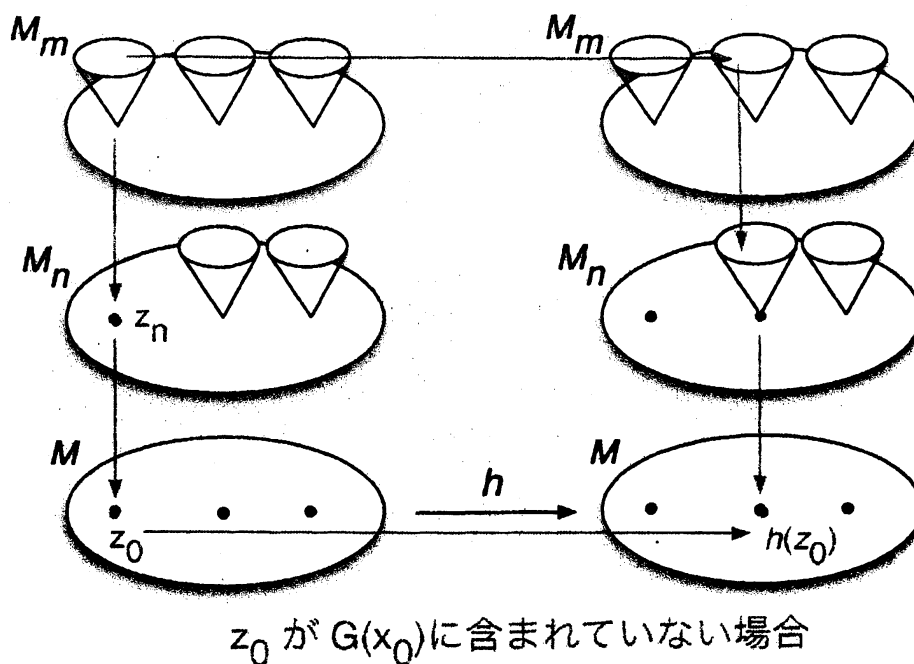
(a) $n \geq m$ のとき,

$$w_n = \frac{Dh(z_n)}{|Dh(z_n)|} |z_n|$$



(b) $n < m$ のとき,

$$w_n = \psi_{n,m}(w_m)$$

図 6: $\hat{M}$ 上の同相写像の構成 (2)

性質

- (1) $h \rightarrow \hat{h}$ は準同型写像になる.

実際,

$$\frac{D(h'h)(z_n)}{|D(h'h)(z_n)|} \Big|_{z_n} = \frac{Dh'(Dh(z_n))}{|Dh'(Dh(z_n))|} \Big|_{z_n}$$

から証明できる.

- (2) 挿入した円板を引いた残りが $\hat{h}$ の極小集合になる.

■

注意 9. 一般に, *inverse limit* は微分可能多様体にならない.

注意 10. *minimal action* から自由に局所連結な例外極小集合を作ることができる.

4 C^2 -構成

トーラスの微分同相写像 $f: T^2 \rightarrow T^2$ が Denjoy 型であるとは, minimal translation g と ψ により半共役で (すなわち, $\psi \circ f = g \circ \psi$), $\psi^{-1}(x)$ が, 可算個の x を除いて, 1 点になるときをいう.

定理 11 (Norton-Sullivan[5]). f を Denjoy 型の T^2 の微分同相写像とする. その補集合がすべて幾何学的な円板 (正方形) になるような極小集合を持つとき, f は C^3 にならない.

一方, McSwiggen は次のような例を構成している.

定理 12 (McSwiggen[4]). 任意の $\varepsilon > 0$ について, Denjoy 型の T^2 の $C^{3-\varepsilon}$ 微分同相写像で, 極小集合が Sierpiński T^2 -set となるものが存在する.

そこで, 極小集合の補集合の幾何学的な形が大事であると見込まれる. McSwiggen の例の場合, その極小集合の補集合は滑らかな単純閉曲線で囲まれている. ここでは, 次のような例を構成する.

定理 13 (with Asaoka). 任意の $\varepsilon > 0$ について, Denjoy 型の $C^{3-\varepsilon}$ 微分同相写像 $f: T^2 \rightarrow T^2$ で, 次の性質を満たすものが作れる.

- (1) f は, ただ一つの極小集合 $\mathcal{M}$ を持ち, その補集合は開円板の可算和 $\{U_i\}$ をからなり, その閉包は互いに交わらない.
- (2) $\overline{U_i}$ は角がある.

構成の概略

A を $SL(3, \mathbb{Z})$ の元とする. A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, (長さが 1 の) 固有ベクトルを v_1, v_2, v_3 とするとき, 次の条件を満たすものとする.

- (1) $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < \frac{1}{8} < 1 < \lambda_3$
- (2) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < \sqrt{2e^{1-\sqrt{2}} - 1}$
- (3) $\lambda_1^2 < \lambda_2^{2-\varepsilon}$

行列 A は T^3 の微分同相写像を誘導する. ここで, McSwiggen は, 原点の周りに周期軌道を挿入した. そこで, 本稿では原点の周りに dominated splitting を挿入する (図 7). 正確には, 図 8 のように作られた関数 α について, $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$F(x, y, z) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \alpha(r)x, \alpha(r)y, \lambda_3 z \right)$$

(ここで, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) により定義し, x, y, z 軸をそれぞれ固有ベクトル v_1, v_2, v_3 に対応させ, 原点の周りに挿入してやる.

こうしてできた partially hyperbolic diffeomorphism について, partially hyperbolic diffeomorphism としての strong unstable foliation を取る (図 9). (これは, 図 10 で与えられる graph transformation の解に接する foliation である.) C^r -section theorem

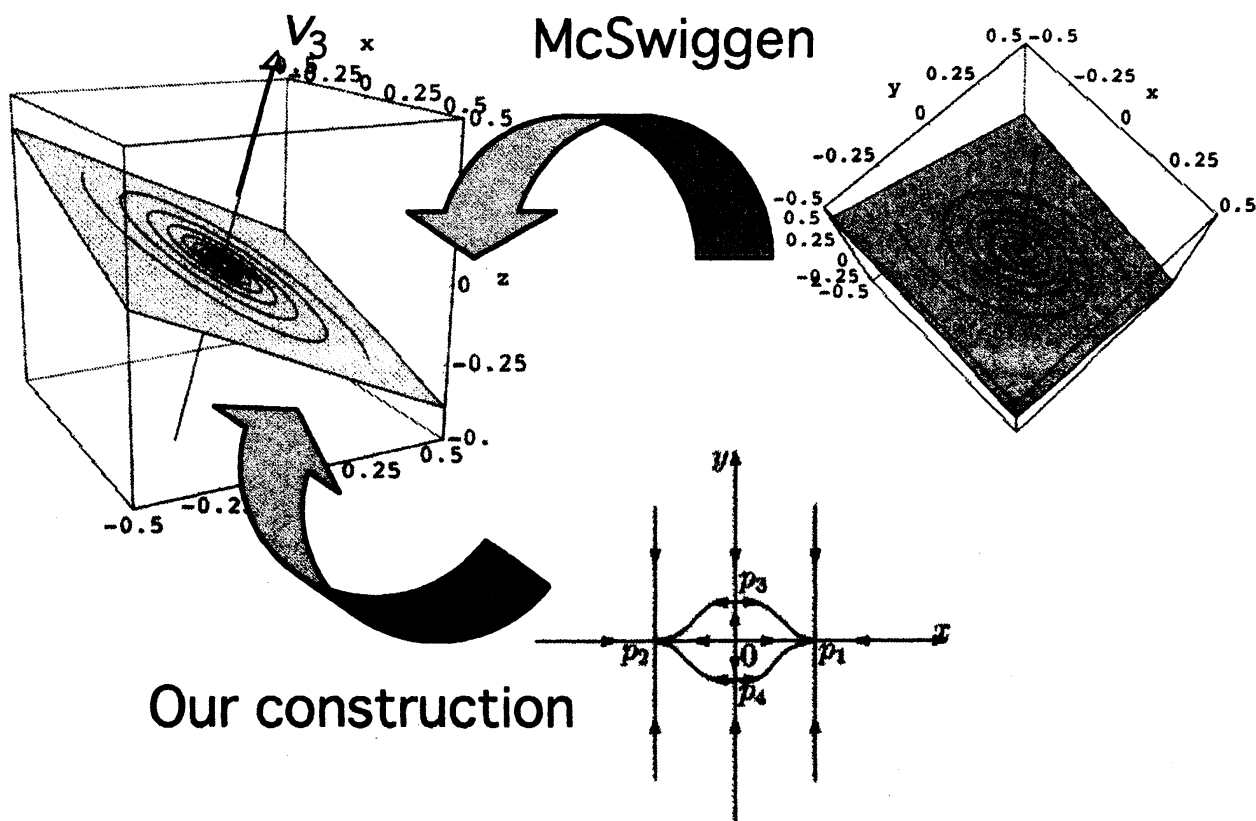


図 7: 双曲型同型写像の変形

([3]) により, strong unstable foliation の微分可能性は

$$\|(Df)_p^{-1}\|^k \frac{\|Df|_{T_p \mathfrak{F}_s}\|}{\lambda_3} < 1$$

が成り立つとき, C^k になる (ここで, $\mathfrak{F}_s$ は v_1, v_2 方向の foliation). この例の場合,

$$\|(Df)_p^{-1}\|^k \frac{\|Df|_{T_p \mathfrak{F}_s}\|}{\lambda_3} = \frac{1}{\alpha(r)^k} \frac{\lambda_1 \alpha(r)}{\lambda_2 \lambda_3} = \frac{\lambda_1^2}{\alpha(r)^{k-1}}$$

となるが, $\alpha(r) \geq \lambda_2$ と $\lambda_1^2 < \lambda_2^{2-\varepsilon}$ という条件から, strong unstable foliation の微分可能性は $C^{3-\varepsilon}$ になる. ちなみに, この構成法ではこれ以上微分可能性があがらない.

そこで, $T^2 \times \{0\}$ に関する first return map を取ると, 目標とするトーラスの微分同相写像ができる.

注意 14 (課題). McSwiggen の例では, 極小集合が Sierpiński T^2 集合であることが示せる. しかし, ここで構成した例では, 極小集合が Sierpiński T^2 集合であるかわからない. 具体的には, 穴の大きさ (距離空間としての直径) が段々と小さくなる

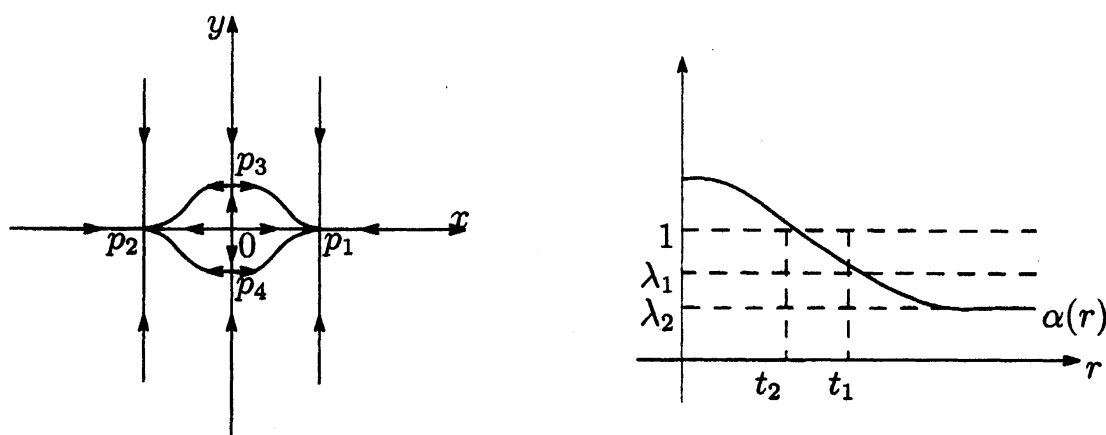
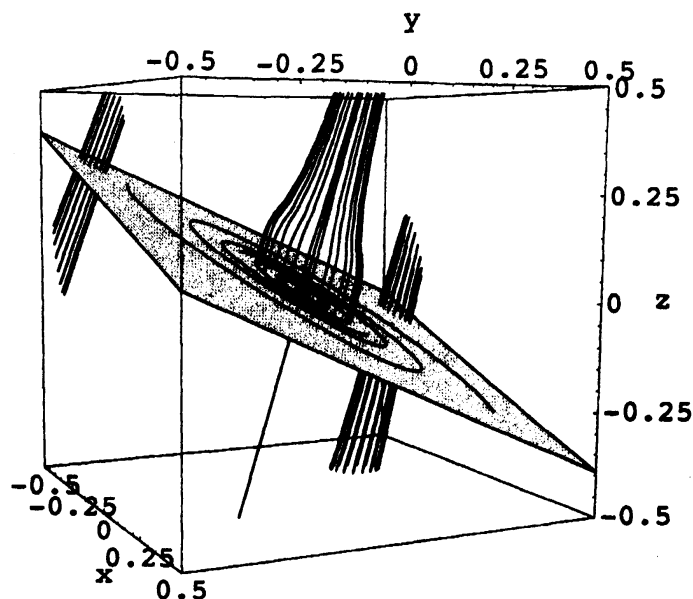


図 8: F のイメージと α の定義

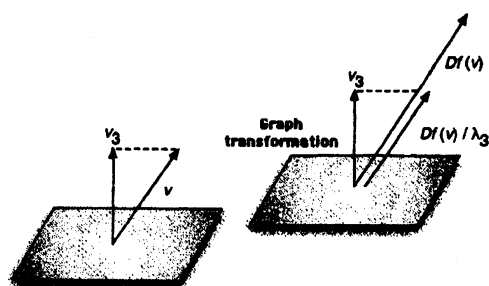
ことが示せない. 実際, この *partially hyperbolic diffeomorphism* は, *strong unstable foliation* 以外に, *strong stable foliation* と *center (branched) foliation* をもつ. もし, *strong stable foliation* が *minimal foliation* ならば, 極小集合の補集合の中に細長くなるものができ, 極小集合は局所連結でなく, *Sierpiński T^2 -set* にならない. しかし, 現在, この *strong stable foliation* が *minimal* かどうかを調べる方法が開発されていない. より簡単に, Mañé の例でも, その *strong stable foliation* と *strong unstable foliation* がともに *minimal* になるかという問題は未解決であり, ここ数ヶ月間に限っても専門家の間で盛んに研究されている.

参考文献

- [1] J. M. Aarts and L. G. Oversteegen, *The dynamics of the Sierpiński curve*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994) 965–968.
- [2] A. Biś, H. Nakayama and P. Walczak, *Locally connected exceptional minimal sets of surface homeomorphisms*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no. 3, 711–731. .
- [3] M. Hirsch, C. Pugh and M. Shub, *Invariant Manifolds*, Lecture Notes in Math. **583** (1977).
- [4] P. D. McSwiggen, *Diffeomorphisms of the torus with wandering domains*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 1175–1186.



☒ 9: strong unstable foliation



☒ 10: graph transformation

- [5] A. Norton and D. Sullivan, *Wandering domains and invariant conformal structures for mappings of the 2-torus*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **21** (1996), 51–68.
- [6] G. T. Whyburn, *Topological characterization of the Sierpiński curve*, Fund. Math. **45** (1958), 320–324.