

Weakly coupled diffusion system の半群的处理について

東大・理 小西 芳雄

§1. 序.

山口, 亀高, 三村 [4] は Weakly coupled diffusion system の典型的な例として次の (i) ~ (iv) を挙げている。

$$(i) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - uv \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - uv \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + uv \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - uv \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - uv \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -uv \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - uv \end{cases} \quad (v) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + uv \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -uv \end{cases} \quad (vi) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - uv \\ \frac{\partial v}{\partial t} = uv \end{cases}$$

解の行動を研究をするための第一歩として, 筆者と大春氏は, これらの右辺の作用素が例えば $C(R^n)^+ \times C(R^n)^+$ などでは Crandall-Liggett [2] の意味で非線型半群を生成するか否かということに興味を持った。(i), (ii), (iii) については, 簡単に, 肯定的であることが判った。(v) と (vi) は少々いやらしい。しかしながら Chambers

Oharu [1] に於いて導入された D-operator なる概念を使うことにより本質的には, Crandall-Liggett により開発されたテクニックに帰着されることがわかった。

§2. 生成定理

X をバナッハ空間とする。 C を X の部分集合とする。 C から C への作用素の族 $\{T_t; 0 \leq t < +\infty\}$ が 半群 (C 上の) であるとは,

$$(i) T_0 = I|_C \text{ 且 } T_{t+s} = T_t T_s \quad \forall t, s \geq 0 ;$$

$$(ii) \forall x \in C \text{ に対し } T_t x \text{ は } t \text{ に関し強連続。}$$

X に定義域と値域をもつ (非線型, 多価) 作用素が D-operator であるとは,

$$(D) (0, \infty) \text{ 上の非負関数 } \omega = \omega(r) \text{ が存在し } A_r|_{B_r} - \omega(r)I \text{ が各 } r > 0 \text{ に対し dissipative ;}$$

$$\text{但し } B_r = \{x \in X; \|x\| \leq r\}.$$

定理 A を X の D-operator とし 或る正值関数 $\rho = \rho(r, T)$

$$r \in (0, \infty), T \in (0, \infty), \text{ が存在し 各 } n > 2T\omega(\rho(r, T))$$

に対し 次の (S_n) が成立すると仮定しよう:

$$(S_n) \text{ 方程式系 } x_\lambda^{(0)} - \lambda A x_\lambda^{(0)} \ni x, x_\lambda^{(1)} - \lambda A x_\lambda^{(1)} \ni x_\lambda^{(0)}, \dots,$$

$$x_\lambda^{(n)} - \lambda A x_\lambda^{(n)} \ni x_\lambda^{(n-1)} \text{ は 各 } x \in B_r \cap \overline{D(A)} \text{ と } \lambda \in (0, 1/n]$$

に対し 解 $\{x_\lambda^{(0)}, x_\lambda^{(1)}, \dots, x_\lambda^{(n)}\}$, $x_\lambda^{(n)} \in B_{\rho(r, T)} \cap D(A)$ をもつ。

このとき 各 $r, T > 0$ に対し

$$\exp(tA)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \{I - (t/n)A\}_{B_{p(r,T)}}^{-n} x, \quad 0 \leq t \leq T, \\ x \in B_r \cap \overline{D(A)},$$

は存在し $\{\exp(tA); 0 \leq t < \infty\}$ は $\overline{D(A)}$ 上の半群である。
さらに収束は $t \in [0, T]$ に関し一様で、各 $t \geq 0$ に対し $\exp(tA)$ は局所 Lipschitz 連続である:

$$\|\exp(tA)x - \exp(tA)y\| \leq \exp[\omega(p(r, T))t] \cdot \|x - y\|, \\ 0 \leq t \leq T, \quad x, y \in B_r \cap \overline{D(A)}, \quad T, r > 0.$$

また $\exp(tA)x, x \in D(A)$, は t に関し局所 Lipschitz 連続である。

証明の概略は Konishi [3] 参照。(⇒), (⇐) が半群を生成するための条件を満足しているかの検証はそんなに困難ではない。(やはり [3] に書いてある。)

文 献

- [1] J.T. Chambers and S. Oharu: Semi-groups of local Lipschitzians in a Banach space (to appear).
- [2] M.G. Grandell and T.M. Liggett: Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces (to appear).
- [3] Y. Konishi: A remark on semi-groups of local Lipschitzians in Banach space (pre-print).
- [4] 山口, 尾高, 三村: Weakly coupled diffusion system について. 数理科学講義録 106, 167-177.