

拋物線型特異積分の収斂について

都立大 理 相 沢 幸 子

§2, §3 で拋物線型特異積分の L^p -収斂(次数 ν の平均収斂) による存在を述べ, §4 で *pointwise* の収斂について述べる. 応用上はここに掲げられた定理で足りるということであるが, その結論の成立のために *kernel* の充たすべき *best condition* は判っていない.

§1. (記号と定義) n 次元 Euclid 空間 R^n の点を $x = (x_1, \dots, x_n)$, 実数の組を $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$, $\alpha_j \geq 1$, とするとき $(\sum_j x_j^2)^{\frac{1}{2}} = |x|$, $(\lambda^{\alpha_1} x_1, \dots, \lambda^{\alpha_n} x_n) = \lambda^\alpha x$, $\lambda > 0$, $\sum_j \alpha_j = |\alpha|$, と表わすことにする.

α を固定して次の座標変換をおこなう; $x \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho^{\alpha_1} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_{n-1} = \rho^{\alpha_{n-1}} \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

$$x_n = \rho^{\alpha_n} \cos \theta_1$$

$$\left(\begin{array}{l} \theta_j \in [0, \pi] \quad j=1, \dots, n-2 \\ \theta_{n-1} \in [0, 2\pi], \quad \rho > 0 \end{array} \right).$$

単位球面を Σ とすると $(\frac{x_1}{p(x)}, \dots, \frac{x_n}{p(x)}) \in \Sigma$ であるから, $x = p^\alpha x'$

$x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in \Sigma$ と表わす. このとき上の変換によると

$dx_1 \cdots dx_n = p^{|\alpha|-1} J(x') d\sigma$ ($1 \leq J(x') \leq |\alpha|$, $d\sigma$ は Σ の面積要素) となる. $p = p(x)$ は 原点と点 x との距離を定義する.

何故なら $p(x) = p_1$, $p(y) = p_2$ と書くと

$$\left(\frac{x_1 + y_1}{(p_1 + p_2)^{\alpha_1}}, \dots, \frac{x_n + y_n}{(p_1 + p_2)^{\alpha_n}} \right) = \frac{p_1}{p_1 + p_2} \left(\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2} \right)^{\alpha_1 - 1} x'_1, \dots, \left(\frac{p_1}{p_1 + p_2} \right)^{\alpha_n - 1} x'_n \right) + \frac{p_2}{p_1 + p_2} \left(\left(\frac{p_2}{p_1 + p_2} \right)^{\alpha_1 - 1} y'_1, \dots, \left(\frac{p_2}{p_1 + p_2} \right)^{\alpha_n - 1} y'_n \right).$$

右辺が単位球の内部の点であることから $p(x + y) \leq p_1 + p_2$ を得る. 定義から $p(\lambda^\alpha x) = \lambda p(x)$ となる.

$\sum_j \frac{x_j^2}{p(x)^{2\alpha_j}} = \sum_j \frac{x_j^2}{|x|^2} = 1$ であるから $|x_j| \leq p(x)^{\alpha_j}$, $|x| \leq 1$ のとき $p(x)^{\alpha_n} \leq |x| \leq p(x) \leq 1$, $|x| > 1$ のとき $1 < p(x) \leq |x| \leq p(x)^{\alpha_n}$,

従って $C_1 \leq p(x) \leq C_2$ のとき

$$(\min[C_1, 1])^{\alpha_n - 1} p(x) \leq |x| \leq (\max[C_2, 1])^{\alpha_n - 1} p(x).$$

定義. $K(x)$ は次の条件を満たす kernel とする;

$$(a) \quad K(\lambda^\alpha x) = \lambda^{-|\alpha|} K(x) \quad \lambda > 0$$

$$(b) \quad \int_{\Sigma} |K(x)| d\sigma < \infty, \quad \int_{\Sigma} K(x) J(x') d\sigma = 0$$

$$(c) \quad \int_{[x; p(x) > 4p(y)]} |K(x-y) - K(x)| dx \leq C \quad (C \text{ は } y \text{ に無関係の定数})$$

これを用いて更に次を定義する

$$K_\varepsilon^\circ(x) = \begin{cases} K(x) & p(x) > \varepsilon > 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}, \quad K_{\varepsilon, r}^\circ(x) = \begin{cases} K_\varepsilon^\circ(x) & p(x) \leq r \\ 0 & p(x) > r \end{cases}$$

$$(K_\varepsilon^\circ * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon^\circ(x-y) \cdot f(y) dy.$$

以下 C, A_p はその時々により, 添記号にだけ関係する定数を表わす.

§2. (L^p -収斂 1)

定理 1. ⁽¹⁾⁽²⁾ $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ のとき $(K_\varepsilon^\circ * f)(x)$ は到る所で存在して

$$\|K_\varepsilon^\circ * f\|_p \leq A_p \|f\|_p \quad 1 < p < \infty,$$

$$\exists g \in L^p; K_\varepsilon^\circ * f \rightarrow g (\varepsilon \rightarrow 0) \text{ in } L^p \text{ 及 } \text{pointwise e.}$$

(この g を $K^\circ * f$ と表わす)

証明の概略. $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 5 < r' < r$ とする. (b)の後半により

$$\begin{aligned} |(K_\varepsilon^\circ * f)(x) - (K_{\varepsilon'}^\circ * f)(x)| &\leq \int_{\Sigma} J(y') |K(y')| \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} |f(x-y) - f(x)| p(y)^{-1} dp \right) d\sigma \\ &\leq C_\alpha \int_{\Sigma} J(y') |K(y')| \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \left(\sum_f \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} (x - \theta y) \right| \right) dp \right) d\sigma. \end{aligned}$$

これにより定理の後半を得る. 定理の前半は,

$\widehat{K_{\varepsilon, r}^\circ}(x) - \widehat{K_{\varepsilon', r'}^\circ}(x) = \widehat{K_{\varepsilon, \varepsilon'}^\circ}(x) + \widehat{K_{r', r}^\circ}(x)$ であり, $x \in \Sigma$ のとき

$$\begin{aligned} |\widehat{K_{\varepsilon, \varepsilon'}^\circ}(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (e^{\pi i x \cdot y} - 1) K_{\varepsilon, \varepsilon'}^\circ(y) dy \right| \\ &\leq \pi \int_{\Sigma} J(y') |K(y')| \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} p(y)^{-1} |y| dp \right) d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2|\widehat{K_{r', r}^\circ}(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i x \cdot y} \{K_{r', r}^\circ(y-x) - K_{r', r}^\circ(y)\} dy \right| \\ &\leq \left(\int_{r-1 < p(y) < r+2} + \int_{r-2 < p(y) < r+1} + \int_{p(y) > r-1} \right) |K(y)| dy + \int_{p(y) > r-1} |K(y-x) - K(y)| dy. \end{aligned}$$

最後の項は(c)を用いると, 各右辺が ε', r' に関係無く有界であ

り $(\varepsilon', \frac{1}{r'})$ と共に zero に収斂する). 従って $\widehat{K_{\varepsilon, r}^\circ}(x)$ は有界 (且つ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, r \rightarrow \infty} \widehat{K_{\varepsilon, r}^\circ}(x)$ は存在する). $\widehat{K_{\varepsilon, r}^\circ}(x) = \widehat{K_{\varepsilon, \frac{1}{r}}^\circ}(x)$ であるから $x \notin \Sigma$ の場合も同じである. 従って $\|K_{\varepsilon, r}^\circ * f\|_2 \leq A\|f\|_2$, Fatou の Lemma により $\|K_\varepsilon^\circ * f\|_2 \leq A\|f\|_2$. 又 $M > 0$ のとき $|\{x: |(K_\varepsilon^\circ * f)(x)| > M\}| \leq \frac{C}{M} \|f\|_1$; $|E|$ は集合 E の Lebesgue 測度, となること が Hörmander の方法に全く類似の方法で導かれる. 以上の事柄に Marcinkiewicz の補間定理を用いて $1 < p \leq 2$ の場合を, conjugacy により $p > 2$ の場合の結論を得る.

定理 1 により作用素 $K_\varepsilon^\circ(f) = K_\varepsilon^\circ * f$, $K^\circ(f) = K^\circ * f$ を L^p 上の有界作用素に拡張できる. それを

$$(K_\varepsilon^\circ * f) = \int K_\varepsilon^\circ(x-y) f(y) dy$$

$$(K^\circ * f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int K_\varepsilon^\circ(x-y) f(y) dy$$

と表わす. 特に $K(x)$ が Σ 上で有界のとき, 右辺は表現された意味で存在して $(K_\varepsilon^\circ * f)(x)$, $(K^\circ * f)(x)$ に等しい. $p=2$ の場合

はこの条件が無くても $\|K_{\varepsilon, r}^\circ * f - K_{\varepsilon', r'}^\circ * f\|_2 = A\|\widehat{K_{\varepsilon, r}^\circ} - \widehat{K_{\varepsilon', r'}^\circ}\|_2 \rightarrow 0$ ($\varepsilon', \frac{1}{r'} \rightarrow 0$) となる.

§3. (L^p -収斂 2) 特に $n = N+1$, $\alpha = (1, \dots, 1, \beta)$ $\beta \geq 2$, の場合を考える. R^{N+1} の点を (x, t) $x \in R^N$, $t \in R^1$, (x, t) の §1 の意味での距離を $\rho(x, t)$ と表わす. kernel は条件 (a) を

充たし, $t \leq 0$ で $K(x, t) = 0$ となるものを考える. (a)により, $t > 0$ のとき $K(x, t) = K(t^{\frac{1}{\beta}} t^{-\frac{1}{\beta}} x, t \cdot 1) = t^{-\frac{N}{\beta}-1} K(t^{-\frac{1}{\beta}} x, 1)$ となるから

$$K(x, 1) = \Omega(x), \quad K(x, t) = t^{-\frac{N}{\beta}-1} \Omega(t^{-\frac{1}{\beta}} x), \quad t > 0$$

と表わすことができる. 今 $|x| \Omega(x)$ の可積分性を仮定すると

与1の条件(b)(c)と, 次の(b')(c')とが同値になる.

$$(b') \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\Omega(x)| dx < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \Omega(x) dx = 0$$

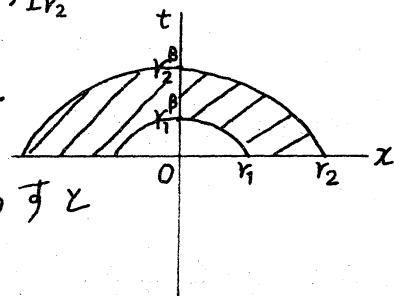
$$(c') \quad \int_{[(x, t); t > (4P(y, \delta))^{\beta}]} |K(x-y, t-\delta) - K(x, t)| dx dt \leq C.$$

(b) $\Leftrightarrow$ (b') の証明. $I_{\mu} \equiv [(x, t); 0 < t < \mu^{\beta}, P(x, t) > \mu > 0]$ とする.

$$\begin{aligned} \int_{I_1} |K(x, t)| dx dt &= \int_0^1 t^{-1} \int_{t^{\frac{1}{\beta}} |x| > \sqrt{1-t^2}} |\Omega(x)| dx dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{\beta}-1}}{\sqrt{1-t^2}} dt \int_{\mathbb{R}^N} |x| |\Omega(x)| dx = C < \infty \end{aligned}$$

であるから変数変換が可能で $\int_{I_{\mu}} K(x, t) dx dt = \int_{I_1} K(x, t) dx dt$ となる. 従って $r_2 > r_1 > 0$ とすると

$$\begin{aligned} \int_{[(x, t); r_1 < P(x, t) < r_2]} K(x, t) dx dt &= \left(\int_{r_1^{\beta}}^{r_2^{\beta}} \int_{\mathbb{R}^N} + \int_{I_{r_1}} - \int_{I_{r_2}} \right) K(x, t) dx dt \\ &= \int_{r_1^{\beta}}^{r_2^{\beta}} \int_{\mathbb{R}^N} K(x, t) dx dt. \end{aligned}$$



左辺を極座標で, 右辺を Ω を用いて表わすと

$$\int_{\Sigma} K(x, t) J(x', t') d\sigma = \beta \int_{\mathbb{R}^N} \Omega(x) dx.$$

$|K(x, t)|, |\Omega(x)|$ を代入しても同様である. 次に(b)を仮定して

(c) $\Leftrightarrow$ (c') の証明. $P(y, \delta) = p_1$ と書く.

$$\int_{[(x,t); p(x,t) > 4p_1]} |K(x-y, t-s) - K(x, t)| dx dt$$

$$(1) = \int_{[(x,t); t > (4p_1)^\beta]} + \int_{[(x,t); t \leq (4p_1)^\beta, p(x,t) > 4p_1]} |K(x-y, t-s) - K(x, t)| dx dt.$$

右辺の二項の積分範囲に於て $p(x-y, t-s) \geq 3p_1$, $|s| \leq p_1^\beta$, 従って $|t-s| \leq (4^\beta + 1)p_1^\beta$ であるから二項は次式で抑えられる.

$$\begin{aligned} & \left(\int_{[(x,t); t < (4^\beta + 1)p_1^\beta, p(x,t) > 3p_1]} + \int_{I_{4p_1}} \right) |K(x, t)| dx dt \leq \left(\int_{I_{4p_1}} + \int_{I_{3p_1}} \right) + \\ & + \int_{(3p_1)^\beta}^{(4^\beta + 1)p_1^\beta} \left(\int_{R^N} \right) |K(x, t)| dx dt \leq 2C + \int_{(3p_1)^\beta}^{(4^\beta + 1)p_1^\beta} t^{-1} dt \int_{R^N} |\Omega(x)| dx. \end{aligned}$$

従って(1)から (c) $\Leftrightarrow$ (c')となる.

応用上で用いられる kernel の truncation を定義する;

定義.

$$K_\mu(x, t) = \begin{cases} K(x, t) & t > \mu > 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$\tilde{f}_\mu(x, t) = (K_\mu * f)(x, t) = \int_{R^{N+1}} K_\mu(x-y, t-s) f(y, s) dy ds.$$

定理 2. $\Omega(x)$ が有界で $|\Omega| \in L^1(R^N)$ 且つ (b') (c') を充たすとき, $f \in L^p(R^{N+1})$ $1 < p < \infty$ であれば

$$\|\tilde{f}_\mu\|_p \leq A_p \|f\|_p,$$

$$\exists \tilde{f} \in L^p; \tilde{f}_\mu \rightarrow \tilde{f} (\mu \rightarrow 0) \text{ in } L^p.$$

証明. 各項の値が存在する点で

$$(2) \quad (K_{\mu^\beta} * f)(x, t) = (K_\mu^\circ * f)(x, t) + ((K_{\mu^\beta} - K_\mu^\circ) * f)(x, t).$$

$$\text{又} \quad \int_{R^{N+1}} |K_{\mu^\beta}(x, t) - K_\mu^\circ(x, t)| dx dt = \int_{I_\mu} |K(x, t)| dx dt = C.$$

従って $f \in C_0^\infty$ のとき, (2)の右辺に定理1及び Young の不等式

を用いて結論を得る. これと $K_\mu \in L^q(R^{N+1}) \forall q > 1$, を用いて一般の場合の結論を得る.

adjoint kernel $K^*(x, t) = K(-x, -t)$ は K と対称的に同じ条件を満たすから, $K_\mu^* f$ に関しても同じ結論が成立つ. 定理2の微分方程式論への応用については③に述べられている.

§4. (pointwiseの収斂) この節で現れる補助函数 $\varphi(x, t)$ $x \in R^N, t \in R^1$, は凡て, 次の性質をもつものとする;

$\varphi_1(t) \geq 0; t > 0$ で単調減少, $t \leq 0$ で $= 0$, R^1 上で可積分

$\varphi_2(|x|) \geq 0; |x|$ の単調減少函数, R^N 上可積分,

以上のような φ_i が存在して $\varphi(x, t) = \varphi_1(t) t^{-\frac{N}{p}} \varphi_2(t^{-\frac{1}{p}} |x|)$ と表わすことができる.

考える kernel は, §3 に記されたもので条件 (b'), (c'), $|\Omega(x)| \in L^1(R^N)$ 及び次の (c'') を満たしているものと仮定する;

(c'') $\exists \varphi(x, t);$

$$t > 2, |x|, |y| \leq 1 \Rightarrow |K(x-y, t-s) - K(x, t)| \leq \varphi(x, t)$$

$$|x| > 2 \Rightarrow \int_0^4 \int_{|y| \leq 1} |K(x-y, s)| dy ds \leq \varphi(x, 1).$$

例えば $|\Omega(x)| + |\frac{\partial}{\partial x_j} \Omega(x)| \leq C(1 + |x|^{N+\delta})^{-1} \delta > 1^{(4)}$, のとき (c'') は成立つ. 又 (b') (c'') $\Rightarrow$ (b') (c') が云える.

定理3. $f \in L^p(R^{N+1})$ $1 < p < \infty$, とする.

$\mu \rightarrow 0$ のとき殆んど到る所で $\hat{f}_\mu(x, t) \rightarrow \hat{f}(x, t)$

$$\text{且つ } \left\| \sup_{\mu > 0} |\hat{f}_\mu(x, t)| \right\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

補助定理 3.1 $|H(x, t)| \leq \varphi_1(x, t) + \varphi_2(x, -t)$ であるとき

compact support をもつ任意の階段函数 f に対して

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{N+\beta} \int_{R^{N+1}} H(\lambda(x-y), \lambda^\beta(t-s)) \cdot f(y, s) dy ds = f(x, t) \int_{R^{N+1}} H(y, s) dy ds \text{ a.e.}$$

証明. f を区間 I (R^{N+1} の区間) の特性函数とする. (x, t) を I の内点として正数 r_1, r_2 を次のようにえらぶ;

$$|x-y| \leq r_1, |t-s| \leq r_2 \Rightarrow f(y, s) = 1.$$

lim 記号下の積分を変数変換して, 次のように表わす.

$$\left(\int_{|s| \leq \lambda^\beta r_2} \int_{|y| \leq \lambda r_1} + \int_{|s| > \lambda^\beta r_2} \int_{R^N} + \int_{|s| \leq \lambda^\beta r_2} \int_{|y| > \lambda r_1} \right) H(y, s) f\left(x - \frac{y}{\lambda}, t - \frac{s}{\lambda^\beta}\right) dy ds.$$

$\lambda \rightarrow \infty$ のとき, 第一積分は $\int H(y, s) dy ds$ に収斂する. 残り
は, R^{N+1} 上で $\varphi_i(x, t)$ が可積分であるから, zero に収斂する.

定義. $f \in L^p(R^{N+1})$ $1 \leq p \leq \infty$ とする.

$$\bar{f}(x, t) = \sup_{r > 0} \frac{1}{c \cdot r^N} \int_{|y| < r} |f(x-y, t)| dy$$

(c は R^N の単位球の測度)

$$\bar{\bar{f}}(x, t) = \sup_{\sigma > 0} \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \bar{f}(x, t-s) ds.$$

補助定理 3.2 $H(x, t)$ は 3.1 の条件を満たすものとする.

$f \in L^p(R^{N+1})$ $1 < p$, のとき 殆んど到る所で

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda^{N+\beta} \left| \int_{R^{N+1}} H(\lambda(x-y), \lambda^\beta(t-s)) \cdot f(y, s) dy ds \right| \leq \bar{\bar{f}}(x, t) \int_{R^{N+1}} (\varphi_1 + \varphi_2) dy ds.$$

証明. $\hat{f}^\lambda(x, t) \equiv \lambda^{N+\beta} \int_{R^{N+1}} \varphi(\lambda(x-y), \lambda^\beta(t-s)) \cdot |f(y, s)| dy ds$ とする.

$\bar{f}, \bar{f}^{\wedge}$ 共に定義できる点 (x, t) に於て次式が成立つことを云えばよい;

$$\sup_{\lambda > 0} |f^{\wedge}(x, t)| \leq \bar{f}(x, t) \int_{R^{N+1}} \varphi dy ds.$$

今 R^N の, 中心 x , 半径 r の球上での $|f(x-y, t-s)|$ の積分を $I_s(r)$ と表わす. φ の定義により

$$f^{\wedge}(x, t) = \lambda^{N+\beta} \int_0^{\infty} \varphi_1(\lambda^{\beta} s) (\lambda^{\beta} s)^{-\frac{N}{\beta}} \left(\int_0^{\infty} \varphi_2(s^{-\frac{1}{\beta}} r) dI_s(r) \right) ds.$$

φ_2 の単調減少性から, $r \rightarrow 0$ 又は $r \rightarrow \infty$ のとき $r^N \varphi_2(s^{-\frac{1}{\beta}} r) \rightarrow 0$.

又 $I_s(r) \leq c r^N \bar{f}(x, t-s)$. 従つてこの事柄を用いながら二度部分積分を行うと

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \varphi_1(\lambda^{\beta} s) (\lambda^{\beta} s)^{-\frac{N}{\beta}} \left(\int_0^{\infty} \varphi_2(s^{-\frac{1}{\beta}} r) dI_s(r) \right) ds \\ & \leq -c \int_0^{\infty} \varphi_1(\lambda^{\beta} s) (\lambda^{\beta} s)^{-\frac{N}{\beta}} \bar{f}(x, t-s) \left(\int_0^{\infty} r^N d\varphi_2(s^{-\frac{1}{\beta}} r) \right) ds \\ & = \int_0^{\infty} \varphi_1(\lambda^{\beta} s) (\lambda^{\beta} s)^{-\frac{N}{\beta}} \bar{f}(x, t-s) \left(\int_{R^N} \varphi_2(s^{-\frac{1}{\beta}} |y|) dy \right) ds. \end{aligned}$$

ここで $\bar{f}(x, t-s)$ を s について $(0, \infty)$ 上で積分したものを $I(s)$ と表わすと 最後の式は次のように書ける

$$\int_0^{\infty} \varphi_1(\lambda^{\beta} s) (\lambda^{\beta} s)^{-\frac{N}{\beta}} \left(\int_{R^N} \varphi_2(s^{-\frac{1}{\beta}} |y|) dy \right) dI(s).$$

φ_1 の単調減少性により $s \rightarrow 0$ 又は $s \rightarrow \infty$ のとき $s \varphi_1(s) \rightarrow 0$, 又

$I(s) \leq s \bar{f}(x, t)$ であるから再び部分積分をくり返し行つと上

式は $\bar{f}(x, t) \int_{R^{N+1}} \varphi(\lambda y, \lambda^{\beta} s) dy ds$ に等しくなる.

定理3の証明. $H(x, t)$ を, 集合 $\{(x, t); |x| \leq 1, \frac{1}{2} < t < 1\}$ 内に support をもち $\int H dx dt = 1$ となる C^{∞} に属す函数とする. $\tilde{f}_n$ の L^p -収斂による極限函数 $\tilde{f}$ を用いて次の $(\tilde{f})_{\lambda}$ を定義する.

$$(\hat{f})_\lambda(x, t) = \lambda^{N+B} \int_{\mathbb{R}^{N+1}} H(\lambda(x-y), \lambda^B(t-s)) \cdot \hat{f}(y, s) dy ds.$$

定理 3.2, $\|\bar{g}\|_p \leq A_p \|g\|_p$ 及び定理 2 により

$$(1) \quad \|\sup_{\lambda > 0} |(\hat{f})_\lambda| \|_p \leq A'_p \|\hat{f}\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

定理 3.1 と (1) のコーン不等式を用いると、よく知られている方法で $\lambda \rightarrow \infty$ のとき $(\hat{f})_\lambda$ が a.e. 収斂することが云える。

又 $H \in C_0^\infty$ だから

$$\begin{aligned} (\hat{f})_\lambda(x, t) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \lambda^{N+B} \int H(\lambda(x-y), \lambda^B(t-s)) \cdot \hat{f}_\mu(y, s) dy ds \\ &= \lambda^{N+B} \int \hat{f}(z, \sigma) dz d\sigma \lim_{\mu \rightarrow 0} \int H(\lambda(x-y), \lambda^B(t-s)) K_\mu(y-z, s-\sigma) dy ds. \end{aligned}$$

これに $K_\mu(y, s) = \mu^{-\frac{N}{B}-1} K_1(\mu^{-\frac{1}{B}} y, \mu^{-1} s)$ の関係を代入して変数変換をおこなうと、内部の積分は $\int K_{\lambda^B \mu}(\lambda(x-z)-y, \lambda^B(t-\sigma)-s) \cdot H(y, s) dy ds$ となる。 $\mu \rightarrow 0$ のときこれは各点で $\hat{H}(\lambda(x-z), \lambda^B(t-s))$ に収斂する。従って $(\hat{f})_\lambda(x, t) = \lambda^{N+B} \int \hat{H}(\lambda(x-y), \lambda^B(t-s)) \cdot \hat{f}(y, s) dy ds$ 。従って

$$(2) \quad (\hat{f})_\lambda(x, t) - \hat{f}_{\lambda^{-B}}(x, t) = \lambda^{N+B} \int G(\lambda(x-y), \lambda^B(t-s)) \cdot \hat{f}(y, s) dy ds$$

ここに $G(x, t) = \hat{H}(x, t) - K_1(x, t)$ である。

$|G(x, t)| \leq \varphi_1(x, t) + \varphi_2(x, t)$ を満たす φ_i の存在を云えば、(2) の右辺に 3.2 を用い、これと (1) とにより定理 3 の証明を終る。以下で φ_i の存在を証明する。

(i) $t > 2$ のとき

$$G(x, t) = \int \{K(x-y, t-s) - K(x, t)\} H(y, s) dy ds$$

であるから条件 (C'') により φ は存在する。

(ii) $\frac{1}{2} < t < 2$, $|x| > 2$ のとき。

$|\tilde{H}(x, t)| \leq \int_0^3 \int_{|y| \leq 1} |K(x-y, t-s)| \cdot |H(y, s)| dy ds \leq C \int_0^3 \int_{|y| \leq 1} |K(x-y, s)| dy ds.$
 (c'') によりこれは $\varphi(x, t)$ で抑えられる. $\frac{1}{2} < t < 3$ としてもこれが云えるから (i) を考えると $2 < t < 3, |x| > 2$ で

$|K_1(x, t)| \leq |G(x, t)| + |\tilde{H}(x, t)| \leq \varphi(x, t)$ (φ は前のものと異なる).
 即ち $|\Omega(t^{-\frac{1}{p}}x)| \leq \varphi_2(t^{-\frac{1}{p}}|x|)$ となる φ_2 が存在する. 従って $|x| > 3^{-\frac{1}{p}} \times 2$ で $|\Omega(x)| \leq \varphi_2(|x|)$. 従って $\frac{1}{2} < t < 2, |x| > 2$ で $|K_1(x, t)| \leq \varphi(x, t)$ となる φ が存在する.

(iii) $t \leq \frac{1}{2}$ のとき $K_1(x, t) = 0, \tilde{H}(x, t) = 0.$

(iv) $\frac{1}{2} < t < 2, |x| \leq 2$ のとき. $\tilde{H}(x, t)$ は有界だから或 $\varphi(x, t)$ で抑えられる. (ii) の場合と同様に考えて $|\Omega(x)| \leq \varphi_2(|x|)$ $|x| > 0$, となる φ_2 が存在する. 従って $K_1(x, t)$ を抑える $\varphi(x, t)$ が存在する.

Q. E. D.

文 献

- (1) E. B. Fabes, N. M. Riviere; Singular integrals with mixed homogeneity, *Studia Math.* XXVII (1966) 19—38
- (2) —————; Symbolic calculus of kernels with mixed homogeneity, *Proc. Symp. in Pure Math.* X (1967) 106—127
- (3) E. B. Fabes; Singular integrals and partial differential equations of parabolic type, *Studia Math.* XXVIII (1966) 81—131
- (4) E. B. Fabes, C. Sadosky; Pointwise convergence for parabolic singular integrals, *Studia Math.* XXVI (1966) 225—232.