

乱流遷移現象に対する力学系的アプローチ

大阪大学・大学院基礎工学研究科 河原 源太 (Genta Kawahara)
Graduate School of Engineering Science,
Osaka University

1. はじめに

乱流遷移現象の理論的記述と予測は、流体力学における最重要課題の 1 つである。流れの特性は乱流遷移を経ることにより著しく変化するので、遷移流れの予測と制御は、流動抵抗低減や伝熱促進といった流れの特性の大幅な改善に直結し、工学的にも極めて重要となる。

周知のように、乱流遷移には超臨界問題と亜臨界問題とがある。超臨界遷移の問題は比較的単純明快であり、現象は非線形微分方程式の解の（一連の）分岐問題に帰着され、臨界点（分岐点）及びその近傍では線形理論と弱非線形理論により現象の理論的記述が可能である。この種の遷移では、層流解からの一連の解の分岐により、層流状態が段階的に複雑化する。その代表例としては、レイリー・ベナール対流やクエット・テイラー流などがある。一方、亜臨界遷移の問題は極めて複雑である。臨界点から遠く離れた場合あるいは臨界点が存在しない場合には、この種の遷移は有限振幅の攪乱により生じる本質的に非線形な問題であり、その理論的な取扱いが著しく難しくなる。亜臨界遷移では、層流状態から乱流状態へと急激に遷移が進行する。境界層流や平行平板間流れ、あるいは円管流や正方形ダクト流といった壁面剪断流は、亜臨界遷移により乱流に移行するのが一般的である。

本稿では、理論的な記述が困難である亜臨界乱流遷移の問題に対する力学系的アプローチを紹介したい。亜臨界遷移を示す典型的な系として平板間クエット流を考え、この系における乱れ、すなわち不規則変動（カオス）の発生を不安定周期軌道のホモクリニック軌道により捉えることを試みる。また、得られたホモクリニック軌道により、乱流状態で観測される間欠的な大振幅変動（バースト）がよく再現されることを示す。

2. 流れの概要と数値計算

本研究で対象とする流れは、2 枚の無限平行平板間の粘性流である。平板間の距離は $2h$ であり、2 平板は平板に平行な方向に互いに反対向きに一定の速さ U で運動する。以下では、平板の運動する（平板に平行な）方向を x 、平板に垂直方向を y 、スパン方向を z とする右手座標系を用いる。平板に平行な x , z 方

向には流れは周期的であると仮定し、その周期をそれぞれ L_x , L_z とする。レイノルズ数を $Re \equiv Uh/\nu = 400$ とし、このレイノルズ数で乱流が持続する最小周期箱 $(L_x/h, L_z/h) = (1.755\pi, 1.2\pi)$ 中の流れ、いわゆるミニマル流 (Hamilton *et al.* 1995) を考える。

このミニマル平面クエット流ではいくつかの不安定周期軌道が数値的に求められている (Kawahara & Kida 2001)。そのうちの 1 つの周期軌道は乱流状態よりも低いエネルギー散逸と壁面摩擦を示し (Kawahara 2005; Kawahara & Kida 2005)、その時間発展は低速ストリークの定在波的なスパン方向振動により特徴づけられる。この周期軌道は唯一の不安定フロケ乗数を持ち、相空間におけるその不安定多様体の次元は 2 となり、その安定多様体の余次元は 1 である (Kawahara 2005)。周期軌道とその不安定多様体は速度場の空間対称性 $(u, v, w)(x, y, z) = (u, v, -w)(x + L_x/2, y, -z)$, $(u, v, w)(x, y, z) = (-u, -v, w)(-x, -y, z + L_z/2)$ をもつ (Kawahara 2005; Kawahara & Kida 2005)。

流れの時間発展を直接数値シミュレーションにより追跡する。シミュレーションにおける空間の離散化には、 (x, z) に対しフーリエ級数展開、 z に対しチェビシェフ多項式展開を用い、時間積分は粘性項にクランク・ニコルソン法、非線形項にアダムス・バッシュフォース法を用いる (Itano & Toh 2001)。1 周期箱における格子点数は $32 \times 33 \times 32$ である。流れの時間発展においては、 x 方向の流量と z 方向の平均圧力勾配をゼロに保つ。周期軌道の不安定多様体上でのホモクリニック軌道の数値計算では、周期軌道の不安定固有空間中の初期点を考え (Kawahara 2005)、その初期点からの長時間の時間発展を上記の直接数値シミュレーションと多重シューティング法とを組み合わせることで実行する (van Veen *et al.* 2011)。ポアンカレ断面上では不安定固有空間は 1 次元となるので、この固有空間上で初期点を 1 次元的に掃引し、長時間積分の後にも状態点が層流にも乱流にも吸引されない初期点を 2 分法により比較的容易に見出すことができる。この長時間後の状態点は層流にも乱流にも吸引されない層流－乱流吸引領域境界に位置し、この境界は不安定周期軌道の (余次元 1 の) 安定多様体に一致する。したがって、周期軌道近傍の初期点から出発した状態点は、十分時間が経過すると (ポアンカレ断面において) 周期軌道の安定多様体に沿って周期軌道に漸近する。以上の多重シューティング法で得られたポアンカレ断面上での状態点は、不安定多様体と安定多様体の上に位置するホモクリニック点となる。

3. ホモクリニック軌道

第 2 節で述べた手法により数値的に求められたホモクリニック軌道を図 1 に示す。図 1(a) が示すように、ホモクリニック軌道は、時間とともに、記号 L を付した周期軌道近傍から高エネルギー散逸、高エネルギー注入を伴う活発な状態に移行し、乱流状態の平均散逸、平均注入の無次元値 (およそ 3) をはるかに上

回った後、再び静穏な周期軌道近傍に回帰している。乱流状態の確率密度関数 (PDF) はホモクリニック軌道で囲まれた領域内部で高い値を示している。

図 1(b) は周期軌道近傍のホモクリニック軌道を 3 次元空間に射影したものである。ホモクリニック軌道は図中に灰色矢印で示す不安定固有空間 (固有ベクトル) に沿って周期軌道から離脱して大振幅の変動を示した後、黒色矢印で示す周期軌道の第 3 固有ベクトル (第 2 固有ベクトルは中立固有値に対応し周期軌道方向を向く) に沿って再び周期軌道に漸近する。第 3 固有ベクトルは安定ではあるが最も安定性が低い固有値に対応する (1 より小さいが最も 1 に近い)。軌道の回帰性を定量的に表すと、回帰軌道と周期軌道との第 3 固有ベクトルに沿う相違は、周期軌道のエネルギーノルムの $10^{-4}\%$ 程度である。

ここでは示さないが、図 1 に示すホモクリニック軌道とは異なるもう 1 つのホモクリニック軌道も発見しており、異なる 2 つのホモクリニック軌道が存在することから、これらのホモクリニック軌道はポアンカレ断面において横断的に交差する不安定多様体と安定多様体の交点、つまりホモクリニック点をもたらすものといえる。ホモクリニック点上の状態点はポアンカレ写像によって異なるホモクリニック点に写像されるため、無数のホモクリニック点が存在することになる。

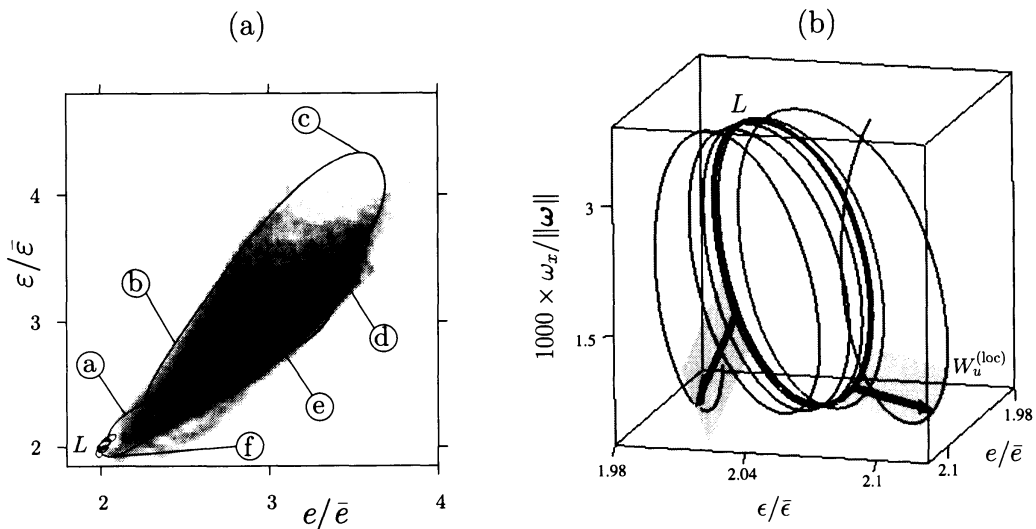


Figure 1. Two- and three-dimensional projections of the homoclinic orbit: (a) the projection onto energy input and dissipation rate, normalized by their value in laminar flow; (b) close-up of the periodic orbit with the homoclinic. In (a) the PDF of turbulence is shown in gray scale. The labels correspond to the snap shots in Figure 2. In (b) the black and the gray arrow denote the projected unstable eigenspace and the projected least stable eigenspace, respectively. On the axes are the normalized energy input and dissipation rate, and the total streamwise vorticity modulus normalized by total vorticity.

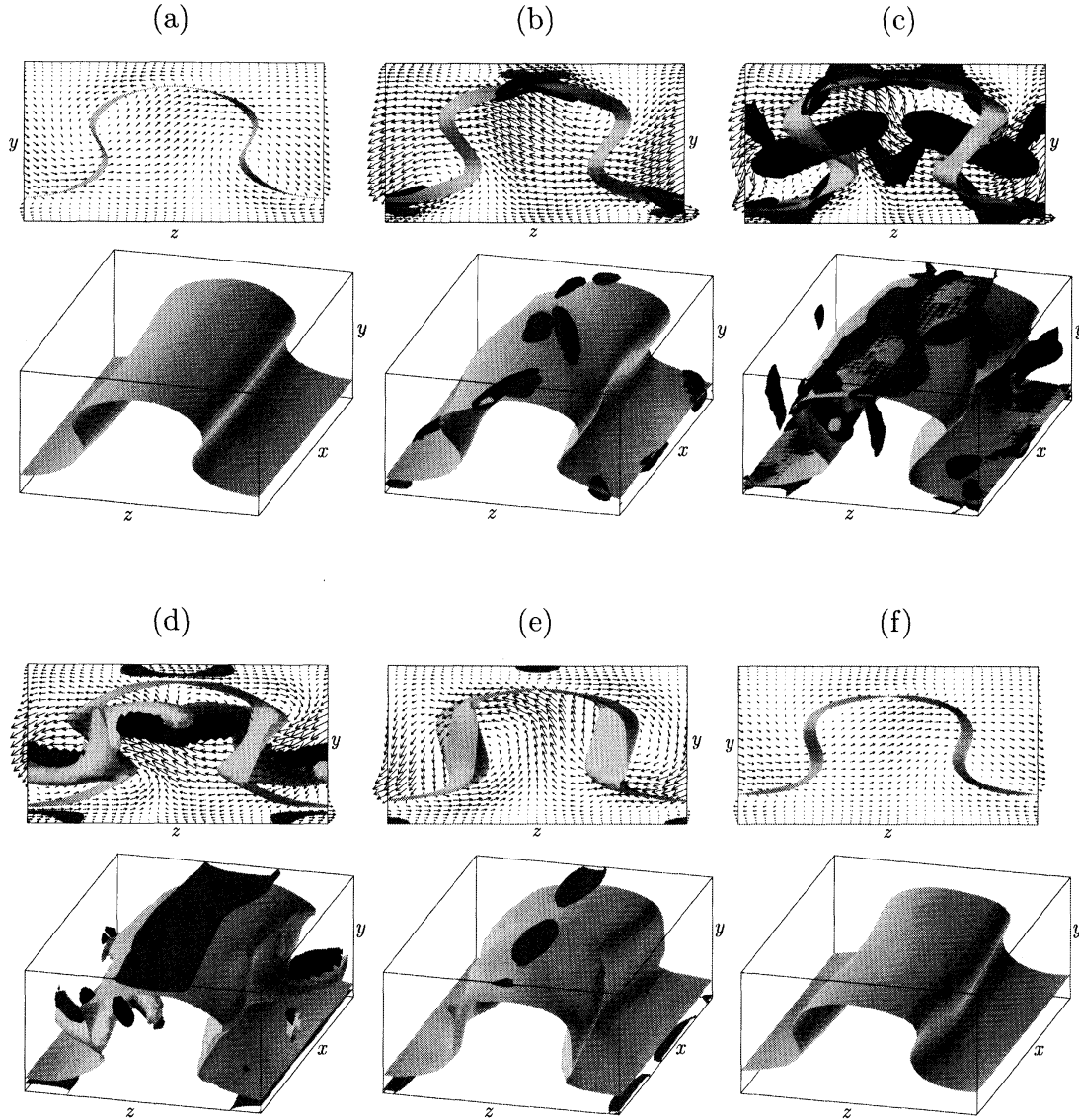


Figure 2. Visualization of flow structures in one periodic box $L \times W \times H$ in six phases on the homoclinic orbit, labeled as in Figure 1. In each phase the structures are viewed in two distinct directions. Gray corrugated isosurfaces of the null streamwise (x) velocity represent streamwise streaks. Black isosurfaces at $0.2(U/h)^2$ for the second invariant of a velocity gradient tensor are shown to visualize streamwise vortex tubes. Near-wall gray isosurfaces show the local energy dissipation rate at 20 times the corresponding laminar value. In the mid plane $x = L_x/2$ the cross-stream velocity is shown, related to that at $x = 0$ by a spanwise reflection under the flow symmetry.

この事実は、周期軌道の不安定多様体と安定多様体が極めて複雑な相空間構造をもち、スメールの馬蹄形写像により数学的に記述されるカオスの動力学が現れることを示唆する (Smale 1965)。

4 ホモクリニック軌道とバースト

ホモクリニック軌道に沿う流れの構造の物理空間における時間発展を図 2(a-f) に示す。図中の構造が可視化された各時刻は図 1(a) の軌道に付された各記号のそれに対応する。初期時刻 (a) では、低速ストリークのスパン (z) 方向の定在波振動が強められ、ストリークの流れ (x) 方向依存性が顕著となり、それと同時にストリークが平板垂直 (y) 方向に成長する。以上の時間発展は周期軌道の線形不安定性の結果と解釈できる。時刻 (b) では、成長したストリークの底部あるいは頂部と平板との間に強い渦度を有する薄層が現れ、そこで縦渦が発生し高い剪断とエネルギー散逸をもたらす。互いに反対符号の x 方向渦度成分をもつ縦渦が、ストリークの底部あるいは頂部において x 方向に沿い交互に並ぶ。時刻 (c) では、ストリークの変形が著しくなるとともに、新たな縦渦がストリークの底部あるいは頂部に発生し、最初に現れた縦渦と並列して z 方向に高速運動する。その際にストリークの底部あるいは頂部と平板との間の薄層において極めて高いエネルギー散逸が観測される。図 2 中の高エネルギー散逸 (層流のエネルギー散逸率の 20 倍以上) 領域の全エネルギー散逸への寄与率及び体積占有率を図 3 に示す。この図から、時刻 (c) 付近で可視化された高散逸領域の体積占有率は 10% 未満であるにもかかわらず、その全エネルギー散逸への寄与は 40% 程度と極めて大きいことがわかる。また、図 2(c) から乱流中の自己再生サイクル (Hamilton *et al.* 1995) 及びそれを再現する周期運動 (Kawahara & Kida 2001) と同様、ストリークの側部にも縦渦が発生することがわかるが、ホモクリニック軌道において観測されたストリークの底部あるいは頂部の縦渦は乱流状態での自己再生サイクルでは認められない。さらに時間が経過すると、時刻 (d) において大きく変形したストリークが崩壊し、時刻 (e) ではストリークと縦渦は急速に減衰し、最終的に時刻 (f) においては周期軌道近傍の静穏な状態に回帰する。

以上のホモクリニック軌道に沿う構造の時間発展は、ミニマル平面クエット乱流で観測されるバースト (Kawahara & Kida 2001) と極めて類似しており、図 4 に示すように、ホモクリニック軌道上で高エネルギー散逸を伴う時間帯で平均された速度分布は、乱流の平均速度分布とは大きく異なり、バースト時の乱流の平均速度分布にほぼ一致する。したがって、バースト現象はホモクリニック軌道に沿う大振幅の間欠的な変動として解釈できるものといえる。

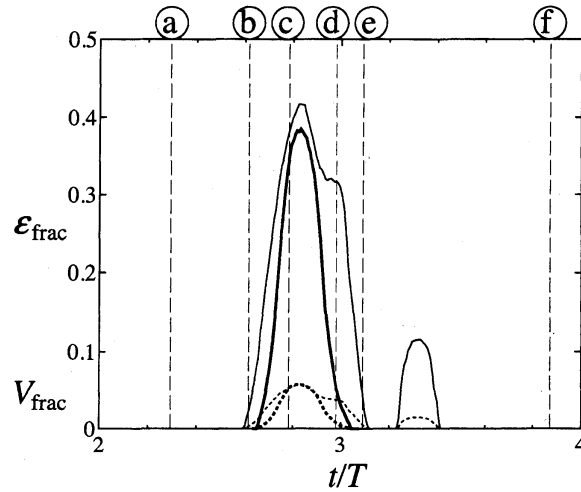


Figure 3. Temporal variation of energy-dissipation ϵ_{frac} (solid curve) and volume V_{frac} (dashed curve) fractions in the high-dissipation region bounded by the near-wall gray surfaces in Figure 2, with phases a–f as in that figure. Time t is normalized with the period of the periodic orbit. Thin lines represent the homoclinic orbit while thick ones denote corresponding data for the spontaneous bursting segment.

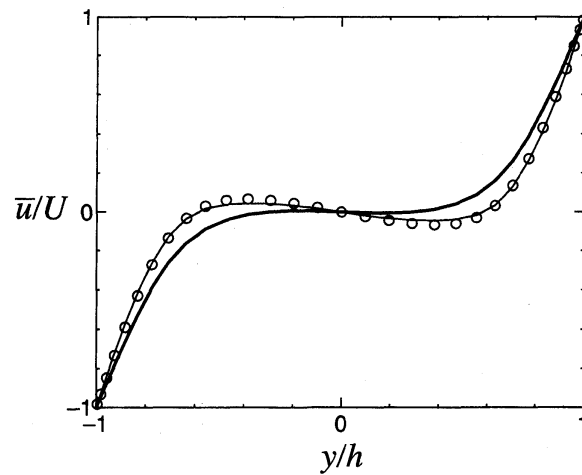


Figure 4. Comparison of streamwise-velocity profiles, averaged over time and wall-parallel directions. Symbols represent the time average of the homoclinic orbit while lines denote those of the turbulent orbits. The thick line is the average along a long turbulent orbit. The bursting (thin line) and homoclinic profiles are averaged along the part of the orbit where $\epsilon/\bar{\epsilon} > 4$, i.e. around phase c in Figure 1.

5. まとめ

本稿では、流体力学における重要課題である亜臨界乱流遷移問題に対する力学系のアプローチとして、 $Re = 400$ のミニマル平面クエット流における不安定周期軌道ホモクリニック軌道に関する数値的研究を紹介した。この軌道は、ポアンカレ断面において周期軌道の不安定多様体と安定多様体との無数の横断的交点を生成し、流れの振舞いのカオス化、そして乱流遷移に重要な役割を果たすものと考えられる。不安定多様体と安定多様体との横断的交点が生成するレイノルズ数（そのレイノルズ数において交差は接線的となるものと予想される）を評価することができれば、ミニマル平面クエット流の亜臨界遷移レイノルズの理論的予測が可能となるかも知れない。

本稿で紹介した結果は、L. van Veen 博士との共同研究により得られた成果である。ここに記して謝意を表する。

文 献

- Hamilton, J. M., Kim, J. & Waleffe, F. 1995 “Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 287, pp. 317–348.
- Itano, T. & Toh, S. 2001 “The dynamics of bursting process in wall turbulence”, *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 70, pp. 703–716.
- Kawahara, G. 2005 “Laminarization of minimal plane Couette flow: Going beyond the basin of attraction of turbulence”, *Phys. Fluids*, Vol. 17, 041702.
- Kawahara, G. & Kida, S. 2001 “Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 449, pp. 291–300.
- Smale, S. 1965 “Diffeomorphisms with many periodic points”, in *Differential and Combinatorial Topology*, pp. 63–80.
- van Veen, L., Kawahara, G. & Matsumura, A. 2011 “On matrix-free computation of 2D unstable manifolds”, *SIAM J. Sci. Comp.*, Vol.33, pp. 25–44.