

## Log-hyponormal operator について

東北薬科大学 棚橋 浩太郎

### [ 1. はじめに ]

ヒルベルト空間  $H$  上の有界作用素全体を  $B(H)$  とかく。  $T \in B(H)$  が normal operator ( $TT^* = T^*T$ ) ならば  $T$  はスペクトル分解ができる、よって  $T$  の性質はよく分かっていると考える良い。また、より一般の作用素である hyponormal operator ( $TT^* \leq T^*T$ ), semihyponormal operator ( $(TT^*)^{\frac{1}{2}} \leq (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ ) の性質も Xia [12] らによって調べられている。これらの作用素の一般化として  $p$ -hyponormal operator ( $(TT^*)^p \leq (T^*T)^p, 0 < p < \frac{1}{2}$ ) が Aluthge [1] によって定義され、いくつかの興味深い性質が明らかになって以来、Chō, Itoh [3, 4], Furuya [10], Yoshino [13] らがさらに  $p$ -hyponormal operator のいろんな性質を明らかにしてきた。

ここでは、さらに、より一般化されたと考えられる log-hyponormal operator という作用素を定義し、 $p$ -hyponormal operator でない log-hyponormal operator の例を示す。また、log-hyponormal operator の Aluthge transform, Putnam's inequality, Angular cutting に関する性質を紹介する。

[ 定義 1.1 ]  $T \in B(H)$  が可逆で次を満たすとき log-hyponormal という。

$$\log(TT^*) \leq \log(T^*T).$$

関数  $\log x : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$  は operator monotone である。よって、可逆な  $p$ -hyponormal operator は log-hyponormal である。このような作用素を考えしたのは Ando [2] が最初であろう。Ando [2] は  $T$  の値域の閉包への  $T^*T, TT^*$  の compression を  $A, B$  とおくと、 $\log B \leq \log A$  で、 $\ker T \subset \ker T^*$  ならば  $T$  は paranormal ( $\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|$ ) であることを示した。log-hyponormal operator はこの条件を満たすので、よって、Ando [2] から log-hyponormal operator は paranormal であることがわかる。

次の例は log-hyponormal であるが、どの  $0 < p$  をとっても  $p$ -hyponormal operator でない作用素の例である。

[ 例 1.2 ]  $H = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{C}^2$  とする。また  $x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots) \in H, \|x\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|x_j\|^2 < \infty$  とおく。ここで  $A, B$  を

$$\log A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \log B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup> This research was supported by Grant-in-Aid Research No. 10640185

となる行列とする。また  $P \in B(H)$  を

$$(Px)_n = \begin{cases} Bx_n & n \leq 0, \\ Ax_n & 1 \leq n \end{cases}$$

とおく。また  $U$  を  $(Ux)_n = x_{n-1}$  で定まる unitary shift とし  $T = UP$  とおく。すると

$$\begin{aligned} (((T^*T)^p - (TT^*)^p)x)_n &= \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ (A^{2p} - B^{2p})x_1 & n = 1, \end{cases} \\ ((\log(T^*T) - \log(TT^*))x)_n &= \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ (2\log A - 2\log B)x_1 & n = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。ここで [6] より  $\log B \leq \log A$  であるが  $B^{2p} \leq A^{2p}$  となる  $0 < p$  は存在しないことが示されている。よって  $T$  は log-hyponormal operator だが  $p$ -hyponormal operator にならない。

## [ 2. Aluthge transform ]

Aluthge [1] は  $p$ -hyponormal operator  $T \in B(H)$  ( $0 < p < \frac{1}{2}$ ) が  $T = U|T|$ ,  $U$  unitary operator と表されるとき、Aluthge transform  $\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$  は  $(p + \frac{1}{2})$ -hyponormal であることを示し、この Aluthge transform を用いて  $T$  の性質を調べた。この結果は Furuta, Yanagida [8, 9] によって拡張され、最終的に Yoshino [13], Furuya [10] によって次のように拡張されている。

[ 命題 2.1 ( Yoshino [13], Furuya [10] ) ]  $T \in B(H)$  は  $p$ -hyponormal operator ( $0 < p < 1$ ) とする。 $T$  の極分解を  $T = U|T|$  として Aluthge transform  $T(s, t) = |T|^s U |T|^t$  ( $0 < s, t$ ) を考える。

このとき  $\max(s, t) \leq p$  ならば

$$T(s, t)T(s, t)^* \leq |T|^{2(s+t)} \leq T(s, t)^*T(s, t)$$

となる。よって Aluthge transform  $T(s, t)$  は hyponormal operator である。

また、 $p < \max(s, t)$  ならば

$$\{T(s, t)T(s, t)^*\}^{\frac{p+\min(s, t)}{s+t}} \leq |T|^{2(p+\min(s, t))} \leq \{T(s, t)^*T(s, t)\}^{\frac{p+\min(s, t)}{s+t}}$$

となる。よって Aluthge transform  $T(s, t)$  は  $\frac{p+\min(s, t)}{s+t}$ -hyponormal operator である。

次の結果は log-hyponormal operator はある意味で  $p = 0$  に対応する  $p$ -hyponormal operator であると考えられることを示している。

[ 定理 2.2 ]  $T \in B(H)$  は log-hyponormal operator とする。 $T$  の極分解を  $T = U|T|$  として Aluthge transform  $T(s, t) = |T|^s U |T|^t$  ( $0 < s, t$ ) を考える。

このとき

$$\{T(s, t)T(s, t)^*\}^{\frac{\min(s, t)}{s+t}} \leq |T|^{2\min(s, t)} \leq \{T(s, t)^*T(s, t)\}^{\frac{\min(s, t)}{s+t}}$$

となる。よって Aluthge transform  $T(s, t)$  は  $\frac{\min(s, t)}{s+t}$ -hyponormal operator である。

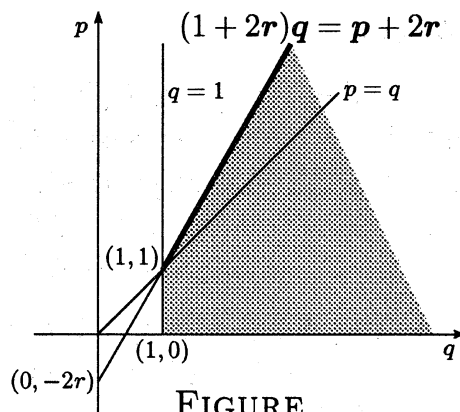
以下、定理 2.2 の証明を述べる。次は古田不等式と呼ばれ、証明の鍵になる。

[ 命題 2.3 ( 古田 [7] ) ] 正数  $0 < p, q, r \in \mathbb{R}$  と作用素  $A, B \in B(H)$  は  $0 \leq B \leq A$  を満たすとする。このとき  $p + 2r \leq (1 + 2r)q$  かつ  $1 \leq q$  ならば

$$B^{\frac{p+2r}{q}} \leq (B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}}, \quad (1)$$

$$(A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}} \quad (2)$$

が成立する。( Figure 参照 )



FIGURE

次は Fujii, Jiang, Kamei [5] による結果で、ある意味で  $\log$  の順序から  $p$  乗の順序がでるというものである。

[ 命題 2.4 ( Fujii, Jiang, Kamei [5] ) ] 可逆な正作用素  $A, B \in B(H)$  が  $\log B \leq \log A$  を満たすとする。このとき、任意の  $\delta \in (0, 1)$  に対して

$$B^\alpha \leq (e^\delta A)^\alpha$$

を満たす  $\alpha \in (0, 1)$  が存在する。

[ 定理 2.2 の証明 ]  $T \in B(H)$  は  $\log$ -hyponormal operator とする。  $T$  は可逆だから  $T = U|T|$  と極分解したとき  $U$  は unitary operator である。仮定から

$$\log(T^*T) = \log|T|^2 \geq (TT^*) = \log|T^*|^2$$

なので

$$\log|T| \geq \log|T^*| = U(\log|T|)U^*$$

となる。よって、命題 2.4 より、任意の  $\delta \in (0, 1)$  に対して

$$(e^\delta|T|)^\alpha \geq |T^*|^\alpha = U|T|^\alpha U^*$$

を満たす  $\alpha \in (0, 1)$  が存在する。よって  $e^{\alpha\delta}|T|^\alpha \geq U|T|^\alpha U^*$  となるので  $e^{\alpha\delta}U^*|T|^\alpha U \geq |T|^\alpha$  が成立する。よって

$$e^{2\alpha\delta}U^*|T|^\alpha U \geq e^{\alpha\delta}|T|^\alpha \geq U|T|^\alpha U^*$$

となる。ここで

$$A = e^{2\alpha\delta}U^*|T|^\alpha U, B = e^{\alpha\delta}|T|^\alpha, C = U|T|^\alpha U^*$$

とおく。さて  $T(s, t) = |T|^s U |T|^t$  ( $0 < s, t$ ) とおく。

まず  $s \leq t$  の場合を示す。このとき

$$\begin{aligned} \{T(s, t)^* T(s, t)\}^{\frac{s}{s+t}} &= (|T|^t U^* |T|^{2s} U |T|^t)^{\frac{s}{s+t}} \\ &= \left\{ (e^{-\alpha\delta} B)^{\frac{t}{\alpha}} (e^{-2\alpha\delta} A)^{\frac{2s}{\alpha}} (e^{-\alpha\delta} B)^{\frac{t}{\alpha}} \right\}^{\frac{s}{s+t}} \\ &= e^{-\frac{2s\delta(2s+t)}{s+t}} \left( B^{\frac{t}{\alpha}} A^{\frac{2s}{\alpha}} B^{\frac{t}{\alpha}} \right)^{\frac{s}{s+t}} \end{aligned}$$

となる。ここで  $p = \frac{2s}{\alpha}, q = \frac{s+t}{s}, r = \frac{t}{\alpha}$  とおくと

$$\frac{2(s+t)}{\alpha} = p + 2r \leq (1 + 2r)q = \frac{(\alpha + 2t)(s+t)}{\alpha s}$$

となるので、古田不等式から

$$\begin{aligned} \{T(s, t)^* T(s, t)\}^{\frac{s}{s+t}} &\geq e^{-\frac{2s\delta(2s+t)}{s+t}} \left( B_{\alpha}^{\frac{t}{\alpha}} B_{\alpha}^{\frac{2s}{\alpha}} B_{\alpha}^{\frac{t}{\alpha}} \right)^{\frac{s}{s+t}} \\ &= e^{-\frac{2s\delta(2s+t)}{s+t}} B_{\alpha}^{\frac{2s}{\alpha}} \end{aligned}$$

となる。

同様に

$$\begin{aligned} \{T(s, t) T(s, t)^*\}^{\frac{s}{s+t}} &= (|T|^s U |T|^{2t} U^* |T|^s)^{\frac{s}{s+t}} \\ &= \left\{ (e^{-\alpha\delta} B)^{\frac{s}{\alpha}} C_{\alpha}^{\frac{2t}{\alpha}} (e^{-\alpha\delta} B)^{\frac{s}{\alpha}} \right\}^{\frac{s}{s+t}} \\ &= e^{-\frac{2s^2\delta}{s+t}} \left( B_{\alpha}^{\frac{s}{\alpha}} C_{\alpha}^{\frac{2t}{\alpha}} B_{\alpha}^{\frac{s}{\alpha}} \right)^{\frac{s}{s+t}} \end{aligned}$$

が成立する。ここで  $p = \frac{2t}{\alpha}, q = \frac{s+t}{s}, r = \frac{s}{\alpha}$  とおくと

$$\frac{2(s+t)}{\alpha} = p + 2r \leq (1 + 2r)q = \frac{(\alpha + 2s)(s+t)}{\alpha s}$$

となるので、古田不等式より

$$\begin{aligned} \{T(s, t) T(s, t)^*\}^{\frac{s}{s+t}} &\leq e^{-\frac{2s^2\delta}{s+t}} \left( B_{\alpha}^{\frac{s}{\alpha}} B_{\alpha}^{\frac{2t}{\alpha}} B_{\alpha}^{\frac{s}{\alpha}} \right)^{\frac{s}{s+t}} \\ &= e^{-\frac{2s^2\delta}{s+t}} B_{\alpha}^{\frac{2s}{\alpha}} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \{T(s, t)^* T(s, t)\}^{\frac{s}{s+t}} &\geq e^{-\frac{2s(2s+t)\delta}{s+t}} B_{\alpha}^{\frac{2s}{\alpha}} = e^{-\frac{2s(2s+t)\delta}{s+t}} e^{2s\delta} |T|^{2s} \\ &\geq e^{-\frac{2s(2s+t)\delta}{s+t}} e^{\frac{2s^2\delta}{s+t}} \{T(s, t) T(s, t)^*\}^{\frac{s}{s+t}} \end{aligned}$$

が成立する。ここで  $\delta \in (0, 1)$  は任意だったので

$$\{T(s, t)^* T(s, t)\}^{\frac{s}{s+t}} \geq |T|^{2s} \geq \{T(s, t) T(s, t)^*\}^{\frac{s}{s+t}}$$

となる。

$t < s$  の場合も同様である。

[ 証明終 ]

[ 定義 2.5 ]  $T \in B(H)$  のスペクトル全体を  $\sigma(T)$ , 点スペクトル全体を  $\sigma_p(T)$  とおく。また、複素数  $z \in \mathbb{C}$  が  $T$  の joint point spectrum であるとは

$$(T - z)x = 0 \text{ かつ } (T^* - \bar{z})x = 0$$

を満たす non-zero vector  $x \in H$  が存在するときをいい、 $T$  の joint point spectrum 全体を  $\sigma_{jp}(T)$  とかく。

[ 定理 2.6 ]  $T \in B(H)$  が log-hyponormal operator ならば

$$\sigma_p(T) = \sigma_{jp}(T)$$

である。

[ 証明 ]  $T \in B(H)$  を  $T = U|T|$  と極分解する。このとき  $T$  は可逆なので  $U$  は unitary operator である。さて  $z = \rho e^{i\theta} \in \sigma_p(T)$  とする。このとき、 $Tx = U|T|x = zx$  となる non-zero vector  $x \in H$  が存在する。

$T$  の Aluthge transform  $\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$  を考える。定理 2.2 より  $\tilde{T}$  は  $\frac{1}{2}$ -hyponormal operator である。よって [12, Theorem 1.2.3] より  $\sigma_p(\tilde{T}) = \sigma_{jp}(\tilde{T})$  である。ここで

$$\tilde{T}|T|^{\frac{1}{2}}x = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|x = |T|^{\frac{1}{2}}zx = \rho e^{i\theta}|T|^{\frac{1}{2}}x$$

となるが、[12, Theorem 1.2.3] の証明より、実は

$$\tilde{T}^*|T|^{\frac{1}{2}}x = \rho e^{-i\theta}|T|^{\frac{1}{2}}x$$

が成立する。よって  $|T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|x = \rho e^{-i\theta}|T|^{\frac{1}{2}}x$  となるが、 $|T|$  は可逆なので  $U^*|T|x = \rho e^{-i\theta}x$  である。また、 $U|T|x = \rho e^{i\theta}x$  なので  $|T|x = U^*U|T|x = \rho e^{i\theta}U^*x$  となる。よって  $\rho e^{i\theta}(U^*)^2x = U^*|T|x = \rho e^{-i\theta}x$  となるから  $(U^*)^2x = e^{-2i\theta}x$  が示された。よって

$$\begin{aligned} U^*(U^* + e^{-i\theta})x &= (U^*)^2x + e^{-i\theta}U^*x = e^{-2i\theta}x + e^{-i\theta}U^*x \\ &= e^{-i\theta}(U^* + e^{-i\theta})x, \\ U^*(U^* - e^{-i\theta})x &= (U^*)^2x - e^{-i\theta}U^*x = e^{-2i\theta}x - e^{-i\theta}U^*x \\ &= -e^{-i\theta}(U^* - e^{-i\theta})x \end{aligned}$$

となる。

さて  $|\mu| = 1$ ,  $M_\mu = \{f \in H \mid U^*f = \mu f\}$  とおく。このとき  $f \in M_\mu$  ならば  $|T|f \in M_\mu$  となることを示そう。

$T$  は log-hyponormal operator なので

$$\log |T| \geq \log |T^*| = U(\log |T|)U^*$$

となる。ここで  $Q = \log |T| - U(\log |T|)U^* \geq 0$  とおくと、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle Qf, f \rangle = \langle \log |T|f, f \rangle - \langle U(\log |T|)U^*f, f \rangle \\ &= \langle \log |T|f, f \rangle - \langle (\log |T|)U^*f, U^*f \rangle \\ &= \langle \log |T|f, f \rangle - \langle (\log |T|)\mu f, \mu f \rangle = 0 \end{aligned}$$

となるので、 $Qf=0$  となる。つまり

$$(\log |T|)f = U(\log |T|)U^*f = U(\log |T|)\mu f$$

となる。よって  $U^*(\log |T|)f = \mu(\log |T|)f$  であるから  $(\log |T|)f \in M_\mu$  である。

よって、任意の多項式  $g(\cdot)$  に対して  $g(\log |T|)f \in M_\mu$  となる。よって  $|T|f \in M_\mu$  である。

よって

$$U^*|T|(U^* + e^{-i\theta})x = e^{-i\theta}|T|(U^* + e^{-i\theta})x, \quad (3)$$

$$U^*|T|(U^* - e^{-i\theta})x = -e^{-i\theta}|T|(U^* - e^{-i\theta})x \quad (4)$$

となる。ここで (4) から (3) を引くと

$$U^*|T|x = |T|U^*x$$

となる。従って

$$T^*x = |T|U^*x = U^*|T|x = \rho e^{-i\theta}x = \bar{z}x$$

である。

[ 証明終 ]

### [ 3. Putnam's inequality ]

Putnam [11] は hyponormal operator  $T$  に対して次の不等式を示した。

[ 命題 3.1 (Putnam [11]) ]  $T \in B(H)$  は hyponormal operator とする。このとき

$$\|T^*T - TT^*\| \leq \text{meas } \sigma(T) = \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(T)} r dr d\theta$$

が成立する。

この結果は Xia [12], Chō, Itoh [4] によって次のように拡張された。

[ 命題 3.2 ( Xia [12], Chō, Itoh [4] ) ]  $T \in B(H)$  は  $p$ -hyponormal operator ( $0 < p < 1$ ) とする。このとき

$$\left\| \frac{(T^*T)^p - (TT^*)^p}{p} \right\| \leq \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(T)} r^{2p-1} dr d\theta$$

が成立する。

$T$  が log-hyponormal operator の場合は  $p \rightarrow +0$  として予想される次式が成立する。

[ 定理 3.3 ]  $T \in B(H)$  は log-hyponormal operator とする。このとき

$$\|\log(T^*T) - \log(TT^*)\| \leq \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(T)} r^{-1} dr d\theta$$

が成立する。

[ 注意 3.4 ]  $T \in B(H)$  が可逆な  $p$ -hyponormal operator の場合は次のようにして示すことができる。

Löwner-Heinz's inequality

$$0 \leq B \leq A, 0 < p < 1 \implies B^p \leq A^p$$

より  $T$  は任意の  $0 < q < p$  について  $q$ -hyponormal operator でもあるから、命題 3.2 より

$$\left\| \frac{(T^*T)^q - I}{q} - \frac{(TT^*)^q - I}{q} \right\| \leq \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(T)} r^{2q-1} dr d\theta$$

が成立している。(左辺の変形は、藤井さんの指摘による。) よって、 $q \rightarrow +0$  とし

$$\|\log(T^*T) - \log(TT^*)\| \leq \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(T)} r^{-1} dr d\theta$$

が成立する。

以下、定理 3.3 を証明する。

[ 定義 3.5 ]  $T \in B(H)$  の approximate point spectrum 全体を  $\sigma_a(T)$ , residual spectrum 全体を  $\sigma_r(T)$  とかく。また、複素数  $z \in \mathbb{C}$  が  $T$  の joint approximate point spectrum であるとは

$$\|(T - z)f_n\| \rightarrow 0, \|(T^* - \bar{z})f_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる unit vector の列  $f_n \in H$  が存在するときをいい、 $T$  の joint approximate point spectrum 全体を  $\sigma_{ja}(T)$  とかく。

[ 定理 3.6 ] 作用素  $T \in B(H)$  が log-hyponormal operator ならば

$$\sigma_a(T) = \sigma_{ja}(T)$$

である。

[ 証明 ]  $T \in B(H)$  を  $T = U|T|$  と極分解する。さて  $z = \rho e^{i\theta} \in \sigma_a(T)$  とする。このとき、

$$(T - z)f_n = (U|T| - \rho e^{i\theta})f_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる non-zero vector の列  $f_n \in H$  が存在する。ここで

$$(T^* - \bar{z})f_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を示せばよい。

さて、 $T$  は可逆なので  $U$  は unitary operator であり、 $|T|$  も可逆である。ここで  $T$  の Aluthge transform  $\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$  を考える。定理 2.2 より  $\tilde{T}$  は  $\frac{1}{2}$ -hyponormal operator であり、

$$\begin{aligned} \|(\tilde{T} - z)|T|^{\frac{1}{2}}f_n\| &= \| |T|^{\frac{1}{2}}U|T|f_n - z|T|^{\frac{1}{2}}f_n \| \\ &\leq \| |T|^{\frac{1}{2}} \| \| (T - z)f_n \| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となっている。よって  $(\tilde{T} - z)|T|^{\frac{1}{2}}f_n \rightarrow 0$  である。ここで  $\tilde{T}$  は  $\frac{1}{2}$ -hyponormal operator だから [12, Theorem 1.2.5] より  $\sigma_a(\tilde{T}) = \sigma_{ja}(\tilde{T})$  となり、その証明から

$$(\tilde{T}^* - \bar{z})|T|^{\frac{1}{2}}f_n = |T|^{\frac{1}{2}}(U^*|T| - \rho e^{-i\theta})f_n \rightarrow 0$$

となっている。よって

$$(U^*|T| - \rho e^{-i\theta})f_n \rightarrow 0$$

である。また、 $(U|T| - \rho e^{i\theta})f_n \rightarrow 0$  であるから

$$(|T| - \rho e^{i\theta}U^*)f_n = U^*(U|T| - \rho e^{i\theta})f_n \rightarrow 0$$

となる。よって

$$(U^*|T| - \rho e^{i\theta}(U^*)^2)f_n \rightarrow 0$$

となる。従って

$$((U^*)^2 - e^{-2i\theta}) f_n \rightarrow 0$$

である。よって

$$\begin{aligned} & U^*(U^* + e^{-i\theta})f_n - e^{-i\theta}(U^* + e^{-i\theta})f_n \\ &= (U^*)^2 f_n + e^{-i\theta}U^*f_n - e^{-i\theta}U^*f_n - e^{-2i\theta}f_n \rightarrow 0, \\ & U^*(U^* - e^{-i\theta})f_n + e^{-i\theta}(U^* - e^{-i\theta})f_n \\ &= (U^*)^2 f_n - e^{-i\theta}U^*f_n + e^{-i\theta}U^*f_n - e^{-2i\theta}f_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となる。

$T$  は log-hyponormal operator だから

$$\log |T| \geq \log |T^*| = U(\log |T|)U^*$$

となる。ここで  $Q = \log |T| - U(\log |T|)U^* \geq 0$ ,  $g_n = (U^* + e^{-i\theta})f_n$ ,  $\mu = e^{-i\theta}$  または  $g_n = (U^* - e^{-i\theta})f_n$ ,  $\mu = -e^{-i\theta}$  とおく。すると

$$U^*g_n - \mu g_n \rightarrow 0 \quad \text{かつ} \quad Ug_n - \bar{\mu}g_n \rightarrow 0$$

である。よって

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle Qg_n, g_n \rangle = \langle (\log |T|)g_n, g_n \rangle - \langle (\log |T|)U^*g_n, U^*g_n \rangle \\ &= \langle (\log |T|)g_n, g_n \rangle - \langle (\log |T|)(U^* - \mu)g_n, U^*g_n \rangle \\ &\quad - \langle (\log |T|)\mu g_n, (U^* - \mu)g_n \rangle - \langle (\log |T|)\mu g_n, \mu g_n \rangle \rightarrow 0 \end{aligned}$$

より、 $\|Q^{\frac{1}{2}}g_n\| \rightarrow 0$ , 従って  $Qg_n \rightarrow 0$  である。よって

$$(\log |T|)g_n - U(\log |T|)U^*g_n \rightarrow 0$$

となるから

$$(\log |T|)g_n - U(\log |T|)\mu g_n \rightarrow 0$$

となる。よって

$$\begin{aligned} & U(\log |T|)g_n - \bar{\mu}(\log |T|)g_n \rightarrow 0, \\ & U^*(\log |T|)g_n - \mu(\log |T|)g_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

である。

さて、 $h_n = (\log |T|)g_n$  とおく。すると、同様の議論から、

$$\begin{aligned} & U(\log |T|)h_n - \bar{\mu}(\log |T|)h_n \rightarrow 0, \\ & U^*(\log |T|)h_n - \mu(\log |T|)h_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となり、よって

$$\begin{aligned} U(\log |T|)^2 g_n - \bar{\mu}(\log |T|)^2 g_n &\rightarrow 0, \\ U^*(\log |T|)^2 g_n - \mu(\log |T|)^2 g_n &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

となる。従って、この議論を繰り返すと、任意の多項式  $f$  に対して

$$\begin{aligned} Uf(\log |T|) g_n - \bar{\mu}f(\log |T|) g_n &\rightarrow 0, \\ U^*f(\log |T|) g_n - \mu f(\log |T|) g_n &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

が成立する。よって

$$\begin{aligned} U|T|g_n - \bar{\mu}|T|g_n &\rightarrow 0, \\ U^*|T|g_n - \mu|T|g_n &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

となる。よって

$$U^*|T|(U^* + e^{-i\theta})f_n - e^{-i\theta}|T|(U^* + e^{-i\theta})f_n \rightarrow 0 \quad (5)$$

$$U^*|T|(U^* - e^{-i\theta})f_n + e^{-i\theta}|T|(U^* - e^{-i\theta})f_n \rightarrow 0 \quad (6)$$

である。ここで (6) から (5) を引くと

$$U^*|T|f_n - |T|U^*f_n \rightarrow 0$$

となるから、

$$(T^* - \rho e^{-i\theta})f_n = |T|U^*f_n - U^*|T|f_n + U^*|T|f_n - \rho e^{-i\theta}f_n \rightarrow 0$$

となる。

[ 証明終 ]

[ 定理 3.8 ]  $T \in B(H)$  は可逆とし、その極分解を  $T = U|T|$  とおく。  $t \in [0, 1]$  とし、  $\phi(\rho) = \rho^{1-t}e^{it\rho}$  とおく。また、  $\tilde{\phi}(\rho e^{i\theta}) = e^{i\theta}\phi(\rho)$ ,  $\tilde{\phi}(T) = U\phi(|T|)$  とおく。このとき  $\sigma_{ja}(\tilde{\phi}(T)) = \tilde{\phi}(\sigma_{ja}(T))$  である。

[ 証明 ]  $\rho e^{i\theta} \in \sigma_{ja}(T)$  とする。  $T$  は可逆だから  $0 < \rho$  で  $U$  は unitary operator である。よって [12, Lemma 1.2.4] から

$$(U - e^{i\theta})x_n \rightarrow 0 \quad \text{かつ} \quad (|T| - \rho)x_n \rightarrow 0$$

となる unit vector の列  $x_n \in H$  が存在する。よって

$$U^*(U - e^{i\theta})x_n = (I - e^{i\theta}U^*)x_n \rightarrow 0,$$

よって  $(e^{-i\theta} - U^*)x_n \rightarrow 0$  となる。

さて  $0 < \varepsilon$  を任意にとる。すると

$$\max\{|\phi(\rho) - P_\varepsilon(\rho)| : \rho \in \sigma(|T|)\} \leq \varepsilon$$

を満たす多項式  $P_\varepsilon$  が存在する。よって  $\|\phi(|T|) - P_\varepsilon(|T|)\| \leq \varepsilon$  である。ここで  $\|(P_\varepsilon(|T|) - P_\varepsilon(\rho))x_n\| \rightarrow 0$  だから

$$\|(\phi(|T|) - \phi(\rho))x_n\| \rightarrow 0$$

となる。よって

$$(U\phi(|T|) - e^{i\theta}\phi(\rho))x_n = U(\phi(|T|) - \phi(\rho))x_n + \phi(\rho)(U - e^{i\theta})x_n \rightarrow 0$$

である。従って

$$\begin{aligned} & (\phi(|T|)U^* - e^{-i\theta}\phi(\rho))x_n \\ &= \phi(|T|)(U^* - e^{-i\theta})x_n + e^{-i\theta}(\phi(|T|) - \phi(\rho))x_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となる。よって

$$e^{i\theta}\phi(\rho) = \tilde{\phi}(\rho e^{i\theta}) \in \sigma_{ja}(U\phi(|T|)) = \sigma_{ja}(\tilde{\phi}(T))$$

となるので

$$\tilde{\phi}(\sigma_{ja}(T)) \subset \sigma_{ja}(\tilde{\phi}(T))$$

が示された。

次に  $\tilde{\rho}e^{i\tilde{\theta}} \in \sigma_{ja}(\tilde{\phi}(T))$  とする。すると [12, Lemma 1.2.4] より

$$(U - e^{i\tilde{\theta}})x_n \rightarrow 0, (\phi(|T|) - \tilde{\rho})x_n = (|T|^{1-t}e^{t|T|} - \tilde{\rho})x_n \rightarrow 0$$

となる unit vector の列  $x_n \in B(H)$  が存在する。さて  $\rho = \phi^{-1}(\tilde{\rho})$  を  $\phi(\rho) = \rho^{1-t}e^{t\rho} = \tilde{\rho}$  の逆関数とする。このとき、任意の  $0 < \varepsilon$  に対して

$$\max\{|\phi^{-1}(\tilde{\rho}) - P_\varepsilon(\tilde{\rho})| : \tilde{\rho} \in \sigma(\phi(|T|))\} < \varepsilon$$

となる多項式  $P_\varepsilon$  が存在する。よって

$$\|\phi^{-1}(\phi(|T|)) - P_\varepsilon(\phi(|T|))\| = \||T| - P_\varepsilon(\phi(|T|))\| < \varepsilon$$

となる。ここで  $\|P_\varepsilon(\phi(|T|))x_n - P_\varepsilon(\tilde{\rho})x_n\| \rightarrow 0$  だから

$$\|(|T| - \phi^{-1}(\tilde{\rho}))x_n\| \rightarrow 0$$

となって、前の議論と同じようにして

$$e^{i\tilde{\theta}}\phi^{-1}(\tilde{\rho}) \in \sigma_{ja}(U|T|) = \sigma_{ja}(T)$$

が示される。従って  $\sigma_{ja}(\tilde{\phi}(T)) \subset \tilde{\phi}(\sigma_{ja}(T))$  だから  $\sigma_{ja}(\tilde{\phi}(T)) = \tilde{\phi}(\sigma_{ja}(T))$  である。

[ 証明終 ]

[ 定理 3.9 ] 作用素  $T \in B(H)$  は可逆な  $\frac{1}{2}$ -hyponormal operator とする。また、 $S \subset \mathbb{C}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $0 \leq r$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  とする。ここで

$$T(t) = U|T|^{1-t}e^{t|T|}, \quad \tau_t(\rho e^{i\theta}) = e^{i\theta}\rho^{1-t}e^{t\rho}$$

とおく。このとき、もし、

$$\sigma_{ja}(T(t)) \cap \tau_t(S) = \sigma_a(T(t)) \cap \tau_t(S) \quad \forall t \in [0, 1]$$

ならば

$$\sigma_a(T(t)) \cap \tau_t(S) = \tau_t(\sigma_a(T) \cap S) \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$\sigma_r(T(t)) \cap \tau_t(S) = \tau_t(\sigma_r(T) \cap S) \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$\sigma(T(t)) \cap \tau_t(S) = \tau_t(\sigma(T) \cap S) \quad \forall t \in [0, 1]$$

が成立する。

[ 証明 ]  $\rho e^{i\theta} \in S$  とする。このとき  $[0, 1] \ni t \rightarrow \tau_t(\rho e^{i\theta}) = e^{i\theta}\rho^{1-t}e^{t\rho}$  は  $t \in [0, 1]$  の連続関数で  $\tau_0(\rho e^{i\theta}) = \rho e^{i\theta}$  を満たす。ここで

$$\tau_t : S \ni \rho e^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta}\rho^{1-t}e^{t\rho} \in \tau_t(S)$$

は全単射である。また

$$\begin{aligned} & \log \{(T(t))^* (T(t))\} - \log \{(T(t)) (T(t))^*\} \\ &= 2(1-t) \{\log |T| - U(\log |T|)U^*\} + 2t(|T| - U|T|U^*) \geq 0 \end{aligned}$$

なので  $T(t)$  は log-hyponormal operator である。よって定理 3.7, 3.8 より

$$\sigma_a(T(t)) = \sigma_{ja}(T(t)) = \tau_t(\sigma_{ja}(T))$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sigma_a(T(t)) \cap \tau_t(S) &= \sigma_{ja}(T(t)) \cap \tau_t(S) = \tau_t(\sigma_{ja}(T)) \cap \tau_t(S) \\ &= \tau_t(\sigma_{ja}(T) \cap S) = \tau_t(\sigma_a(T) \cap S) \end{aligned}$$

である。よって

$$\sigma_a(T(t)) \cap \tau_t(S) = \tau_t(\sigma_a(T(0)) \cap S) = \tau_t(\sigma_a(T) \cap S)$$

となる。よって [12, Lemma 1.3.1] より

$$\begin{aligned} \sigma_r(T(t)) \cap \tau_t(S) &= \tau_t(\sigma_r(T(0)) \cap S) = \tau_t(\sigma_r(T) \cap S), \\ \sigma(T(t)) \cap \tau_t(S) &= \tau_t(\sigma(T(0)) \cap S) = \tau_t(\sigma(T) \cap S) \end{aligned}$$

である。

[ 証明終 ]

[ 定理 3.10 ]  $T \in B(H)$  は  $\frac{1}{2}$ -hyponormal operator として、その極分解を  $T = U|T|$  とおく。このとき、もし、 $Ue^{|T|}$  が log-hyponormal operator ならば

$$\begin{aligned}\sigma_a(Ue^{|T|}) &= \{ e^\rho e^{i\theta} : \rho e^{i\theta} \in \sigma_a(T) \}, \\ \sigma_r(Ue^{|T|}) &= \{ e^\rho e^{i\theta} : \rho e^{i\theta} \in \sigma_r(T) \}, \\ \sigma(Ue^{|T|}) &= \{ e^\rho e^{i\theta} : \rho e^{i\theta} \in \sigma(T) \}\end{aligned}$$

が成立する。

[ 証明 ]  $0 \leq t \leq 1$  として

$$T(t) = U|T|^{1-t}e^{t|T|}, \quad \tau_t(\rho e^{i\theta}) = e^{i\theta} \rho^{1-t} e^{t\rho}$$

とおく。ここで  $T(t)$  は log-hyponormal operator なので定理 3.6 より

$$\sigma_{ja}(T(t)) \cap \tau_t(\mathbb{C}) = \sigma_a(T(t)) \cap \tau_t(\mathbb{C})$$

となる。よって定理 3.9 より

$$\begin{aligned}\sigma_a(T(t)) \cap \tau_t(\mathbb{C}) &= \tau_t(\sigma_a(T) \cap \mathbb{C}) \quad \forall t \in [0, 1], \\ \sigma_r(T(t)) \cap \tau_t(\mathbb{C}) &= \tau_t(\sigma_r(T) \cap \mathbb{C}) \quad \forall t \in [0, 1], \\ \sigma(T(t)) \cap \tau_t(\mathbb{C}) &= \tau_t(\sigma(T) \cap \mathbb{C}) \quad \forall t \in [0, 1]\end{aligned}$$

となる。また、定理 3.6 より

$$\begin{aligned}\text{the boundary of } \sigma(T(1)) &\subset \sigma_a(T(1)) = \sigma_{ja}(T(1)) \\ &\subset \tau_1(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}\end{aligned}$$

となる。ここで  $T(1) = Ue^{|T|}$  は可逆なので

$$\sigma(T(1)) = \sigma(Ue^{|T|}) \subset \tau_1(\mathbb{C})$$

である。よって

$$\begin{aligned}\sigma_a(Ue^{|T|}) &= \tau_1(\sigma_a(T)) = \{ e^\rho e^{i\theta} : \rho e^{i\theta} \in \sigma_a(T) \}, \\ \sigma_r(Ue^{|T|}) &= \tau_1(\sigma_r(T)) = \{ e^\rho e^{i\theta} : \rho e^{i\theta} \in \sigma_r(T) \}, \\ \sigma(Ue^{|T|}) &= \tau_1(\sigma(T)) = \{ e^\rho e^{i\theta} : \rho e^{i\theta} \in \sigma(T) \}\end{aligned}$$

となる。

[ 証明終 ]

[ 定理 3.2 の証明 ] まず  $\log(T^*T) = \log |T|^2 \geq 0$  の場合を示す。このときは  $\sigma(|T|) \subset [1, \infty)$  である。ここで  $S = U \log |T|$  とおく。すると  $|S| = \log |T|$  になり、

$$\begin{aligned}(S^*S)^{\frac{1}{2}} - (SS^*)^{\frac{1}{2}} &= \log |T| - U(\log |T|)U^* \\ &= \frac{1}{2}(\log(T^*T) - \log(TT^*)) \geq 0\end{aligned}$$

が成立する。よって  $S$  は  $\frac{1}{2}$ -hyponormal operator である。よって命題 3.1 より

$$\|(S^*S)^{\frac{1}{2}} - (SS^*)^{\frac{1}{2}}\| \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma(S)} dr d\theta \quad (7)$$

となる。ここで  $Ue^{|S|} = U|T| = T$  だから定理 3.10 より

$$\sigma(T) = \sigma(Ue^{|S|}) = \{e^{i\theta}e^r \mid re^{i\theta} \in \sigma(S)\}$$

となる。ここで  $r = \log \rho$  とおくと  $dr = \frac{1}{\rho} d\rho$  なので (7) より

$$\|\log(T^*T) - \log(TT^*)\| \leq \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(T)} \frac{1}{\rho} d\rho d\theta$$

である。

次に  $\log(T^*T) < 0$  の場合を示す。  $0 < c$  とすると

$$\log\{(cT)^*(cT)\} = 2\log c + \log(T^*T)$$

となるので、適当な  $0 < c$  に対して  $\log\{(cT)^*(cT)\} \geq 0$  である。よって、前半の議論から

$$\|\log\{(cT)^*(cT)\} - \log\{(cT)(cT)^*\}\| \leq \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(cT)} \frac{1}{\rho} d\rho d\theta$$

となる。ここで  $\sigma(cT) = c\sigma(T)$  だから、 $\tilde{\rho} = \frac{1}{c}\rho$  とおくと

$$\|\log(T^*T) - \log(TT^*)\| \leq \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(T)} \frac{1}{c\tilde{\rho}} cd\tilde{\rho} d\theta = \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(T)} \frac{1}{\tilde{\rho}} d\tilde{\rho} d\theta$$

が成立する。

[ 証明終 ]

## [ 4. Angular cutting ]

$T \in B(H)$  が normal operator ならば  $T = U|T|$  となる unitary operator  $U$  が存在する。このとき  $U = \int_{\mathbb{T}} \lambda dE_\lambda$ ,  $|T| = \int_0^\infty \mu dF_\mu$  とスペクトル分解すると  $T$  と  $E_\lambda, F_\mu$  は可換になる。ここで  $\gamma = \{e^{i\theta} : a < \theta < b\}$  という arc に対して

$$E(\gamma)H = H_\gamma, T_\gamma = T|_{H_\gamma}$$

とおくと  $H_\gamma$  は  $D_\gamma = \{re^{i\theta} : 0 \leq r, \theta \in \gamma\}$  にあるスペクトラムに対応する  $T$  の spectral subspace であり、 $\sigma(T_\gamma) \subset \overline{D_\gamma}$  等が成立する。

$T$  が hyponormal ならばこのようなスペクトル分解は望めないが、特に  $T = U|T|$  となる unitary operator  $U$  が存在する場合には同様の結果が成立することを Xia [12] が証明した。この結果は Chō, Itoh [3] によって次のように拡張されている。

[ 命題 4.1 ( Chō, Itoh [3] ) ]  $T \in B(H)$  は  $p$ -hyponormal operator ( $0 < p < 1$ ) で  $T = U|T|$  となる unitary operator  $U = \int_{\mathbb{T}} \lambda dE_\lambda$  が存在するとする。ここで

$$H_\gamma = E(\gamma)H, T_\gamma = U|_{H_\gamma} (E(\gamma)|T|^{2p}E(\gamma))^{\frac{1}{2p}}|_{H_\gamma}$$

とおくとき

$$\begin{aligned} \sigma_p(T_\gamma) \setminus \{0\} &= \sigma_p(T) \cap D_\gamma, \sigma(T_\gamma) \subset \overline{D_\gamma}, \\ \sigma_a(T_\gamma) \cap D_\gamma &= \sigma_a(T) \cap D_\gamma, \sigma_r(T_\gamma) \cap D_\gamma = \sigma_r(T) \cap D_\gamma, \sigma(T_\gamma) \cap D_\gamma = \sigma(T) \cap D_\gamma \end{aligned}$$

が成立する。

$T$  が log-hyponormal operator の場合は  $T$  は可逆なので  $U$  は unitary operator である。この場合の angular cutting は次のようになる。(証明略)

[ 定理 4.2 ]  $T \in B(H)$  は log-hyponormal operator とする。ここで  $U = \int_{\mathbb{T}} \lambda dE_\lambda$  として

$$H_\gamma = E(\gamma)H, T_\gamma = U|_{H_\gamma} (e^{E(\gamma)(\log |T|)E(\gamma)})|_{H_\gamma}$$

とおくとき

$$\begin{aligned} \sigma_p(T_\gamma) &= \sigma_p(T) \cap D_\gamma, \sigma(T_\gamma) \subset \overline{D_\gamma}, \\ \sigma_a(T_\gamma) \cap D_\gamma &= \sigma_a(T) \cap D_\gamma, \sigma_r(T_\gamma) \cap D_\gamma = \sigma_r(T) \cap D_\gamma, \sigma(T_\gamma) \cap D_\gamma = \sigma(T) \cap D_\gamma \end{aligned}$$

が成立する。

## 参考文献

- [1] A. Aluthge, *On  $p$ -hyponormal operators for  $0 < p < 1$* , Integr. Equat. Oper. Th., **13** (1990), 307–315.
- [2] T. Ando, *Operators with a norm condition*, Acta Sci. Math., **33** (1972), 169–178.
- [3] M. Chō and M. Itoh, *On the angular cutting for  $p$ -hyponormal operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), **59** (1994), 411–420.
- [4] M. Chō and M. Itoh, *Putnam's inequality for  $p$ -hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 2435–2440.
- [5] M. Fujii, J. Jiang, E. Kamei, *Characterization of chaotic order and its application to Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3655–3658.
- [6] M. Fujii, J. Jiang, E. Kamei, K. Tanahashi, *A characterization of chaotic order and a problem*, J. Inequal. Appl., **2** (1998), 149–156.
- [7] T. Furuta,  *$A \geq B \geq O$  assures  $(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{\frac{p+2r}{q}}$  for  $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$  with  $(1+2r)q \geq (p+2r)$* , Proc. Amer. Math. Soc., **101** (1987), 85–88.
- [8] T. Furuta, *Generalized Aluthge transformation on  $p$ -hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 3071–3075.
- [9] T. Furuta and M. Yanagida, *Further extension of Aluthge transformation on  $p$ -hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **29** (1997), 122–125.
- [10] T. Furuya, *A note on  $p$ -hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3617–3624.
- [11] C. R. Putnam, *An inequality for the area of hyponormal spectra*, Math. Z., **116** (1970), 323–330.
- [12] D. Xia, *Spectral theory of hyponormal operators*, Birkhauser Verlag, Boston, 1983.
- [13] T. Yoshino, *The  $p$ -hyponormality of the Aluthge transform*, Interdisciplinary Information Sciences, **3** (1997), 91–93.