

# 制限された二階述語計算の証明図に関する標準型定理

筑波大学 非常勤講師 池田一磨 (Kazuma Ikeda)

University of Tsukuba

## 1 導入

一階述語計算 LK の証明図に関する標準型定理は, Gentzen の三段論法消去定理, Mint の標準型定理, Arai と Mint の標準型定理などが得られている (cf. [3]). 二階述語計算に関しても, 三段論法消去定理に関する様々な研究がある.

本稿では, 二階述語計算の証明図に関する Mints 型の標準型定理を紹介する. それは,  $\Pi_0^1$ -内包公理をもつ二階述語計算  $\Pi_0^1$ -LK に関するもので, [4] において  $\varepsilon_{\varepsilon_0}$  までの超限帰納法により証明された. この結果はその応用として, ACA が無矛盾性であることと  $\text{ACA}_0$  が  $\omega$ -無矛盾であることを導く.

本稿では紹介していないが,  $\Pi_0^1$ -LK に公理を加えた体系に関する Mints 型の標準型定理も証明される. この定理の証明は, その後鈴木により  $\varepsilon_{\varepsilon_1}$  までの超限帰納法を使った証明に改良された (cf. [6]). この定理はその応用として, ACA が  $\omega$ -無矛盾であることを導く.

## 2 体系 $\Pi_0^1$ -LK

本節では, 本稿で扱う体系  $\Pi_0^1$ -LK とそれに関する用語について述べる.  $\Pi_0^1$ -LK は,  $\Pi_0^1$ -内包公理をもつ二階述語論理を形式化した体系の一つである.

$\Pi_0^1$ -LK は, 二階の言語を用いて記述される. ただし, 述語変数記号としては, 1 変数述語変数記号のみを持ち, 個体定数記号と述語定数記号はそれぞれ少なくとも一つ持つと仮定する. また, 自由述語変数記号としては  $U_0, U_1, \dots$  を用い, 束縛述語変数記号としては  $X_0, X_1, \dots$  を用いることにする.

論理式は, 原始論理式とその否定から,  $\wedge, \vee, \forall x, \exists x, \forall X$  と  $\exists X$  を用いて構成される. 論理式  $A$  の否定  $\neg A$  は De Morgan の法則を用いて定義される. 論理式の有限列は, 式と呼ばれ,  $\Gamma, \Delta, \dots$  等で表される.

体系  $\Pi_0^1\text{-LK}$  は以下の始式と推論規則からなる体系である.

1. 始式

$$\frac{}{A, \neg A}$$

$A$  は原始論理式.

2. 論理記号に関する推論規則

$$\frac{\Gamma, A_0 \quad \Gamma, A_1}{\Gamma, A_0 \wedge A_1} (\wedge) \qquad \frac{\Gamma, A_i}{\Gamma, A_0 \vee A_1} (\vee_i)$$

$$\qquad \qquad \qquad (i = 0, 1)$$

$$\frac{\Gamma, A(a)}{\Gamma, \forall x A(x)} (\forall^1) \qquad \frac{\Gamma, A(t)}{\Gamma, \exists x A(x)} (\exists^1)$$

$$a \text{ は固有変数} \qquad t \text{ は term}$$

$$\frac{\Gamma, A(U)}{\Gamma, \forall X A(X)} (\forall^2) \qquad \frac{\Gamma, A(V)}{\Gamma, \exists X A(X)} (\exists^2)$$

$$U \text{ は固有変数} \qquad V \text{ は } \Pi_0^1\text{-abstract}$$

3. 構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma}{\Gamma, A} (W) \qquad \frac{\Gamma, A, A}{\Gamma, A} (C) \qquad \frac{\Gamma, A_1, A_0, \Delta}{\Gamma, A_0, A_1, \Delta} (E)$$

4. Cut

$$\frac{\Gamma, A \quad \Delta, \neg A}{\Gamma, \Delta} (Cut)$$

**定義 1** 推論図  $I$  の上式に現れる一階または二階の自由変数は,  $I$  の下式に現れずかつ  $I$  で固有変数として使われていないとき, **redundant** であるという.

**例 2.1** 下の推論図において, 個体自由変数  $a$  は redundant である.

$$\frac{a = a}{\exists x(x = x)}$$

**定義 2**  $\pi$  を  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  を終式とする証明図とする. また,  $1 \leq k \leq n$  とする.

1.  $A$  を  $\pi$  に現れる論理式とする.  $\Gamma_k$  にその子孫をもつとき,  $A$  は **k-explicit** であるという.

2.  $I$  を  $\pi$  に現れる推論図とする.  $I$  の主論理式が  $k$ -explicit であるとき,  $I$  は  $k$ -explicit であるという.

**定義 3**  $\pi$  を  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  を終式とする証明図とし,  $I$  を  $\pi$  に現れる  $k$ -explicit な推論図とする.  $I$  の任意の副論理式  $A$  に対して,  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}, \neg A$  が証明できないとき,  $I$  は  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  に関して *irreducible* であるという.

**例 2.2**  $\pi$  を  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  を終式とする証明図とし, 下の推論図を  $\pi$  に現れる  $k$ -explicit な推論図とする. このとき, 次のようになる.

$$\frac{\Gamma, A \quad \Gamma, B}{\Gamma, A \vee B} \text{ が } \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \text{ に関して irreducible である}$$

$$\Downarrow$$

$$\not\vdash \Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}, \neg A \text{ かつ } \not\vdash \Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}, \neg B$$

### 3 定理

本節では, 定理とその証明の概略を述べる. 詳しくは, 原稿 [4] を参照されたい.

**定理 1**  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  を終式とする任意の証明図は, 次の性質を持つ証明図に変形できる.

1. 終式は  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  である.
2. *cut* を含まない.
3. *redundant* な変数を含まない.
4.  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  に関して *irreducible* な推論図しか用いられない.

この定理は  $\varepsilon_{\varepsilon_0}$  までの超限帰納法により証明できる. 以下に証明の概略を与える.

#### 証明の概略

証明は, Gentzen-Takeuti-Arai の方法で与えられる.

証明図から  $\varepsilon_{\varepsilon_0}$  までの順序数への関数  $O$  を与える. そして, 与えられた証明図  $\pi$  に対して, もし  $\pi$  が上の性質を満たさないならば,  $\pi$  を変形して  $O(\pi') < O(\pi)$  となる証明図  $\pi'$  をつくることを示す.

幾つかの場合に分けて証明するが, ここでは次の場合について考察する.

1. *irreducible* でない  $k$ -explicit な推論図がある場合.

例えば, 証明図  $\pi$  が以下の形である場合を考える.

$$\frac{\frac{\vdots \pi_0}{\Delta, A_0} \quad \frac{\vdots \pi_1}{\Delta, A_1}}{\Delta, A_0 \wedge A_1} I$$

$$\vdots$$

$$\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$$

このとき,  $\pi$  を次の  $\pi'$  に変形する.

$$\frac{\frac{\frac{\vdots \pi_2}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}, \neg A_0} \quad \frac{\vdots \pi_0}{\Delta, A_0}}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}, \Delta} I' \quad \frac{\vdots}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}, \Delta, A_0 \wedge A_1}}{\frac{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n}}$$

$\pi_2$  に現れる explicit な推論図は, 全て  $i$ -explicit ( $i < k$ ) なので,  $\pi'$  は  $\pi$  より “簡単な” 証明図となる. よって,  $O(\pi') < O(\pi)$  を得る.

2. 全ての boundary inference が implicit である場合.

例えば, 証明図  $\pi$  が以下の形である場合を考える.

$$\frac{\frac{Ut, \neg Ut}{\vdots \pi_0(U)} \quad \frac{\Lambda, A(U)}{\Lambda, \forall X A(X)} I_0 \quad \frac{\frac{\vdots \pi_1}{\Pi, \neg A(V)}}{\Pi, \exists X \neg A(X)} I_1}{\frac{\Delta_0, \forall X A(X) \quad \Delta_1, \exists X \neg A(X)}{\Delta_0, \Delta_1} I} I$$

$$\vdots$$

$$\frac{\Delta}{\vdots} I_3$$

$$\vdots$$

$$\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$$

このとき,  $\pi$  を次の  $\pi'$  に変形する.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
V(t), \neg V(t) \\
\vdots \\
\pi_0^*(V) \\
\Lambda, A(V) \\
\hline
A(V), \Lambda, \forall X A(X) \\
\vdots \\
A(V), \Delta_0, \forall X A(X) \quad \Delta_1, \exists X \neg A(X) \\
\hline
A(V), \Delta_0, \Delta_1 \\
\vdots \\
\frac{A(V), \Delta}{\Delta, A(V)} I_3^l
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\vdots \pi_1 \\
\Pi, \neg A(V) \\
\hline
\neg A(V), \Pi, \exists X \neg A(X) \\
\vdots \\
\Delta_0, \forall X A(X) \quad \neg A(V), \Delta_1, \exists X \neg A(X) \\
\hline
\Delta_0, \neg A(V), \Delta_1 \\
\hline
\neg A(V), \Delta_0, \Delta_1 \\
\vdots \\
\frac{\neg A(V), \Delta}{\Delta, \neg A(V)} I_3^r
\end{array} \\
\hline
\Delta \\
\vdots \\
\Gamma_1, \dots, \Gamma_n
\end{array}
\end{array}$$

この証明図  $\pi'$  の左上の証明図  $\pi_0^*(V)$  は,  $\pi$  の左上の証明図  $\pi_0(U)$  に  $V$  を代入し, 更にそれにより始式  $Ut, \neg Ut$  が  $V(t), \neg V(t)$  と変形されるところに  $V(t), \neg V(t)$  を終式とする標準的な証明図を補ったものである.

このとき, Gentzen の証明と同様に  $O(\pi') < O(\pi)$  となる.

ただし, ここでは証明図  $\pi_0(U)$  に  $V$  を代入して  $\pi_0^*(V)$  をつくっているため, cut formula は一見大きくなる. しかし, 代入される  $V$  が一階であることに注意すると, このことは回避できる.

また,  $\pi$  における始式  $Ut, \neg Ut$  が, 代入されて  $V(t), \neg V(t)$  と変形されるところに  $V(t), \neg V(t)$  を終式とする標準的な証明図を補っているため, 新しい論理記号に関する推論図が増える. しかし, これも次のことに注目すると回避できる. 始式  $Ut, \neg Ut$  における  $U$  は,  $\pi$  において eigenvariable として使われている. 一方,  $V(t), \neg V(t)$  を終式とする標準的な証明図に現れる始式における自由述語変数記号は eigenvariable として使われていないので, この置き換えにより簡単な証明図となる.

## 4 定理の応用

本節では, 前節で与えた定理の応用について述べる.

まず,  $\mathcal{A}$  で等号公理と数学的帰納法を除く算術公理の conjunction を示すことにする.  $\mathcal{A}$  は  $\Pi_1^0$ -論理式であることに注意する.

次に, 論理式  $F(a)$  に対して, 論理式  $Ind(F, a)$  を下のように定義する.

$$Ind(F, a) := F(0) \wedge \forall x(F(x) \rightarrow F(x')) \rightarrow F(a)$$

このとき, 次の補題が成立する.

**補題 1** 任意の closed term  $t$  に対して, 次が成り立つ.

1.  $\Pi_0^1\text{-LK} \vdash \mathcal{A} \rightarrow \forall X Ind(X, t)$
2.  $\Pi_0^1\text{-LK} \vdash \mathcal{A} \rightarrow Ind(F, t)$

更に, 二階算術の部分体系  $ACA_0$  と  $ACA$  は以下のように定義できる.

1.  $ACA_0 := \Pi_0^1\text{-LK} + \mathcal{A} + \forall x \forall X Ind(X, x)$
2.  $ACA := \Pi_0^1\text{-LK} + \mathcal{A} + \{\forall \bar{y} \forall x Ind(F, x) | F(a, \bar{b}) \text{ は論理式} \}$

**系 1**  $ACA_0$  は  $\omega$ -consistent である.

**証明.**  $ACA_0$  は  $\omega$ -consistent ではないと仮定する. すると,

1.  $ACA_0 \vdash \exists x \neg F(x)$
2. 任意の closed term  $t$  に対して,  $ACA_0 \vdash F(t)$

となる sentence  $\exists x \neg F(x)$  が存在する.

したがって, 式:

$$\neg \mathcal{A}, \neg \forall x \forall X Ind(X, x), \exists x \neg F(x)$$

を終式とする  $\Pi_0^1\text{-LK}$  の証明図  $\pi$  が存在する.

$\Gamma_1 := \neg \mathcal{A}$ ,  $\Gamma_2 := \neg \forall x \forall X Ind(X, x)$ ,  $\Gamma_3 := \exists x \neg F(x)$  とおく.

このとき,  $\pi$  に定理を適用して, 定理の条件を満たす証明図  $\pi'$  を得る.

$\pi'$  には,  $\Gamma_2$  または  $\Gamma_3$  の先祖を主論理式とする推論図が必ず存在する. それらの中で最も下にある推論図を  $I$  とすると,  $I$  は

$$\frac{\Lambda_1, \neg F(t_1)}{\Lambda_1, \exists x \neg F(x)}$$

または

$$\frac{\Lambda_2, \neg \forall X Ind(X, t_2)}{\Lambda_2, \neg \forall x \forall X Ind(X, x)}$$

という形である. ここで,  $\Lambda_1$  と  $\Lambda_2$  は  $\neg\forall x\forall X Ind(X, x)$  または  $\exists x\neg F(x)$ , あるいは  $\neg A$  の部分論理式からなる式である.

式  $\neg A, \neg\forall x\forall X Ind(X, x), \exists x\neg F(x)$  は自由変数を含まず,  $\pi'$  は redundant な変数を持たないので,  $t_1$  および  $t_2$  も自由変数を含まない.

仮定から,  $ACA_0 \vdash F(t)$  すなわち,  $\Pi_0^1\text{-LK} \vdash \Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow F(t_1)$  であるから, 上の場合はない. また, 補題 1 から,  $\Pi_0^1\text{-LK} \vdash \Gamma_1 \rightarrow \forall X Ind(X, t_2)$  であるから下の場合もない.

したがって, 仮定のような sentence  $\exists x\neg F(x)$  は存在しない. よって,  $ACA_0$  は  $\omega$ -consistent である.  $\dashv$

系 2  $ACA$  は無矛盾である.

証明.  $ACA_0$  が  $\omega$ -consistent であることから,  $ACA$  が無矛盾であることは簡単に導ける.  $\dashv$

$ACA$  が無矛盾であることを示すには,  $\varepsilon_{\varepsilon_0}$  までの超限帰納法が必要であることは良く知られている (cf. [1, 2]). したがって, 本稿で与えた定理を証明するには  $\varepsilon_{\varepsilon_0}$  までの超限帰納法が必要であることがわかる.

## 参考文献

- [1] J. Avigad and R. Sommer, A model-theoretic approach to ordinal analysis, Bull. Symb. Log. 3 (1997), no. 1, 17–52.
- [2] J. Avigad and R. Sommer, The model-theoretic ordinal analysis of theories of predicative strength, J. Symb. Log. 64 (1999), no. 1, 327–349.
- [3] K. Ikeda, LK の証明図に関する標準型定理, 京都大学数理解析研究所講究録 1096 「2 階算術の諸体系の研究」 (1999), 1–14.
- [4] K. Ikeda, Normal form for derivations in second order predicate calculus with  $\Pi_0^1$ -comprehension schema, submitted.
- [5] G. Mints, A normal form for logical derivations implying one for arithmetic derivations, Ann. Pure Appl. Logic 62 (1993), 65–79.
- [6] T. Suzuki, Normalization of Elementary Analysis, manuscript.