

可約指数について — 鈴木氏の話への introduction

愛媛大 理 青山陽一

このノートでは、可約指数に関し筆者が興味を感じたことについて記し、鈴木氏の話への introduction としたい。時代順に論文をピックアップして書いていくが、関係のある論文をすべてリストアップしたものではない。以下、 A は極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ d 次元のネーター局所環であるとする。 $\mathfrak{q}$ も $\mathfrak{m}$ -準素イデアル、 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t$ を既約イデアルによる無駄のない分解とするとき、 t は分解の仕方によらないこと、及び $e = \ell(\mathfrak{q} : \mathfrak{m}/\mathfrak{q}) = \dim_{A/\mathfrak{m}} \operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, A/\mathfrak{q})$ であることが知られている。（[1, Satz IV] なお [3] も参照）

[1] E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Ann. 83

(1921) 24 - 66.

この不変量 e を $\mathfrak{q}$ の可約指数と呼び、 $ir(\mathfrak{q})$ 或いは $N(\mathfrak{q})$ で示す。（[3, Definition 2]） Gröbner は “ A が regular のとき、任意の parameter ideal (= s.o.p. で生成された ideal) は既約である” を示

した。(彼の定理の元の形を現在の用語で書くと, “ R を Cohen-Macaulay 整域, α を principal ideal class (i.e. $\text{ht } \alpha = \nu(\alpha)$ = 極小生成系の個数), α を α の素因子で $R_{\mathfrak{p}}$ が regular なるものとする, α の $\mathfrak{p}$ -準素成分は既約”) ([2, Satz])

[2] W. Gröbner, Ein Irreduzibilitätskriterium für Primär Ideale in kommutativen Ringen, Monatsh. Math. 55(1951) 138 - 145.

Northcott は上の結果を次の様に拡張した。“ A が Cohen-Macaulay のとき, parameter ideal の可約指数は a.o.p. のとり方に依らない A の不変量である。” ([3, Theorem 3])

[3] D. G. Northcott, On irreducible ideals in local rings, J. London Math. Soc. 32(1957) 82 - 88.

ここで鈴木敏氏(京大教養)より教えてもらった(1975夏)証明法を書いておこう。まず2つ補題を用意する。(証明は略す)

Lemma 1 (S. Suzuki). R を環, M を R -加群 ($\neq 0$), $M \supset (0) = N_1 \cap \dots \cap N_t$ を既約部分加群 ($\neq M$) による分解とするとき, 次は同値:

- (a) $M \xrightarrow{\text{nat}} M/N_1 \oplus \dots \oplus M/N_t$ が essential monomorphism である。
- (b) 分解に無駄がない。

Lemma 2 (?). R を環, M を R -加群 ($\neq 0$), N を M の essential 部分加群, $M \supset (0) = Q_1 \cap \dots \cap Q_t$ を無駄のない既約分解とすると, $Q_i' = Q_i \cap N$ は N の既約部分加群で, $N \supset (0) = Q_1' \cap \dots \cap Q_t'$ は無駄のない既約分解である。

(Proof of [3, Theorem 3]) d に関する帰納法。 $d=0$ のとき, $0:\mathfrak{m} \subset A$ は essential だから Lemma 2 よりベクトル空間の話になる。

$d=1$ のとき。 x, y を非零因子とする。 $A/(y) \xrightarrow{\sim} (x)/(xy) \hookrightarrow A/(xy)$ が essential であることを示し, Lemma 2 を使い $ir(y) = ir(xy) = ir(x)$ を得る。

$d>1$, $d-1$ まで正しいとする。 $x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d$ を各々 *s.o.p.* とする。 $\exists z$ s.t. $x_1, \dots, x_{d-1}, z, y_1, \dots, y_{d-1}, z$ が各々 *s.o.p.* だから帰納法により主張を得る。(by S. Suzuki) (g.e.d.)

更に Northcott-Rees は次の興味ある定理を証明した。“任意の *parameters ideal* が既約ならば, *Cohen-Macaulay* である。” ([4, Theorem 1])

[4] D. G. Northcott & D. Rees, Principal systems, Quart. J. Math.

Oxford (2) 8(1957) 119 - 127.

ここで, 下田の補題を使う山岸氏の証明を紹介しよう。

Lemma (Shimoda). $a (\neq 0) \in \mathfrak{m}$ で, $0:a = 0:a^2$ とする。 (a^2) が既約ならば, a は非零因子である。

(Proof of [4, Theorem 1]) $a_1, \dots, a_t$ を *sub s.o.p.* とする。任意の $e_1, \dots, e_t$ に対し $(a_1^{e_1}, \dots, a_t^{e_t})$ が既約ならば $a_1, \dots, a_t$ は *regular sequence* を示せばよい。 t に関する帰納法。 $t=1$ のときは上の Lemma による。 $t>1$, $t-1$ まで正しいとする。 $B = A/(a_2^{e_2}, \dots, a_t^{e_t})$ とおく。 $a_1^f B$ は既約 for $\forall f>0$ だから a_1 は B -regular。 $0:a_1 = \bigcap_{e>0} (a_2^e, \dots, a_t^{e_t})$ より a_1 は A -regular。 $A/(a_1)$ で考えて帰納法により主張を得る。(by Yamagishi) (g.e.d.)

Berger は 1 次元 Gorenstein 局所環 (彼の用語では *unvergabelt*) の研究を行ない, その中で “1 次元 Cohen-Macaulay 局所環で極大イデアルが 2 個の元で生成されるものは Gorenstein である” を示し, その様な局所環を分類した. ([5, Satz 2 & Satz 4])

[5] R. Berger, Über eine Klasse unvergabelter lokaler Ringe, Math. Ann. 146(1962) 98 - 102.

Endo-Narita は Berger の結果を次の様に拡張した. “ A の *parameter ideal* の可約指数が *s.o.p.* のとり方によらない A の不変量で, μ が $d+1$ 個の元で生成されるならば, A は Gorenstein である” 更に, “Cohen-Macaulay でなくて, *parameter ideal* の可約指数が *s.o.p.* のとり方に依らない局所環が存在する” ことを示した. ([6, Theorem 1 & Theorem 2])

[6] S. Endo & M. Narita, The number of irreducible components of an ideal and the semi-regularity of a local ring, Proc. Japan Acad. 40(1964) 627 - 630.

今まで述べてきたようなところから, 可約指数の概念は重要なものであると思われるし, (事実, Cohen-Macaulay 環の場合には重要な役割を持ち, その理論が作られている) その役割はどのようなであろうかという思いがする. Cohen-Macaulay でなくて *parameter ideal* の可約指数が *s.o.p.* のとり方に依らない局所環は存在するし, また *parameter ideal* の可約指数が *s.o.p.* を

動かしたときに有界でないような局所環も存在する。そこで
 まず、可約指数一定の局所環、或いは可約指数有界の局所環
 は、どのようなものであろうかと云う疑問が湧く。そして、そ
 の様な場合に他の不変量との関係はどうかとか。そして更に
 は.....

何かしら訳の判らない、まとまりのないものを書いてきてし
 まったが、最後に文献を補足して、このノートを終ることに
 したい。

- [7] H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z. 82
 (1963) 8 - 28.
- [8] G. Eisenreich, Zur Syzygientheorie und Theorie des inversen
 Systems perfekter Ideale und Vektormoduln in Polynomringen
 und Stellenringen, S.-B. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-
 Nat. Kl. Band 109 Heft 3, Akademie Verlag, 1970.
- [9] W. Gröbner, Über irreducible Ideale in kommutativen Ringen,
 Math. Ann. 110(1934) 197 - 222.
- [10] W. Gröbner, Moderne algebraische Geometrie, Wien-Innsbruck
 1949.
- [11] W. Krull, Idealtheorie (zweite, ergänzte Auflage), Ergeb.
 Math. Grenz. 46, Springer Verlag, 1968.
- [12] F. S. Macaulay, The algebraic theory of modular systems,

Camb. Univ. Press, 1916.

- [13] H. Seydi, Une remarque sur les anneaux de Cohen-Macaulay,
Bull. Sc. Math. (2) 96(1972) 155 - 160.