

2 重非心 F 分布のパーセント点の近似について

鳥越 規央 (東海大・理)

1. はじめに

本論において 2 重非心 F 分布のパーセント点の近似式を, 最近, 提案された非心 t 分布等のパーセント点の近似式の考え方 ([A95], [AST95], [To96]) を基に, カイ統計量の線形結合による統計量の分布の Cornish-Fisher 展開によって導出し, 従来の近似式との比較検討を行う.

まず, 独立な 2 つの確率変数 X_1, X_2 の分布をそれぞれ自由度 ν_1 , 非心度 λ_1 の非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu_1, \lambda_1)$, 自由度 ν_2 , 非心度 λ_2 の非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu_2, \lambda_2)$ とすると

$$F_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2} := \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}$$

の分布は自由度 (ν_1, ν_2) , 非心度 (λ_1, λ_2) の 2 重非心 F 分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ となる. この分布は分散分析の交互作用や誤差因子における F 検定の検出力を求めるときや ([Ma48], [S59]), S/N 比を検定する問題を考察するときなどに現れる ([Mi79], [Ts82]). それから情報理論に基づく工学的な問題に際しても現れる ([P62a], [P62b], [P62c]). 例えば受信機が通信路を混乱させる多並列雑音 (multiple parallel-link noise) の状態を知るための特定の 2 元信号方式 (binary signalling system) のエラーの確率を求めるときにこの 2 重非心 F 分布は現れる ([P64]).

実際, 2 重非心 F 分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の密度関数は

$$p_F(x; \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) := \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{r+t} \frac{(\lambda_1/2)^r}{r!} \frac{(\lambda_2/2)^t}{t!} \cdot \left[\sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^t (-1)^{i+j} \binom{r}{i} \binom{t}{j} p_F\left(x; \frac{\nu_1}{2} + i, \frac{\nu_2}{2} + j\right) \right] \\ (0 < x < \infty; \nu_1, \nu_2 = 1, 2, \dots; \lambda_1, \lambda_2 > 0)$$

になる. ここで, $p_F(x; \nu_1/2 + i, \nu_2/2 + j)$ は自由度 $(\nu_1 + 2i, \nu_2 + 2j)$ の中心 F 分布の密度関数, すなわち

$$p_F\left(x; \frac{\nu_1}{2} + i, \frac{\nu_2}{2} + j\right) = \frac{(\nu_1/\nu_2)^{\nu_1/2+i}}{B(\nu_1/2 + i, \nu_2/2 + j)} \frac{x^{\nu_1/2+i-1}}{(1 + (\nu_1/\nu_2)x)^{(\nu_1+\nu_2)/2+i+j}}$$

とする. 上記から分かるように, 2重非心 F 分布の密度関数は複雑でパーセント点等を具体的に求めるためには, 大規模な数値計算を必要とする.

以下の節では最近提案された非心分布等のパーセント点の近似式の考え方 ([A95]) を踏まえて, カイ統計量の線形結合などの分布の Cornish-Fisher 展開から新しい近似式を求め, 従来の近似式と比較検討する.

2. 2重非心 F 分布のパーセント点の近似式

まず従来の近似式を紹介する. $(F_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2} + \zeta)/\tau$ の分布を 3 次以下のモーメントを等置することによって自由度 (ν', ν_2) の中心 F 分布 $F(\nu', \nu_2)$ で近似する. そこで, $F = F_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2}$, $\mu'_r = E(F^r)$, $\mu_r = E[(F - \mu'_1)^r]$ ($r = 1, 2, \dots$), $\beta_1 = \mu_3^2/\mu_2^3$ とすると 3 次までのモーメントを等置した結果, ν', ζ, τ は

$$\nu' = \frac{1}{2}(\nu_2 - 1) \left[-1 + \sqrt{\frac{(\nu_2 - 6)^2 \beta_1}{(\nu_2 - 6)^2 \beta_1 - 32(\nu_2 - 4)}} \right],$$

$$\tau = \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_3}{\mu_2} \right) \frac{\nu'(\nu_2 - 2)(\nu_2 - 6)}{\nu_2(2\nu' + \nu_2 - 2)}, \quad \zeta = \left(\frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \right) \tau - \mu'_1$$

になる. 実際に F の 1 次から 3 次までのモーメントは次のようになる ([Ti65], [Ti72]).

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\nu_1} \right) \left\{ 1 - \frac{\lambda_2}{\nu_2} + \frac{\lambda_2^2}{\nu_2(\nu_2 + 2)} - \frac{\lambda_2^3}{\nu_2(\nu_2 + 2)(\nu_2 + 4)} \right. \\ &\quad + \frac{\lambda_2^4}{\nu_2(\nu_2 + 2)(\nu_2 + 4)(\nu_2 + 6)} - \frac{\lambda_2^5}{\nu_2(\nu_2 + 2)(\nu_2 + 4)(\nu_2 + 6)(\nu_2 + 8)} \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_2^6}{\nu_2(\nu_2 + 2)(\nu_2 + 4)(\nu_2 + 6)(\nu_2 + 8)(\nu_2 + 10)} \right\}, \\ \mu'_2 &= \frac{\nu_2^2(\nu_1 + 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)(\nu_2 - 4)} \left(1 + \frac{2\lambda_1}{\nu_1} + \frac{\lambda_1^2}{\nu_1(\nu_1 + 2)} \right) \left\{ 1 - \frac{2\lambda_2}{\nu_2} + \frac{3\lambda_2^2}{\nu_2(\nu_2 + 2)} \right. \\ &\quad - \frac{4\lambda_2^3}{\nu_2(\nu_2 + 2)(\nu_2 + 4)} + \frac{5\lambda_2^4}{\nu_2(\nu_2 + 2)(\nu_2 + 4)(\nu_2 + 6)} \\ &\quad - \frac{6\lambda_2^5}{\nu_2(\nu_2 + 2)(\nu_2 + 4)(\nu_2 + 6)(\nu_2 + 8)} \\ &\quad \left. + \frac{7\lambda_2^6}{\nu_2(\nu_2 + 2)(\nu_2 + 4)(\nu_2 + 6)(\nu_2 + 8)(\nu_2 + 10)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu'_3 = & \frac{\nu_2^3(\nu_1+2)(\nu_1+4)}{\nu_1^2(\nu_2-2)(\nu_2-4)(\nu_2-6)} \left(1 + \frac{3\lambda_1}{\nu_1} + \frac{3\lambda_1^2}{\nu_1(\nu_1+2)} + \frac{\lambda_1^3}{\nu_1(\nu_1+2)(\nu_1+4)} \right) \\ & \left\{ 1 - \frac{3\lambda_2}{\nu_2} + \frac{6\lambda_2^2}{\nu_2(\nu_2+2)} - \frac{10\lambda_2^3}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)} \right. \\ & + \frac{15\lambda_2^4}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)(\nu_2+6)} - \frac{21\lambda_2^5}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)(\nu_2+6)(\nu_2+8)} \\ & \left. + \frac{28\lambda_2^6}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)(\nu_2+6)(\nu_2+8)(\nu_2+10)} \right\}. \end{aligned}$$

これより次の 2 重非心 F 分布の分布関数の近似式を得る.

$$\begin{aligned} (2.1) \quad P\{F_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2} < f\} &\approx I_{\nu'_0}\left(\frac{1}{2}\nu_2, \frac{1}{2}\nu'\right) \\ &= \frac{1}{B(\frac{1}{2}\nu_2, \frac{1}{2}\nu')} \int_0^{\nu'_0} t^{\frac{1}{2}\nu_2-1} (1-t)^{\frac{1}{2}\nu'-1} dt. \end{aligned}$$

但し

$$\nu'_0 = 1 / \left(1 + \frac{\nu'}{\nu_2} \frac{f + \zeta}{\tau} \right)$$

とする (Tiku [Ti65]).

次に (2.1) より 2 つのカイ統計量の線形結合による統計量の分布を Cornish-Fisher 展開して, $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の上側 100α パーセント点 f_α の新しい近似式を求めてみる.

F_{ν', ν_2} を自由度 (ν', ν_2) の中心 F 分布 $F(\nu', \nu_2)$ に従う確率変数, S を自由度 ν' の中心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu')$ に従う確率変数とし, $f'_\alpha = (f_\alpha + \zeta)/\tau$ とすると, 近似式 (2.1) より

$$\begin{aligned} (2.2) \quad 1 - \alpha &= P\{F_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2} < f\} = P\left\{ \frac{F_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2} + \zeta}{\tau} < \frac{f + \zeta}{\tau} \right\} \\ &\equiv P\{F_{\nu_1, \nu_2} < f'_\alpha\} = P\left\{ \frac{S/\nu'}{X_2/\nu_2} < f'_\alpha \right\} \\ &= P\left\{ \sqrt{\frac{S}{\nu'}} - \sqrt{f'_\alpha} \sqrt{\frac{X_2}{\nu_2}} < 0 \right\} \end{aligned}$$

になる. ここで $S_{\nu'} = \sqrt{S/\nu'}$, $S_{\nu_2} = \sqrt{X_2/\nu_2}$ とおくと

$$b_{\nu'} := E(S_{\nu'}) = \sqrt{\frac{2}{\nu}} \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma(\nu/2)}, \quad b_{\nu_2} := E(S_{\nu_2}) = \sqrt{\frac{2}{\nu_2}} \frac{\Gamma[(\nu_2+1)/2]}{\Gamma(\nu_2/2)}$$

$$V(S_{\nu'}) = 1 - b_{\nu'}, \quad V(S_{\nu_2}) = 1 - b_{\nu_2}$$

となるので, (2.2) は

$$1 - \alpha \equiv P \left\{ \frac{S_{\nu'} - b_{\nu'} - \sqrt{f'_\alpha}(S_{\nu_2} - b_{\nu_2})}{\sqrt{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)}} < \frac{-b_{\nu'} + \sqrt{f'_\alpha}b_{\nu_2}}{\sqrt{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)}} \right\}$$

になる. 従って W を

$$(2.3) \quad W = \frac{S_{\nu'} - b_{\nu'} - \sqrt{f'_\alpha}(S_{\nu_2} - b_{\nu_2})}{\sqrt{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)}}$$

によって定義された統計量とすれば $E(W) = 0, V(W) = 1$ となる. そこで W のキユムラントを求め W の分布の Cornish-Fisher 展開から新しいを導出する.

補題 2.1 ([A95]). $S_{\nu'} - b_{\nu'}$ の 3 次, 4 次キユムラントは

$$\kappa_3(S_{\nu'} - b_{\nu'}) = -b_{\nu'} \left\{ 2(1 - b_{\nu'}^2) - \frac{1}{\nu'} \right\},$$

$$\kappa_4(S_{\nu'} - b_{\nu'}) = (1 - b_{\nu'}^2) \{ 4 - 6(1 - b_{\nu'}^2) \} + \frac{4}{\nu'}(1 - b_{\nu'}^2) - \frac{2}{\nu'}$$

である.

証明の概略 $E(S_{\nu'}) = b_{\nu'}, E(S_{\nu'}^2) = 1, E(S_{\nu'}^3) = (1 + 1/\nu')b_{\nu'}$ であるから

$$\begin{aligned} \kappa_3(S_{\nu'} - b_{\nu'}) &= E[(S_{\nu'} - b_{\nu'})^3] \\ &= E(S_{\nu'}^3) - 3b_{\nu'}E(S_{\nu'}^2) + 3b_{\nu'}^2E(S_{\nu'}) - b_{\nu'}^3 \\ &= -b_{\nu'} \left\{ 2(1 - b_{\nu'}^2) - \frac{1}{\nu'} \right\} \end{aligned}$$

を得る. また $E(S_{\nu'}^4) = 1 + (2/\nu')$ となるから, 上記と同様にして

$$\begin{aligned} \kappa_4(S_{\nu'} - b_{\nu'}) &= E[(S_{\nu'} - b_{\nu'})^4] - 3(E[(S_{\nu'} - b_{\nu'})^2])^2 \\ &= \frac{2}{\nu'}(1 - 2b_{\nu'}^2) + (1 - b_{\nu'}^2)(1 + 3b_{\nu'}^2) - 3(1 - b_{\nu'}^2)^2 \\ &= (1 - b_{\nu'}^2) \{ 4 - 6(1 - b_{\nu'}^2) \} + \frac{4}{\nu'}(1 - b_{\nu'}^2) - \frac{2}{\nu'} \end{aligned}$$

を得る. □

補題2.2 ([To96]). W の 3 次, 4 次キュムラントは

$$\kappa_3(W) = \frac{1}{4\{(1 - b_{\nu'}^2) + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}^{3/2}} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{\nu'^2} + \frac{1}{4\nu'^3} \right) - f_\alpha^{\frac{13}{2}} \left(\frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{4\nu_2^3} \right) \right\} + O\left(\frac{1}{\nu_2^{5/2}}\right)$$

$$\kappa_4(W) = O\left(\frac{1}{\nu_2^2}\right)$$

証明の概略. Stirlingの公式より,

$$\Gamma(n) = \sqrt{2\pi} n^{n-1/2} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)$$

であるから

$$(2.4) \quad \begin{aligned} b_{\nu'} &= \sqrt{\frac{2}{\nu'}} \Gamma\left(\frac{\nu'+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{4\nu'} + \frac{1}{32\nu'^2} + \frac{5}{128\nu'^3} + O\left(\frac{1}{\nu'^4}\right) \end{aligned}$$

となる. またこれより

$$(2.5) \quad 1 - b_{\nu'}^2 = \frac{1}{2\nu'} - \frac{1}{8\nu'^2} - \frac{1}{16\nu'^3} + O\left(\frac{1}{\nu'^4}\right)$$

になる. 従って仮定より, $S_{\nu'} - b_{\nu'}$ と $S_{\nu_2} - b_{\nu_2}$ は独立であるので, 補題 2.1, (2.4), (2.5) より W の 3 次キュムラントは

$$\begin{aligned} \kappa_3(W) &= \frac{1}{\{(1 - b_{\nu'}^2) + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}^{\frac{3}{2}}} \kappa_3[(S_{\nu'} - b_{\nu'}) - \sqrt{f'_\alpha}(S_{\nu_2} - b_{\nu_2})] \\ &= \frac{1}{\{(1 - b_{\nu'}^2) + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}^{\frac{3}{2}}} \left(\kappa_3(S_{\nu'} - b_{\nu'}) - f_\alpha^{\frac{13}{2}} \kappa_3(S_{\nu_2} - b_{\nu_2}) \right) \\ &= \frac{1}{\{(1 - b_{\nu'}^2) + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}^{\frac{3}{2}}} \left\{ \left(\frac{1}{\nu'^2} + \frac{1}{4\nu'^3} \right) - f_\alpha^{\frac{13}{2}} \left(\frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{4\nu_2^3} \right) \right\} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\nu_2^{5/2}}\right) \end{aligned}$$

となる. 同様にして W の 4 次キュムラントは

$$\kappa_4(W) = O\left(\frac{1}{\nu_2^2}\right)$$

となる. $\square$

定理 2.1. 2 重非心 F 分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の上側 100α パーセント点を f_α とするとき, 次の近似式が成り立つ.

$$\begin{aligned} (2.6) \quad & \frac{b_{\nu'} - \sqrt{f'_\alpha} b_{\nu_2}}{\sqrt{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)}} \\ &= u_\alpha + \frac{u_\alpha^2 - 1}{24\{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}^{3/2}} \cdot \left\{ \frac{1}{\nu'^2} + \frac{1}{4\nu'^3} - f_\alpha'^{3/2} \left(\frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{4\nu_2^3} \right) \right\} \\ & \quad - \frac{2u_\alpha^3 - 5u_\alpha}{576\{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}^3} \left(\frac{1}{\nu'^2} - \frac{f_\alpha'^{3/2}}{\nu_2^2} \right)^2 + O\left(\frac{1}{\nu_2^2}\right). \end{aligned}$$

但し u_α は $N(0, 1)$ の上側 100α パーセント点, $f'_\alpha = (f_\alpha + \zeta)/\tau$ とする.

証明の概略. (2.3) と補題 2.2 より, W の分布に関する Cornish-Fisher 展開を用いて,

$$\begin{aligned} & \frac{b_{\nu'} - \sqrt{f'_\alpha} b_{\nu_2}}{\sqrt{(1 - b_{\nu'}^2) + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)}} \\ &= u_\alpha + \frac{1}{6} \kappa_3(W)(u_\alpha^2 - 1) + \frac{1}{24} \kappa_4(W)(u_\alpha^3 - 3u_\alpha) \\ & \quad - \frac{1}{36} \kappa_3(W)^2(2u_\alpha^3 - 5u_\alpha) + O\left(\frac{1}{\nu_2^2}\right) \\ &= u_\alpha + \frac{u_\alpha^2 - 1}{24\{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}^{3/2}} \cdot \left\{ \frac{1}{\nu'^2} + \frac{1}{4\nu'^3} - f_\alpha'^{3/2} \left(\frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{4\nu_2^3} \right) \right\} \\ & \quad - \frac{2u_\alpha^3 - 5u_\alpha}{576\{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}^3} \left(\frac{1}{\nu'^2} - \frac{f_\alpha'^{3/2}}{\nu_2^2} \right)^2 + O\left(\frac{1}{\nu_2^2}\right) \end{aligned}$$

を得る. $\square$

3. 数値計算による比較検討

数値計算の結果については表1～表4に示した。近似式が方程式の形で表わされているため、数式処理ソフトウェア *Mathematica* を用いて初期値を3としてニュートン法によって算出した。また表の真値は *Mathematica* で9999回のシミュレーションを行い、その10回の平均をとったものとした。 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の上側 100α パーセント点の近似式(2.1)と(2.6)を α が 0.05, 0.10, 0.90, 0.95, ν_1 が 5, 10, 20, ν_2 が 10, 20, 30, (λ_1, λ_2) が (5, 5), (5, 10), (10, 10) の時で比較した結果、新しい近似式はTikuの近似式とほぼ同等の値を得ることが分かった。但し、表中で横線が引かれているのは誤差の絶対値が1以上であることを示す。

参考文献

- [A95] Akahira, M.(1995). A higher order approximation to a percentage point of the non-central t-distribution. *Commun. Statist.-Simula.*, **24**(3), 595–605.
- [AST95] Akahira, M., Sato, M. and Torigoe, N.(1995). On the new approximation to the non-central t-distributions. *J. Japan Statist. Soc.*, **25**, 1–18.
- [Ma48] Madow, W. G. (1948). On a source of downward bias in the analysis of variance and covariance. *Ann. Math. Statist*, **19**, 351–359.
- [Mi79] 三輪哲久. (1979). SN比に関する推測について. 日本品質管理学会第9回年次大会研究発表要旨集, 37–40.
- [P62a] Price, R. (1962). Error probabilities for adaptive multichannel reception of binary signals. *IRE Transactions on Information Theory*, **It-8**, 305–316.
- [P62b] Price, R. (1962). *Error probabilities for adaptive multichannel reception of binary signals*. Lincoln Laboratory Technical Report, **258**, Massachusetts Institute of Technology.
- [P62c] Price, R. (1962). Error probabilities for adaptive multichannel reception of binary signals. Addendum, *IRE Transactions on Information Theory*, **It-8**, 287–289.
- [P64] Price, R. (1964). Some non-central F-distributions expressed in closed form. *Biometrika*, **51**, 107–122.

- [S59] Scheffé, H. (1959). *The Analysis of Variance*. Wiley, New York.
- [Ti65] Tiku, M. L. (1965). Series expansions for the doubly non-central F -distribution. *Austral. J. Statist.*, **7**, 78–89.
- [Ti72] Tiku, M. L. (1972). A note on the distribution of the doubly non-central F -distribution. *Austral. J. Statist.*, **14**, 37–40.
- [To96] Torigoe, N. (1996). Approximations to non-central χ^2 and F distributions. *J. Japan Statist. Soc.*, **26**, 161–175.
- [Ts82] 椿広計. (1982). 非心度・SN比・対数SN比の点推定について. 21th J S Q C研究発表会, 56–59.

表1. 2重非心 F 分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の上側 5% 点の誤差

ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	真 値	(2.6)	Tiku (2.1)
5	10	5	5	4.0511	0.009	0.007
	20			3.9954	0.029	0.029
	30			4.0245	-0.001	0.000
5	10	5	10	2.8544	——	0.149
	20			3.2912	0.101	0.097
	30			3.4832	0.026	0.026
5	10	10	10	4.0852	——	0.454
	20			4.6806	0.123	0.117
	30			4.9014	0.025	0.026
10	10	5	5	2.8461	-0.023	-0.025
	20			2.7404	-0.004	-0.004
	30			2.6892	0.021	0.021
10	10	5	10	1.9706	——	0.294
	20			2.2306	0.085	0.080
	30			2.3576	0.006	0.007
10	10	10	10	2.5784	——	0.451
	20			2.9042	0.105	0.098
	30			3.0286	0.029	0.029
20	10	5	5	2.2170	-0.005	-0.006
	20			2.0882	0.006	0.006
	30			2.0469	0.004	0.004
20	10	5	10	1.5430	——	0.353
	20			1.7086	0.072	0.065
	30			1.7762	0.013	0.014
20	10	10	10	1.8401	——	0.437
	20			2.0327	0.087	0.077
	30			2.1122	0.014	0.014

表2. 2重非心 F 分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の上側 10% 点の誤差

ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	真 値	(2.6)	Tiku (2.1)
5	10	5	5	3.1446	-0.012	-0.014
	20			3.2644	0.008	0.008
	30			3.3395	-0.012	-0.012
5	10	5	10	2.2548	——	-0.639
	20			2.6886	0.000	-0.006
	30			2.9020	-0.003	-0.003
5	10	10	10	3.2510	——	-0.748
	20			3.8721	-0.020	-0.027
	30			4.1288	0.006	0.006
10	10	5	5	2.2382	-0.024	-0.026
	20			2.2820	-0.008	-0.008
	30			2.2912	0.003	0.003
10	10	5	10	1.5863	——	-0.321
	20			1.8623	0.004	-0.002
	30			2.0027	-0.005	-0.004
10	10	10	10	2.0796	——	-0.370
	20			2.4390	-0.002	-0.009
	30			2.5962	0.007	0.007
20	10	5	5	1.7679	-0.010	-0.010
	20			1.7719	0.002	0.002
	30			1.7728	0.001	0.001
20	10	5	10	1.2505	——	-0.160
	20			1.4485	0.005	——
	30			1.5390	0.005	0.005
20	10	10	10	1.4898	——	-0.176
	20			1.7330	-0.001	-0.010
	30			1.8352	0.004	0.004

表3. 2重非心 F 分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の下側 10% 点の誤差

ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	真 値	(2.6)	Tiku (2.1)
5	10	5	5	0.4734	0.021	0.021
	20			0.5814	-0.001	-0.001
	30			0.6310	-0.001	0.000
5	10	5	10	0.3554	——	0.312
	20			0.4835	0.119	0.122
	30			0.5559	0.004	0.005
5	10	10	10	0.6153	——	0.639
	20			0.8463	0.183	0.187
	30			0.9697	0.015	0.015
10	10	5	5	0.4505	0.020	0.020
	20			0.5693	-0.002	-0.002
	30			0.6200	0.000	0.000
10	10	5	10	0.3447	——	0.275
	20			0.4732	0.094	0.097
	30			0.5441	0.006	0.007
10	10	10	10	0.4816	——	0.332
	20			0.6665	0.129	——
	30			0.7639	0.013	0.013
20	10	5	5	0.4416	0.016	0.016
	20			0.5616	0.002	0.002
	30			0.6238	-0.002	-0.002
20	10	5	10	0.3375	——	0.065
	20			0.4729	0.086	0.088
	30			0.5489	0.004	0.004
20	10	10	10	0.4081	——	0.201
	20			0.5767	0.104	0.106
	30			0.6691	0.004	0.004

表4. 2重非心 F 分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の下側 5% 点の誤差

ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	真 値	(2.6)	Tiku (2.1)
5	10	5	5	0.3421	0.028	0.028
	20			0.4188	-0.006	-0.931
	30			0.4612	-0.011	-0.010
5	10	5	10	0.2563	0.579	-0.709
	20			0.3513	0.189	0.191
	30			0.4020	0.007	0.008
5	10	10	10	0.4622	——	0.783
	20			0.6492	0.295	0.297
	30			0.7439	0.017	——
10	10	5	5	0.3542	0.032	0.032
	20			0.4549	-0.003	-0.003
	30			0.5005	-0.003	-0.003
10	10	5	10	0.2744	——	0.354
	20			0.3784	0.155	0.156
	30			0.4399	0.009	0.009
10	10	10	10	0.3887	——	0.444
	20			0.5425	0.211	——
	30			0.6234	0.020	0.020
20	10	5	5	0.3674	0.027	0.027
	20			0.4767	0.001	-0.289
	30			0.5326	-0.001	-0.001
20	10	5	10	0.2827	——	0.149
	20			0.4015	0.141	0.142
	30			0.4706	0.009	0.009
20	10	10	10	0.3430	——	0.274
	20			0.4914	0.170	0.171
	30			0.5740	0.012	0.012