

Every normal Toeplitz matrix is either of type I or of type II

武蔵工大・工 伊藤隆司 (TAKASHI ITO)

$T_N$  を  $N+1$  次の Toeplitz 行列とする.

$$T_N = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & \cdots & a_{-N} \\ a_1 & a_0 & \cdots & \cdots & a_{-(N-1)} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{-1} \\ a_N & a_{N-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

ここでは, 正規 ( $T_N^* T_N = T_N T_N^*$ ) な  $T_N$  を問題とする.

正規な Toeplitz 行列  $T_N$  の例として, まず,  $N+1$  次の Hermite 行列  $H_N$  と  $0 \leq \theta < 2\pi$  に対して

$$T_N = e^{i\theta} H_N + \alpha I_N, \quad I_N \text{ は } N+1 \text{ 次の単位行列, } \alpha \text{ は複素数}$$

となる場合である. このとき,  $T_N$  を I 型と呼ぶことにする. もう一つの例として,  $N+1$  次の Unitary 行列  $U_N(\theta)$  (circulant 行列) に対して

$$U_N(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{i\theta} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_N = p(U_N(\theta)), \quad p(z) \text{ は } N \text{ 次の多項式}$$

となる場合である. このとき,  $T_N$  を II 型と呼ぶことにする.  
次のことが成立する.

**Theorem** 正規 Toeplitz 行列  $T_N$  は I 型か II 型かのいずれかである.

この結果については次のような経緯がある. この事は  $N$  が 4 以下のとき, Farenick と Lee によって [1] で示された.  $N \geq 5$  の場合は [3] で示された. しかし, [3] と殆んど同時に, 異なる方法で, Farenick, M. Krupnick, N. Krupnick, Lee の 4 者によって [2] でも一般の場合が示された. ここで述べる方法は [3] によるものである. (経緯はもっと複雑のようである. 追記を参照)

最初に述べた I 型, II 型の定義は次のように考えてもよいことは容易にわかる.

$T_N$  が I 型であるとは, ある  $\theta (0 \leq \theta < 2\pi)$  が存在して

$$\begin{bmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \\ \vdots \\ a_{-N} \end{bmatrix} = e^{i\theta} \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_N \end{bmatrix}$$

となることである. 同様に,  $T_N$  が II 型であるとは, ある  $\theta (0 \leq \theta < 2\pi)$  が存在して,

$$\begin{bmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \\ \vdots \\ a_{-N} \end{bmatrix} = e^{i\theta} \begin{bmatrix} a_N \\ a_{N-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix}$$

となることである. 以下では, これらを I 型, II 型の定義と考えることにする.

定理の証明は 3 段階に分けられる.

- (1)  $T_N$  の正規性は,  $T_N$  のある種の Toeplitz 部分行列 (Toeplitz 部分行列の定義は後で述べる) にそのまま移る.
- (2)  $T_N$  が正規のとき, 5 次以下のすべての Toeplitz 部分行列は [1] の結果により I 型か II 型のいずれかである.
- (3)  $T_N$  が正規のとき, 5 次以下の Toeplitz 部分行列はすべて同時に I 型か同時に II 型となり, その型がそのまま  $T_N$  自身の型となる.

## 1. 正規 Toeplitz 行列

まず  $T_N$  が正規行列であるための一つの条件を求める.  $T_N$  の対角線上の要素  $a_0$  は  $T_N$  の正規性に無関係なので,  $a_0 = 0$  と考えてよい. また,  $T_N$  を  $[a_1, a_2, \dots, a_N; a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-N}]$  と書くことにする.

$T_N$  の self-commutator  $[T_N; T_N^*] = T_N T_N^* - T_N^* T_N$  の  $(i, j)$ -成分  $\alpha_{i,j}$  を計算すると,

$$\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^{N+1} a_{i-k} \bar{a}_{j-k} - \bar{a}_{k-i} a_{k-j} \quad (1 \leq i, j \leq N+1)$$

で与えられる. このことから, 任意の  $T_N$  に対して  $[T_N; T_N^*]$  は第 2 対角線 (右上隅から左下隅への対角線) に関して skew-symmetric であることがわかる. すなわち,

$$-\alpha_{i,j} = \alpha_{N+2-j, N+2-i} \quad (1 \leq i, j \leq N+1)$$

よって,  $T_N$  が正規行列, すなわち  $[T_N; T_N^*] = 0$ , であることと

$$\alpha_{i+1, j+1} = \alpha_{i,j} \quad (1 \leq i, j \leq N)$$

とは同値になる. この条件を  $T_N$  の成分で書き直すことによって,  $T_N$  が正規であるための必要かつ十分条件として

$$(*) \quad a_i \bar{a}_j + \bar{a}_{N+1-i} a_{N+1-j} = \bar{a}_{-i} a_{-j} + a_{-(N+1-i)} \bar{a}_{-(N+1-j)} \quad (1 \leq i, j \leq N)$$

が得られる. この (\*) からいくつかの事が導かれる. まず,

Proposition 1  $T_N$  を正規行列とする. このとき,

(1) ある  $m (1 \leq m \leq N)$  に対して,

$$\begin{bmatrix} a_m \\ a_{-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ かつ } \begin{bmatrix} a_{N+1-m} \\ a_{-(N+1-m)} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ならば}$$

$T_N$  は I 型である. 同様に,

(2) ある  $m (1 \leq m \leq N)$  に対して,

$$\begin{bmatrix} a_m \\ a_{-(N+1-m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ かつ } \begin{bmatrix} a_{N+1-m} \\ a_{-m} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ならば}$$

$T_N$  は II 型である.

例えば (1) は, 次の様に (\*) から導かれる. (\*) において,  $j = m; a_m = a_{-m} = 0$  とおくと, すべての  $i$  について,

$$\bar{a}_{N+1-i} a_{N+1-m} = a_{-(N+1-i)} \bar{a}_{-(N+1-m)}$$

ここで, とくに  $i = m$  とし, 仮定を用いてると

$$|a_{N+1-m}| = |a_{-(N+1-m)}| > 0$$

故に, すべての  $i$  について  $a_{-(N+1-i)} = \frac{a_{N+1-m}}{\bar{a}_{-(N+1-m)}} \bar{a}_{N+1-i} = e^{i\theta} \bar{a}_{N+1-i}$  となる. すなわち,

$$\begin{bmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \\ \vdots \\ a_{-N} \end{bmatrix} = e^{i\theta} \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_N \end{bmatrix}$$

となり,  $T_N$  は I 型である.

## 2. 部分 Toeplitz 行列

もう一つ条件 (\*) から導かれることとして, 部分行列に関することがある.  $\{j_1, j_2, \dots, j_M\}$  ( $j_1 < j_2 < \dots < j_M$ ) を  $\{1, 2, \dots, N\}$  の部分集合で, 変換:  $j \rightarrow N+1-j$  で閉じているものとする. すなわち,

$$j_{M+1-m} = N+1-j_m \quad (1 \leq m \leq M)$$

このとき,  $M+1$  次の Toeplitz 行列  $[a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_M}; a_{-j_1}, a_{-j_2}, \dots, a_{-j_M}]$  を単に  $T_N$  の Toeplitz 部分行列と呼ぶことにする.

$T_N$  の正規性を特徴付ける条件 (\*) から, 次のことが結論される.

### Proposition 2

- (1)  $T_N$  が正規行列ならば,  $T_N$  のすべての Toeplitz 部分行列は正規行列である. 逆に,  
 (2) 5 次以下のすべての Toeplitz 部分行列が正規行列ならば  $T_N$  自身正規行列である.

この proposition の (1) が Theorem の証明に本質的に用いられるが, (1) から得られる次のような次数についての reduction も証明の簡単化に役に立つ. すなわち, 正規行列  $T_N$  の型を決めようとするとき, すべての  $m$  ( $1 \leq m \leq N$ ) について

$$\begin{bmatrix} a_m & a_{-m} \\ a_{N+1-m} & a_{-(N+1-m)} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と仮定してよい. 何故なら, ある  $m$  に対して

$$a_m = a_{-m} = a_{N+1-m} = a_{-(N+1-m)} = 0$$

とすると, この 4 要素 ( $N$  が odd で  $m = \frac{N+1}{2}$  のときは, 2 要素) を除いて出来る Toeplitz 部分行列 (この部分行列の次数は  $N-1$  次または  $N$  次である) はこの proposition の (1) により, また正規行列となる. そして, この部分行列の型が決まれば, その型がそのまま  $T_N$  の型となることは明らかである.

### 3. Theorem の証明

$T_N$  を正規とする. Proposition 2 の (1) により, すべての Toeplitz 部分行列は正規である. とくに, [1] の結果より, 5 次以下の Toeplitz 部分行列は I 型か II 型のいずれかである. さらに,  $T_N$  自身が I 型か II 型であることを示す前に, 次のことに注意する. 任意の  $m$  ( $1 \leq m \leq N$ ) について

$$\begin{bmatrix} a_m & a_{-m} \\ a_{N+1-m} & a_{-(N+1-m)} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と仮定してよいから, Proposition 1 を考慮すれば

$$\begin{bmatrix} a_m \\ a_{-m} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ かつ } \begin{bmatrix} a_m \\ a_{-(N+1-m)} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1 \leq m \leq N)$$

である場合だけを考えればよい.

次の Lemma を準備する. その証明は容易である.

**Lemma** 2 つの 5 次 Toeplitz 部分行列 ( $1 \leq m < n < \frac{N+1}{2}$ ,  $1 \leq k < l < \frac{N+1}{2}$ )

$$A = [a_m, a_n, a_{N+1-n}, a_{N+1-m}; a_{-m}, a_{-n}, a_{-(N+1-n)}, a_{-(N+1-m)}]$$

$$B = [a_k, a_l, a_{N+1-l}, a_{N+1-k}; a_{-k}, a_{-l}, a_{-(N+1-l)}, a_{-(N+1-k)}]$$

がともに I 型 (又は II 型) であり,  $\{m, n\} \cap \{k, l\} = \{r\}$ ,  $\{m, n\} \cup \{k, l\} \setminus \{r\} = \{p, q\}$  ( $p < q$ ) とする. このとき,

$$C = [a_p, a_q, a_{N+1-q}, a_{N+1-p}; a_{-p}, a_{-q}, a_{-(N+1-q)}, a_{-(N+1-p)}]$$

は I 型 (又は II 型) である.

定理の証明の第 3 段階は次のようになる. 以下,  $N$  を even とする. ( $N$  が odd の場合も議論は殆ど同じである)

a) 次のような 5 次の Toeplitz 部分行列 ( $1 < m < \frac{N+1}{2}$ )

$$A_m = [a_1, a_m, a_{N+1-m}, a_N; a_{-1}, a_{-m}, a_{-(N+1-m)}, a_{-N}]$$

はすべて同時に I 型か同時に II 型である. 何故なら, もしもある  $m$  に対して  $A_m$  は I 型であるが II 型ではなく, ある  $n$  に対して  $A_n$  は II 型であるが, I 型ではないとする. このとき,  $m < n$  として, Toeplitz 部分行列

$$C = [a_m, a_n, a_{N+1-n}, a_{N+1-m}; a_{-m}, a_{-n}, a_{-(N+1-n)}, a_{-(N+1-m)}]$$

をとると,  $C$  は [1] の結果により I 型か II 型のいずれかである. I 型であるとする,  $A_m$  と  $C$  とに Lemma を適用すれば  $A_n$  が I 型となり, 仮定に反する. 同様に  $C$  が II 型ならば,  $A_n$  と  $C$  とに Lemma を適用して,  $A_m$  が II 型となり, 矛盾が出る.

b) 上の  $A_m$  ( $1 < m < \frac{N+1}{2}$ ) がすべて同時に I 型 (II 型) ならば  $T_N$  は I 型 (II 型) である. 例えば  $A_m$  はすべて II 型とすると,  $0 \leq \theta_m < 2\pi$  が存在して,

$$\begin{bmatrix} a_{-1} \\ a_{-m} \\ a_{-(N+1-m)} \\ a_{-N} \end{bmatrix} = e^{i\theta_m} \begin{bmatrix} a_N \\ a_{N+1-m} \\ a_m \\ a_1 \end{bmatrix}$$

よって, とくに,  $a_{-1} = e^{i\theta_m} a_N$ . しかし,  $\begin{bmatrix} a_N \\ a_{-1} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  であるから  $|a_{-1}| = |a_N| > 0$  となり,  $\theta_m$  は  $m$  に無関係に,  $e^{i\theta_m} = e^{i\theta} = \frac{a_{-1}}{a_N}$  となる. 故に, すべての  $m$  について,

$$a_{-m} = e^{i\theta} a_{N+1-m}, \quad a_{-(N+1-m)} = e^{i\theta} a_m \quad (1 \leq m < \frac{N+1}{2})$$

となり,  $T_N$  が II 型であることがわかる.

以上

## REFERENCES

- [1] D. R. Farenick and W. Y. Lee, *Normal Toeplitz matrices*, 1995 manuscript
- [2] D. R. Farenick, M. Krupnick, N. Krupnick and W. Y. Lee, *Normal Toeplitz matrices*, SIAM J. Matrix Anal., 17 No. 4, p.1037–p.1043 (1996)
- [3] T. Ito, *Every normal Toeplitz matrix is either of type I or of type II*, SIAM J. Matrix Anal., 17 No. 4, p.998–p.1006 (1996)

追記: ごく最近 (平成 9 年 1 月) のニュースによれば, 同じような結果 (未見なので正確には言えないが) が次の論文 (ロシア語) に発表されているようである.

Kh. D. Ikramov and V. N. Chugunov, Normality condition for a complex Toeplitz matrix, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz., 36(2)(1996), p.3–10 (in Russian). Comput. Math. Math. Phys. 36(1996), p.131–137.