

Growth exponent for loop-erased random walk in three dimensions

京都大学大学院理学研究科数学教室 白石 大典

Daisuke Shiraishi

Department of Mathematics

Kyoto University

1 LERW

本稿では Loop-erased random walk (以下 LERW) の性質を主に $\mathbb{Z}^d$ の場合に焦点を絞って概説する。LERW は Lawler ([6]) により導入されて以来多くの研究者の注目を集めてきた。元々は通常の self-avoiding walk (以下 SAW) の研究を進めるために導入された対象なのであるが、徐々に LERW と SAW は異なる universality class に属することが分かってきている。それでもなお LERW への関心が依然としてなくなることはないのは次のふたつの理由によるものと考えられる。ひとつは uniform spanning tree (UST) といった統計物理に起原を持つモデルと深い関わりがあることが挙げられる。Pemantle ([12]) や Wilson ([16]) らによって LERW と UST の非常に美しい関係が証明された。UST の多くの問題は LERW の問題へと帰着される。LERW が重要とみなされる第二の理由は、それが非マルコフ過程の中で最も扱いやすい過程のひとつであることにある。後で述べる定義より明らかのように LERW はマルコフ過程ではない。しかしながら LERW は domain Markov property なる性質を持つ。この性質のおかげで LERW の解析は、過去のパスに交わらないように条件付けられた simple random walk (SRW) の解析を行うことに帰着される。そのような条件付けられた SRW の研究を行う際にポテンシャル論を用いた解析がうまく適合し、LERW の様々な性質の理解につながるのである。これこそが SAW と LERW の本質的な差異であると考えられる。確率論とポテンシャル論の関係の重要性は言うまでもないことではあるが、ポテンシャル論を用いたランダムパスの研究の更なる進化は今後の課題と言える。

記号の導入を行う。 G を有限連結グラフとする。 $V(G)$ および $E(G)$ はそれぞれ G の頂点集合および辺集合を表す。 $\gamma = [\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(m)] \subset V(G)$ がパスであるとは、 $\{\gamma(i), \gamma(i+1)\} \in E(G)$ が各 $i = 1, 2, \dots, m-1$ で成立することをいう。パス γ がシンプルであるとは、 $\gamma(i) \neq \gamma(j)$ が全ての $i \neq j$ で成り立つことを言う。パス γ に対してその loop-erasure とは、 γ から現れる順に loop を取り除いて得られるシンプルパスのことをいう。 $\gamma = [\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(m)]$ は長さ m のパスとする。 $t_0 = 0$ とし $i > 0$ に対して

$$t_i = \max\{k \mid \gamma(t_{i-1} + 1) = \gamma(k)\} \quad (1)$$

によって t_i を定義する。さらに

$$n = \inf\{i \mid t_i = m\} \quad (2)$$

を上記操作の終点とする。このとき

$$LE(\gamma) = [\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)] \quad (3)$$

によってパス γ に対する loop-erasure を定義する。

Loop-erased random walk とは、 γ としてランダムウォークのパスを考えることによって得られるランダムなシンプルパスのモデルである。 $v \in V(G)$ とし $S^v = (S^v(k))_{k \geq 0}$ を G 上の v から出発する simple random walk とする。 τ を S^v に対する停止時刻とする。このとき LERW とは $LE(S^v[0, \tau])$ のことをいう。LERW は Lawler ([6]) により通常の self-avoiding walk の研究を進めることを動機として導入された。その後の研究により、LERW と SAW は異なる universality class に属することが明らかになってきている。それでもなお LERW が注目を集める対象として認知されているのは次節で述べるように統計物理に起原を持つモデルと深い関わりがあるためである。

2 Uniform spanning tree

$G = (V(G), E(G))$ は有限連結グラフとする。 G の部分グラフ T が spanning tree とは $V(T) = V(G)$ であって、 T は tree である (cycle を持たない) ことをいう。 G の spanning tree 全体から一様な確率で取り出すことによって得られるランダムな spanning tree を uniform spanning tree (UST) という。LERW と UST の関係は Pemantle ([12]) によって次のような形で与えられた。 $v, w \in V(G)$ とする。このとき v と w を結ぶ UST 上の (ランダムな) パスが一意的に定まる。このパスを $T(v, w)$ によって表す。 $T(v, w)$ は G 上のシンプルパスであるが、このパスと LERW を関係づけるのが次の定理である。

定理 1. ([12])

Let $v, w \in V(G)$. Then the distribution of $T(v, w)$ is equal to that of $LE(S^v[0, \tau_w])$, where

$$\tau_w = \inf\{k \mid S^v(k) = w\}. \quad (4)$$

この定理により標語的に「UST の枝は LERW である」と言うことが出来る。

それでは UST 全体を生成するにはどうしたら良いのか。上記の定理を鑑みればいくつかの LERW の合併により UST を生成できるのではないかと予想される。このことを定式化したのが Wilson ([16]) である。 $V(G)$ の元を並べたものを $v_1, v_2, \dots, v_l$ とする (並べ方は任意でよい)。 $U_1, U_2, \dots$ を次のように帰納的に定義する。 $U_1 = \{v_1\}$ とする。 U_j まで定義されたとする。 $z_{j+1} \in U_j$ であるとき $U_{j+1} = U_j$ とする。そうでないときは

$$\tau_{U_j} = \inf\{k \mid S^{z_{j+1}}(k) \in U_j\} \quad (5)$$

として $U_{j+1} = U_j \cup LE(S^{z_{j+1}}[0, \tau_{U_j}])$ により定義する。 $V(U_j) = V(G)$ となるまでこの操作を続けてそこで終了する。アウトプットとして出てくるグラフは G のランダムな spanning tree となる。そこでこのランダムな tree を T で表す。 T は $V(G)$ の ordering に依存する。しかしながらその分布は ordering に依存しないことを主張するのが次の定理である。

定理 2. ([16])

For any ordering $V(G)$, the distribution of T is equal to that of UST.

この結果により UST の多くの問題は同じグラフ上の LERW の問題に帰着される。

3 $\mathbb{Z}^d$ case

以下では考えるグラフとして $\mathbb{Z}^d$ の box を考えることにする。すなわち

$$G_n = [-n, n]^d \cap \mathbb{Z}^d \quad (6)$$

とする。 $S = (S(k))_k$ を原点から出発する $\mathbb{Z}^d$ 上の SRW とする。さらに

$$\tau_n = \inf\{k \mid S(k) \in \partial G_n\} \quad (7)$$

とする。興味ある量として LERW の長さ、すなわち

$$M_n = |LE(S[0, \tau_n])| \quad (8)$$

がある。 M_n の漸近挙動を調べることは $\mathbb{Z}^d$ 上の UST の定量的な評価を与える上でも非常に重要である。もうひとつ重要な考察対象として LERW のスケール極限がある。

3.1 $d \geq 5$

高次元の場合、すなわち $d \geq 5$ の場合は LERW の解析は比較的容易なものとなる。この場合は元々の SRW のパス $S[0, \tau_n]$ 自身が loop をあまり持たないので、loop erasing の操作の前後で大きな変化は生じない。このことを厳密に証明したのは Lawler ([7]) である。

定理 3. ([7])

Let $d \geq 5$. There exists c such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(M_n)}{n^2} = c. \quad (9)$$

ここで τ_n は n^2 のオーダーであることに注意されたい。上の定理は M_n と τ_n のオーダーは一致することを主張している。

スケール極限に関しても詳しく調べられている。通常の SRW のスケール極限はブラウン運動である。高次元の場合は LERW のスケール極限もブラウン運動であると推測される。このことを示したのが Lawler ([7]) である。

定理 4. ([7])

Let $d \geq 5$. The scaling limit of LERW is the Brownian motion.

3.2 $d = 4$

4次元の場合も M_n の leading order やスケール極限は SRW のそれと一致する。しかしながらこの場合は log correction が以下のように現れる。 M_n のオーダーを与えたのは Lawler ([8]) である。

定理 5. ([8])

Let $d = 4$. Then

$$E(M_n) \asymp n^2 (\log n)^{-\frac{1}{3}}. \quad (10)$$

スケール極限に関しても Lawle ([7]) が以下の結果を示した。

定理 6. ([7]) Let $d = 4$. The scaling limit of LERW is the Brownian motion.

3.3 $d = 2$

低次元の場合は高次元の場合と異なり SRW の loop を無視することが出来ないため解析は困難なものとなる。 $d = 1$ の場合は問題は完全に自明なものになるので $d = 2$ の場合が最も困難であると推測されるところではあるが、2次元の場合には以下で述べるように conformal field theory をうまく用いることにより LERW の解析を押し進めることが出来る。以下詳しく説明していく。

D を $\mathbb{R}^2$ の単連結領域とする。細かいメッシュで分割して得られる D を近似するグラフを G とする。すなわち

$$G = D \cap \epsilon \mathbb{Z}^2 \quad (11)$$

とする。 $x \in D$ とし、 $v \in G$ を x に最も近い G の点とする。 v から出発する G 上の SRW を ∂G に到達するまで考え、その loop erasure を考える。こうして得られる G 上のシンプルパスを $LE_{D,x,\epsilon}$ とする。物理からの（数学的には厳密でない）conformal field theory を用いた議論により以下の予想が提起されていた。

- $\epsilon \rightarrow 0$ としたとき $LE_{D,x,\epsilon}$ は、 x から出発して D の境界までの単純曲全体の集合の上のある分布に弱収束する。収束先の分布を $S_{D,x}$ で表し、これを LERW のスケール極限と呼ぶ。
- $S_{D,x}$ の分布は次の意味で conformal invariant である。すなわち D' を別の単連結領域とし ϕ を D と D' の間のリーマン写像とする。このとき

$$\phi(S_{D,x}) = S_{D',\phi(x)} \quad (12)$$

が成立する。

- 極限として現れる単純曲線のハウスドルフ次元は確率 1 で $\frac{5}{4}$ である。

上記の予想が数学的に厳密に解決されはじめたのは 2000 年になってからである。Kenyon ([4]) は domino tiling の技術を用いて以下の結果を示した。

定理 7. ([4])

Let $d = 2$. Then

$$E(M_n) \approx n^{\frac{5}{4}}. \quad (13)$$

上記の定理に現れる $\frac{5}{4}$ は 2 次元 LERW の growth exponent と呼ばれる指数で LERW の定量的な評価を行って行く上で重要な指数となる。この結果から先述した 3 つのうちの 3 番目の予想は正しいであろうと推測される。しかしながらこの結果だけでは厳密にはスケール極限のハウスドルフ次元が $5/4$ であることを結論することは出来ない。実際スケール極限の存在を示すこと自身自明な問題ではない。こうした状況の中、上記の予想の解決に大きな break through を与えたのが Schramm ([14]) である。これについては次の小節で詳しく述べる。

3.3.1 Schramm Loewner evolution

$\mathbb{D}$ を $\mathbb{R}^2$ の原点を中心とする open unit ball とし、 $\gamma : [0, \infty] \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$ は $\gamma(0) \in \partial\mathbb{D}$ 、 $\gamma(0, \infty] \in \mathbb{D}$ および $\gamma(\infty) = 0$ を満たす単純連続曲線とする。リーマン写像定理により、各 $t \geq 0$ に対して conformal map $g_t : \mathbb{D} \setminus \gamma(0, t] \rightarrow \mathbb{D}$ が一意的に存在して $g_t(0) = 0$ かつ $g'_t(0) > 0$ を満たすことがわかる。各 $t \geq 0$ に対して

$$U_t = \lim_{z \rightarrow \gamma(t)} g_t(z) \quad (14)$$

が存在し、また t の関数として連続になることが示される。さらに g_t と U_t は以下の Loewner 方程式

$$\partial_t g_t(z) = g_t(z) \frac{U_t + g_t(z)}{U_t - g_t(z)}, \quad g_0(z) = z \quad (15)$$

を満たすことも確かめられる。従って連続単純曲線 γ から単位円周上の連続曲線 U を生成することが出来る。 U はしばしば γ の駆動関数と呼ばれる。

Schramm Loewner evolution (以下 SLE) の背景にある基本的なアイデアは上とは逆向きの方向で話を進めることにある。すなわち先に駆動関数 U を与えて、その後曲線 γ を生成するのである。連続曲線 $U : [0, \infty] \rightarrow \partial\mathbb{D}$ と $z \in \mathbb{D}$ が与えられたとする。このとき方程式 (15) の解 $g_t(z)$ は $g_t(z) = U_t$ となる最初の t (その時刻を T_z とかく) まで存在する。今

$$K_t = \{z \in \bar{\mathbb{D}} : T_z \leq t\} \quad (16)$$

とすると g_t は $\mathbb{D} \setminus K_t$ から $\mathbb{D}$ への conformal map であって $g_t(0) = 0$ かつ $g'_t(0) = e^t$ を満たすことが確かめられる。

$\kappa > 0$ を取る。駆動関数 U_t として

$$U_t = \exp i\sqrt{\kappa}B_t \quad (17)$$

を考える。但し B_t は 1 次元ブラウン運動である。結果として得られるランダムな map g_t と集合 K_t は radial SLE $_{\kappa}$ と呼ばれる。このとき、確率 1 である連続曲線 γ が存在し $\mathbb{D} \setminus K_t$ は $\mathbb{D} \setminus \gamma[0, tt]$ の原点を含む連結性分と一致することがわかっている ([13]、[11])。さらに

γ は $\kappa \leq 4$ のとき確率 1 で単純曲線となり、 $\kappa > 4$ のとき確率 1 で単純曲線にはならないことが示されている ([13])。しばしば γ のことを radial SLE_κ 曲線と呼ぶこともある。

2次元 LERW のスケール極限に関して次のことが証明されている。

定理 8. ([11])

Let $d = 2$. The scaling limit of LERW is radial SLE_2 .

SLE_2 のハウスドルフ次元は確率 1 で 2 であることも示されている ([3])。さらに SLE が conformal invariant であることも確かめられるので、上記の予想は Schramm による SLE の導入によって数学的に厳密に解決されたことになる。元々 Schramm は LERW のスケール極限の possible candidate として SLE の導入を行ったのであるが、現在では percolation model や ising model といった統計物理に起原を持つ多くの重要なモデルのスケール極限を記述することが証明されている。

3.3.2 Tail estimates for M_n

これまでは M_n の平均に注目してきたが、 M_n 自身がどのような漸近挙動を行うかを調べる問題は重要である。これに関しては Barlow-Masson が以下の結果を出している。それによると M_n は非常に平均に集中した量であることを示している。

定理 9. ([1])

Let $d = 2$. There exists $c > 0$ such that for all n and $\lambda > 0$,

$$P(M_n \geq \lambda E(M_n)) \leq 2e^{-c\lambda}. \quad (18)$$

Moreover, for any $\alpha < 4/5$, there exist C and c' such that for all n and λ ,

$$P(M_n \leq \frac{1}{\lambda} E(M_n)) \leq Ce^{-c'\lambda^\alpha}. \quad (19)$$

こうした M_n の tail の評価は、2次元 UST の解析を進める上で多いに役立つ。実際 Barlow と Masson ([2]) は上記の結果を用いて 2次元 UST 上の SRW の熱核の評価を与えた。それを行う際、UST のグラフ距離に関するボールの形状を理解しなければならないのであるが、そこで上記の tail の評価を用いている。

3.4 $d = 3$

3.4.1 Growth exponent

LERW の解析を進めることが最も困難なのは $d = 3$ の場合である。この場合の既知の結果は極めて少ない。Growth exponent の値やスケール極限の性質は全くわかっていないと言うことが出来る。2次元の場合の conformal field theory を用いることはできないことや、 $d \geq 4$ の場合のような loop の少ない構造を持つわけではないといったことが困難を生む原因となっている。

M_n に関しては Lawler ([10]) により次の bound が与えられた。

定理 10. ([10])

Let $d = 3$. There exist $\epsilon > 0$, c and C such that

$$cn^{1+\epsilon} \leq E(M_n) \leq Cn^{\frac{5}{3}}. \quad (20)$$

ここで lower bound に関して少し触れておく。時刻 $k \leq \tau_n$ が cut time であるとは

$$S[0, k] \cap S[k+1, \tau_n] = \emptyset \quad (21)$$

を満たすこととしこのとき $S(k)$ を cut point と呼ぶ。定義からすぐに従うこととして、cut point はパス $LE(S[0, \tau_n])$ 上にあることがわかる。従って M_n の lower bound として cut point の個数を採用できるが $d = 3$ の場合 cut point の平均個数は $\geq cn^{1+\epsilon}$ であることがわかっている ([9])。Upper bound に現れる指数 $5/3$ は 3 次元 SAW に対する Flory exponent である。

M_n に関しては次のような予想がある。

予想 1. There exists α such that

$$E(M_n) \approx n^\alpha. \quad (22)$$

すなわち上記の予想は $d = 3$ の場合に LERW に対する growth exponent の存在に対する予想である。数値計算の結果 ([17]) によれば $\alpha = 1.62400 \pm 0.00005$ くらいであろうと予想されているが、その値はおろか存在すら証明されていない状況である。Growth exponent の存在は 3 次元 LERW や UST の定量的な評価を行う上で基本的な問題となる。こうした状況の中以下の結果を得た。

定理 11. (S. 2013)

Let $d = 3$. There exists α such that

$$E(M_n) \approx n^\alpha. \quad (23)$$

この結果により growth exponent の存在は証明された。Lawler が与えた bound を思い出せば

$$1 < \alpha \leq \frac{5}{3}, \quad (24)$$

であることがわかる。

3.5 Scaling limit

3 次元 LERW のスケール極限に関しては Kozma([5]) によってその存在とその分布は rotation と dilation に関して不変であることが証明されている。以下それについて詳しく述べる。

$D = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_i| \leq 1\}$ を単位閉立方体とする。 D のコンパクト部分集合全体にハウスドルフ距離を入れた距離空間を X とする。尺度変換された LERW

$$\frac{1}{n} LE(S[0, \tau_n]) \quad (25)$$

が induce する X 上の確率測度を P_n とする。このとき次が成立する。

定理 12. ([5])

Let $d = 3$. P_n converges weakly. Let ν be the limit. Then ν is invariant under dilations and rotations.

この結果の ν を3次元LERWのスケール極限と呼ぶ。スケール極限がどのようなobjectであるかはほとんど何もわかっていない。その性質を解明して行くことが今後の課題であるといえる。

参考文献

- [1] Martin T. Barlow and Robert Masson. Exponential tail bounds for loop-erased random walk in two dimensions. *Ann. Probab.* Volume 38, Number 6 (2010), 2103-2485
- [2] Martin T. Barlow and Robert Masson. Spectral dimension and random walks on the two dimensional uniform spanning tree. *Communications in Mathematical Physics.* 2011, Volume 305, Issue 1, pp 23-57
- [3] Vincent Beffara. The dimension of the SLE curves. *Ann. Probab.*, 36(4):1421-1452, 2008.
- [4] Richard Kenyon, The asymptotic determinant of the discrete Laplacian, *Acta Math.* 185:2 (2000), 239-286
- [5] Kozma, Gady The scaling limit of loop-erased random walk in three dimensions, *Acta Mathematica*, 199 (1) (2007), 29-152
- [6] Gregory F. Lawler, A self avoiding walk, *Duke Math. J.* 47 (1980), 655-694.
- [7] Gregory F. Lawler, *Intersections of Random Walks*, Birkhauser. (1991)
- [8] Gregory F. Lawler, The logarithmic correction for loop-erased random walk in four dimensions, *Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre kahane (Orsay, 1993)*. Special issue of *J. Fourier Anal. Appl.*, 347-362.
- [9] Gregory F. Lawler, Cut times for simple random walks. *Elect. J. Probab* (1996) electronic. pp23.
- [10] Lawler, Gregory F. (1999) Loop-erased random walk, in *Perplexing problems in probability: Festschrift in honor of Harry Kesten* (M. Bramson and R. T. Durrett, eds.), *Progr. Probab.*, vol. 44, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1999, pp. 197-217
- [11] Gregory F. Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees. *Ann. Probab.*, 32(1B): 939-995, 2004.

- [12] Robin Pemantle, Choosing a spanning tree for the integer lattice uniformly, *Ann. Probab.* 19 4 (1991), 1559-1574.
- [13] Steffen Rohde and Oded Schramm. Basic properties of SLE. *Ann. of Math.* (2), 161(2):883-924, 2005.
- [14] Oded Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* 118 (2000), 221-288.
- [15] Daisuke Shiraishi. Growth exponent for loop-erased random walk in three dimensions. preprint.
- [16] David Bruce Wilson, Generating random spanning trees more quickly than the cover time, *Proceedings of the Twenty-eighth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing* (Philadelphia, PA, 1996), 296-303, ACM, New York, 1996.
- [17] Wilson, David B. (2010) The dimension of loop-erased random walk in 3D, *Physical Review E*, 82(6):062102.