

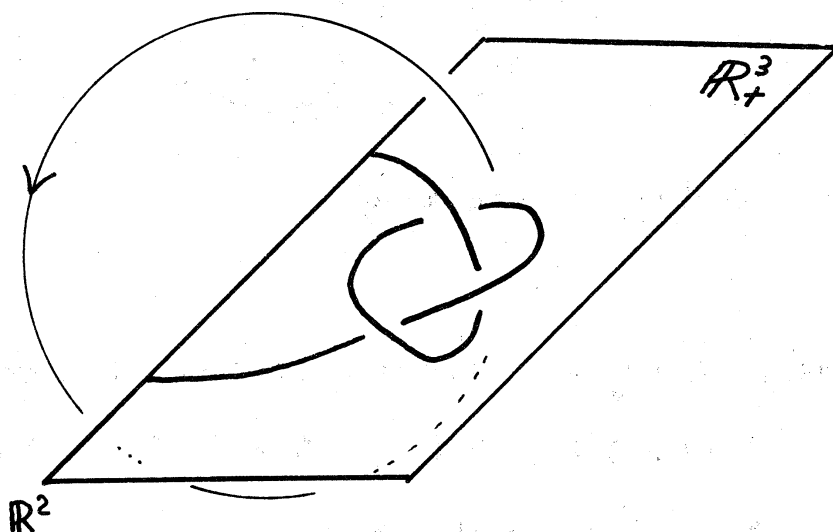
Twisting and Rolling

神大 理, 寺垣内 政一
(Masakazu Teragaito)

§1. 1-knot から何らかの operation で得られる 2-knot を考える:

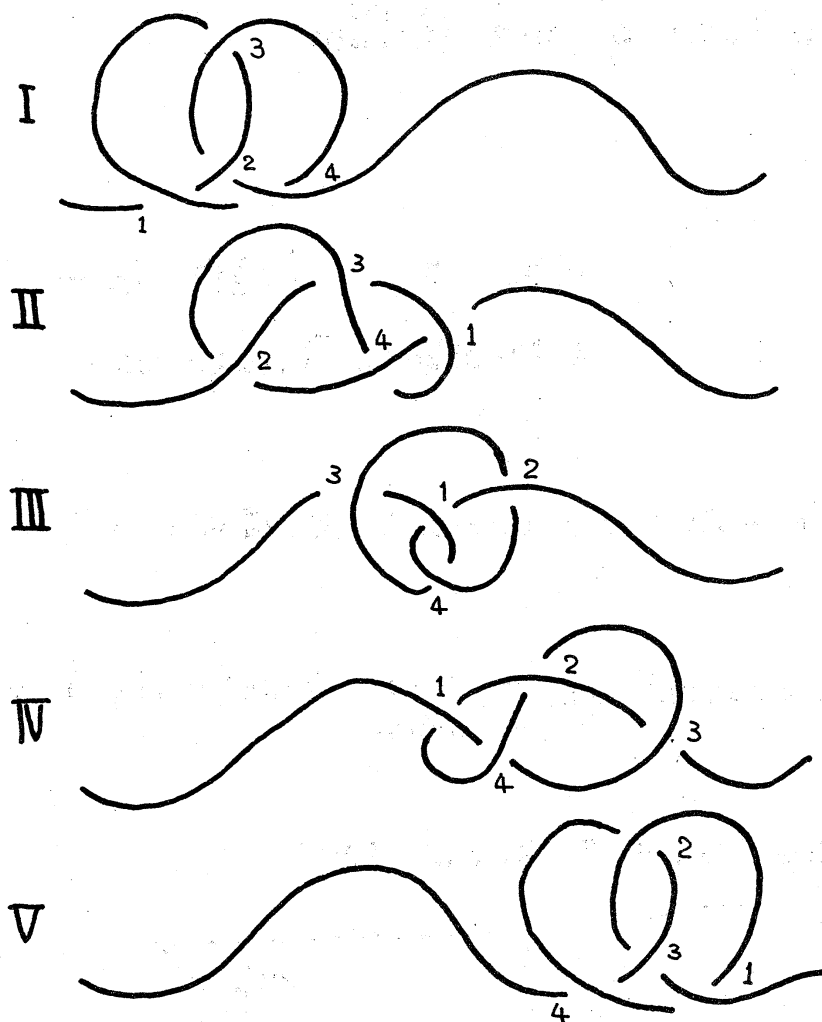
1-knot (knotted arc) $\xrightarrow{\text{operation}}$ 2-knot (locally flat)

Examples. (i) Spinning (E. Artin 1925)



(ii) Twist - spinning (R.H. Fox, E.C. Zeeman 1965)

(iii) Roll-spinning (R.H. Fox 1965)

Fox's roll-spun
figure-eight
knot

--- rolling a stocking ---

Twisting, rolling は、spinning process に knotted arc の "motion" を組みあわせたものである。Fox は上図で得られる 2-knot が、figure-eight knot の twisting では得られないことを、1-st elementary ideal の円分体への表現を

用いて示した。しかし、rolling の厳密な定義は与えていない。
後に、Fox's roll-spun figure-eight knot が trefoil の twisting
では得られる (実は 3-twist-spun trefoil) ことを示す。

§2. Litherland はこれらを含む deform-spinning を
定義した。

Definition. (R.A. Litherland 1979)

$(B^3, \beta) : (\text{locally flat}) \text{ ball pair } (\beta \cong B^1, \partial\beta = \beta \cap \partial B^3)$

$\forall g : (B^3, \beta) \xrightarrow{\cong} (B^3, \beta) \text{ with } g|_{\partial B^3} = \text{id}$

$$P(g) \stackrel{\text{def}}{=} \partial(B^3, \beta) \times B^2 \bigcup_g (B^3, \beta) \times_g \partial B^2$$

この時、 $P(g)$ は locally flat sphere pair で、 g の $\text{rel } \partial B^3$
isotopy class にのみ依存する。

$H(B^3, \beta) = \{g : \text{as above}\} : \text{group}$

$D(B^3, \beta) = H(B^3, \beta) / \text{isotopy rel } \partial B^3 : \text{deformation group}$
of (B^3, β)

$D(B^3, \beta) \ni \gamma$ (deformation と呼ぶ) $g : \gamma$ の代表元

$\gamma(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} P(g)$ として、knot $\gamma(\beta) \in \beta$ の γ -spin と呼ぶ。

knotted arc の "motion" $\in$ mapping torus $(B^3, \beta) \times_g \partial B^2$
の形でもその monodromy に吸収していいわけである。

さて便宜上、次の定義を与える。

(S^3, K) : knot $* \in K$: fixed

$$H_S(S^3, K) = \{ g : (S^3, K) \xrightarrow{\cong} (S^3, K) \mid g = \text{id on some nbd. of } * \}$$

(ここでいう nbd. は g に依存する。)

$$H_S(S^3, K) \ni g, h \quad g \sim h \iff g \text{ isotopic rel some nbd of } *$$

$$\mathcal{D}(S^3, K) = H_S(S^3, K) / \sim$$

しかし、 $*$ の standard ball nbd. の complementary ball pair から決まる β を考えることによつて

$$\text{同型 } \varphi : \mathcal{D}(B^3, \beta) \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}(S^3, K)$$

が得られる。そこで、 $\mathcal{D}(S^3, K) \ni \gamma$ に対し、 $\gamma(K) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{-1}(\gamma)(\beta)$ とし、 K の γ -spin と呼ぶ。

この formulation に従う twisting, rolling の定義を与える。

Example 1. Twisting.

$$X = \overline{S^3 - N(K)} : \text{exterior}$$

$$\partial X \times I : \text{collar of } \partial X = K \times \partial D^2 \text{ in } X \quad (\partial X = \partial X \times \{0\})$$

$$t : (S^3, K) \xrightarrow{\cong} (S^3, K) \text{ by}$$

$$\begin{cases} t(x \times \bar{\theta} \times \varphi) = x \times (\bar{\theta} + \varphi) \times \varphi \\ \quad \quad \quad (x \times \bar{\theta} \times \varphi \in K \times \partial D^2 \times I) \\ t(y) = y \quad (y \in \partial X \times I) \end{cases}$$

$\tau \in \mathcal{D}(S^3, K)$: τ a class

K a τ^m -spin $\mathbb{E}$, K a m -twist-spin $\mathbb{E}$ といふ。

$$\left(\begin{array}{l} \text{quotient map } \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1 \text{ by } \theta \rightarrow \bar{\theta} \\ (\bar{\theta} = \bar{\varphi} \iff \theta - \varphi \in \mathbb{Z}) \\ \text{に } \delta, \tau \text{ } S^1 \text{ } \mathbb{E} \text{ parametrize してゐる。} \end{array} \right)$$

Example 2. Rolling.

$r : (S^3, K) \xrightarrow{\cong} (S^3, K)$ by

$$\left\{ \begin{array}{l} r(\bar{x} \times \bar{\theta} \times \varphi) = (\overline{x+\varphi}) \times \bar{\theta} \times \varphi \\ \quad (\bar{x} \times \bar{\theta} \times \varphi \in K \times \partial D^2 \times I) \\ r(y) = y \quad (y \in \partial X \times I) \end{array} \right.$$

$\rho \in \mathcal{D}(S^3, K)$: ρ a class

K a ρ^l -spin $\mathbb{E}$, K a l -roll-spin $\mathbb{E}$ といふ。

Fox's original idea との対応を詳しく述べるつもりはないが, knotted arc の motion $\mathbb{E}$, exterior の collar 内で吸収してゐるにすぎない。

Example 3. Symmetry-rolling.

(S^3, K) ; order $n \neq 0$ の symmetry g $\mathbb{E}$ かつ。

すなわち, $g: (S^3, K) \xrightarrow{\cong} (S^3, K)$; period n

$\text{Fix}(g) = \text{unknotted circle } J, J \cap K = \emptyset$

$\pm 2, S^3/g = S^3 \bar{c}, d: S^3 \rightarrow S^3$; quotient map
に於て, $\bar{K} = d(K), \bar{J} = d(J)$ とおく。

$lk(\bar{K}, \bar{J}) = lk(K, J) = j$ は, n と素である。

$K \times D^2$ は, $\bar{K} \times D^2$ の n -fold cyclic cover となり, それは

$$d(\bar{x} \times v) = \overline{nx} \times v \quad (\bar{x} \times v \in K \times D^2)$$

で与えられる。従って, $g^j|_{K \times D^2}$ は canonical covering
transformation を与える。

$$\bar{x} \times v \rightarrow \overline{(x + \frac{1}{n})} \times v$$

で表せる。 $jk \equiv 1 \pmod{n}$ なる $k \in \mathbb{Z}$ と。

$$g = g^{jk}; \bar{x} \times v \rightarrow \overline{(x + \frac{k}{n})} \times v \quad (\bar{x} \times v \in K \times D^2)$$

そこで, $s': (S^3, K) \xrightarrow{\cong} (S^3, K)$ by

$$\begin{cases} s'(\bar{x} \times \bar{\theta} \times \varphi) = \overline{(x - \frac{k(1-\varphi)}{n})} \times \bar{\theta} \times \varphi & (\bar{x} \times \bar{\theta} \times \varphi \in K \times \partial D^2 \times I) \\ s'(\bar{x} \times v) = \overline{(x - \frac{k}{n})} \times v & (\bar{x} \times v \in K \times D^2) \\ s'(z) = z & (z \in X - (\partial X \times I)) \end{cases}$$

とすると, $s' \circ g|_{K \times D^2} = id, s' \circ g|_{\overline{X - (\partial X \times I)}} = g$.

こうして, $\sigma_{g,K} \in \mathcal{D}(S^3, K)$ は, $s' \circ g$ の class とする。

(定義より、 $n=1$, $g=id$, J を任意にとると、rolling に帰着し、 $\sigma_{g,k} = \rho^k$ である。)

Litherland は、 (S^3, K) に対して、その knot group G の peripheral subgroup を固定する G の自己同型全体のなす群 $\text{Aut}_p G$ が、 $\mathcal{D}(S^3, K)$ と同型であることを示し、代数的議論から次のことを示した。

Theorem $(S^3, T_{p,q})$: (p,q) -type torus knot

$$\mathcal{D}(S^3, T_{p,q}) = \langle \tau \rangle \cong \mathbb{Z}, \quad \tau^{pq} \rho = 1.$$

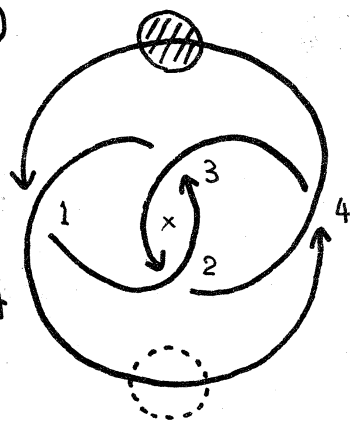
定理は、torus knot に対する deformation が本質的に、twisting のみであることを意味する。

本稿では、この定理をふまえて、torus knot に対する rolling, symmetry rolling を“視覚的”に分析する。

§3. rolling, symmetry rolling を knotted arc の“motion”で扱いたい。Litherland の定義が示唆するように、rolling は、 (S^3, K) からとりのどかれる standard ball pair が knot の orientation (parametrization による) に従って、knot 上を流れていくことを、complementary ball pair 内の arc の

motion で相対的に表現したものといえる。(Litherland はさらにこの流れを exterior に吸収した。)

前述の Fox's roll-spun figure eight の図で、standard ball pair が i -th crossing を通過することに对应して、 i -th crossing を“送る” motion が生じている。

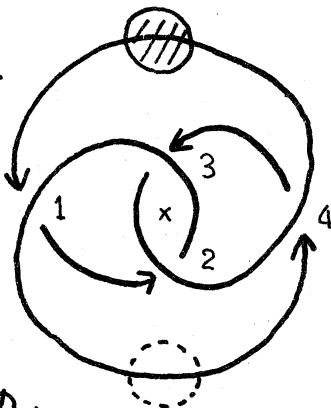


$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ の順に crossing が送られている

から、Litherland の意味の roll-spun では half-rolling である： $\text{Fox's roll-spun figure eight} = \sigma_{g,1}$ (figure eight)

こうして rolling の motion を任意の knot に対して描くことができる。ただし一般には、meridian 方向のねじれを考慮する必要がある。

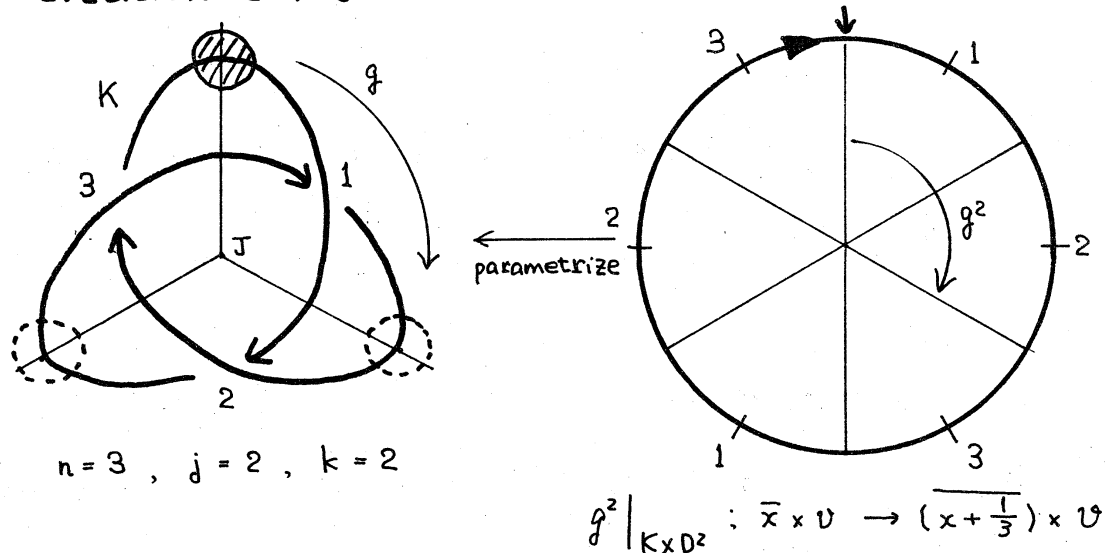
例えば trefoil の場合、standard ball pair が $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ の順に crossing を通過すると、meridian 方向に 2 周するため、



対応する deformation は $\tau^2 \sigma_{g,1}$ である。(τ の定義より、meridian 方向に arc を回転することは τ^{-1} に対応している。)

さて、 l -roll p は standard ball pair が knot に沿って 1 周することに対応する。この観点から、 $\sigma_{g,k}$ を " $p^{\frac{k}{n}}$ " と

考えることが自然である; knot に symmetry に応じた parametrization を与えておく。



standard ball pair が. $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ と crossing を通過することが $\sigma_{g,2}$ だが (meridian 方向のねじれは無視しておく。) これは $\rho^{\frac{2}{3}}$ と考える。同様に, $1 \rightarrow 2$ に対応する $\rho^{\frac{1}{3}}$ が定義できる。一般に, g^j は $\rho^{\frac{j}{n}}$ に対応する。(§2 Example 3 の notation) deformation として厳密な定義は, $\sigma_{g,k}$ と同様に行なえるが, ここではむしろ knotted arc の "motion" として定義する。

この notation を用いて, Litherland の定理から次のことがすこわかる。

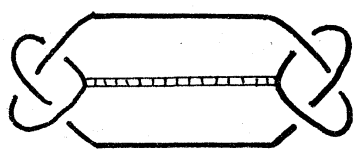
Theorem 1 $\mathcal{D}(S^3, T_{p,q})$ において.

$$\rho^{\frac{1}{p}} = \tau^{-q}, \quad \rho^{\frac{1}{q}} = \tau^{-p}$$

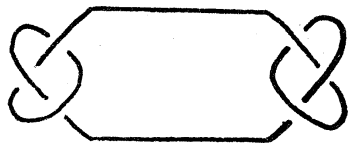
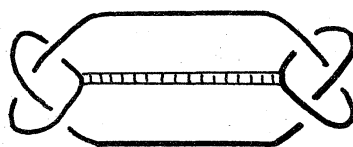
Remark. $T_{p,q}$ ($0 < p < q$) の periods は p, q の素数である。

§4. Moving picture method により, Thm 1 を証明する。

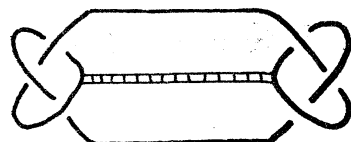
$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ 内の hyperplanes $\mathbb{R}^3[t] = \mathbb{R}^3 \times \{t\}$ による cross sections をみる。簡略のため, equatorial cross section ($t=0$) 及び $t=\pm 1$ level の critical bands を示している。



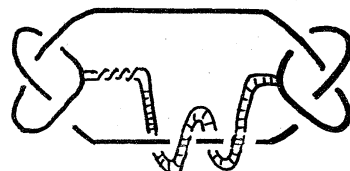
$t=1$



$t=0$



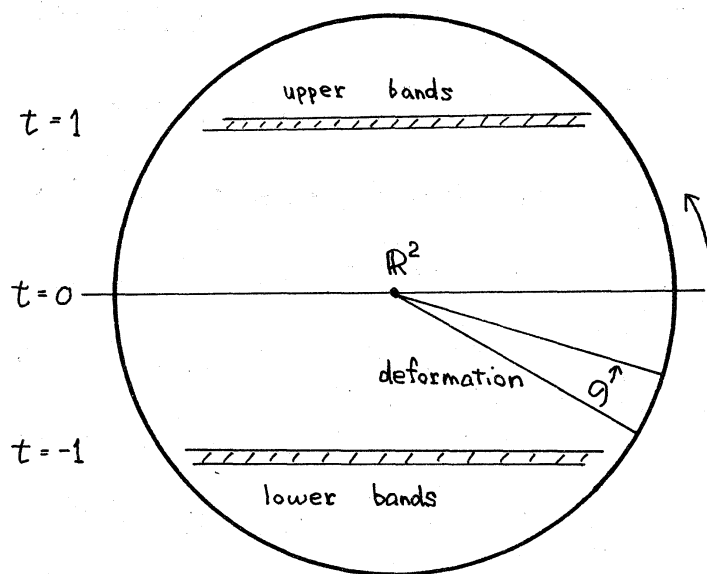
$t=-1$



$\tau^0(\text{trefoil})$

$\tau^{-2}(\text{trefoil})$

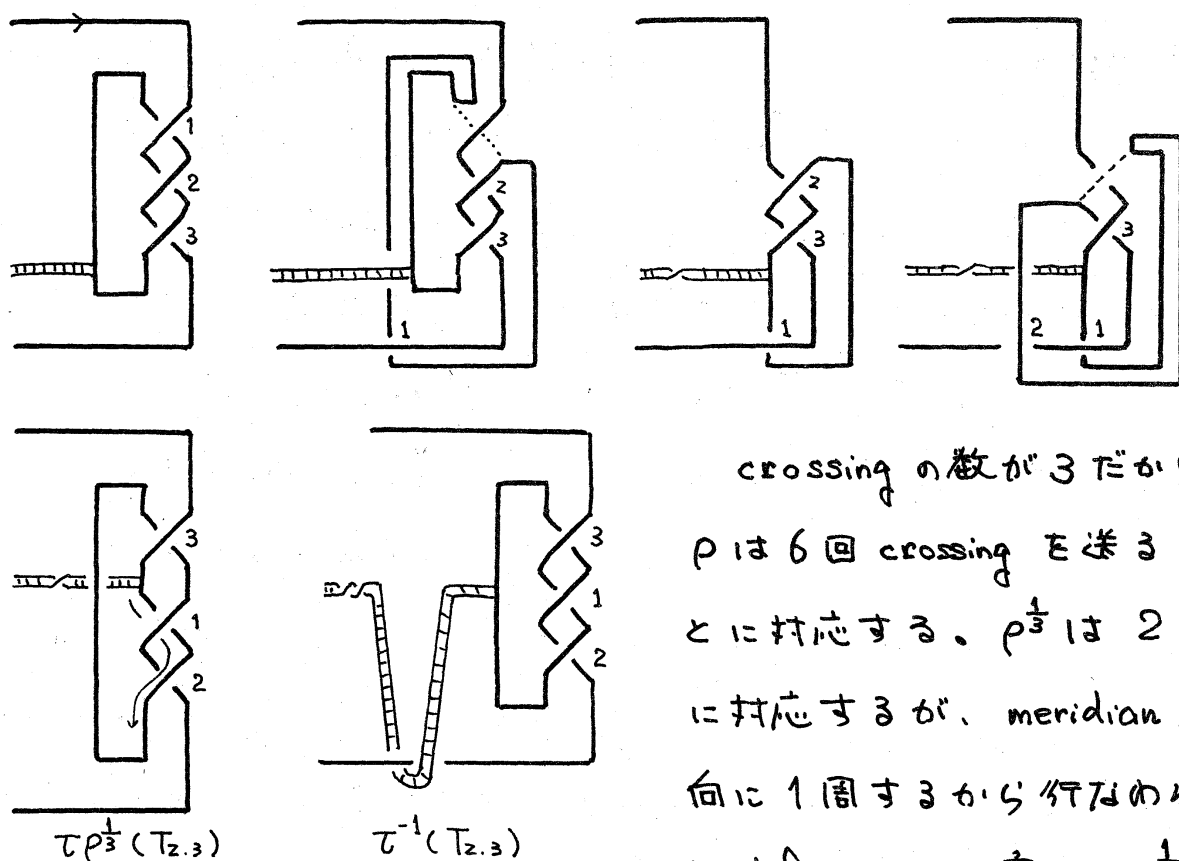
τ^0 -spinning に対しては, original knotted arc の $\mathbb{R}^3$ 内の minimal points に対して bands が生じる。一般の deformation に対しては次の様に考える; spinning process において, lower bands の生じた後に deformation を行なう。次に,



deformation に従って cellular move で lower bands をひきあげる。こうして, deformation の情報を lower bands のみに集めることができる。形式的には, bands

を伴ったまま deformation — arc の motion を行なえば, 望む bands が得られる。例えば τ^2 (trefoil) は先の図に示した lower band を持つ。(詳細は金信氏の論文を御覧下さい。)

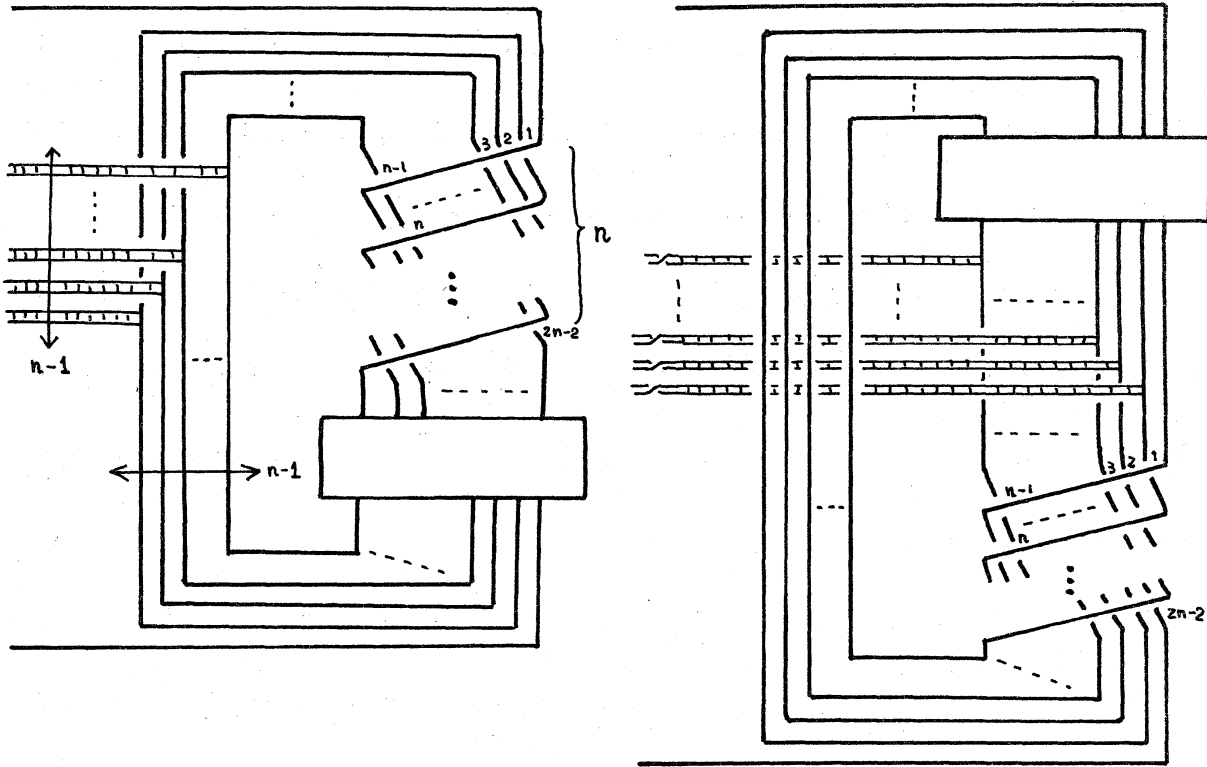
さて Thm 1 を証明する。まず, $T_{2,3}$ に対して $\rho^{\frac{1}{3}}(T_{2,3}) = \tau^{-2}(T_{2,3})$ を示す。ここでの等号の意味は, 2-knot として same type であることだが, Litherland の定理とあわせて deformation として一致することがわかる。



crossing の数が 3 だから
 ρ は 6 回 crossing を送るこ
 とに対応する。 $\rho^{\frac{1}{3}}$ は 2 回
 に対応するが、meridian 方
 向に 1 周するから行なわれ
 た deformation は実は $\tau\rho^{\frac{1}{3}}$

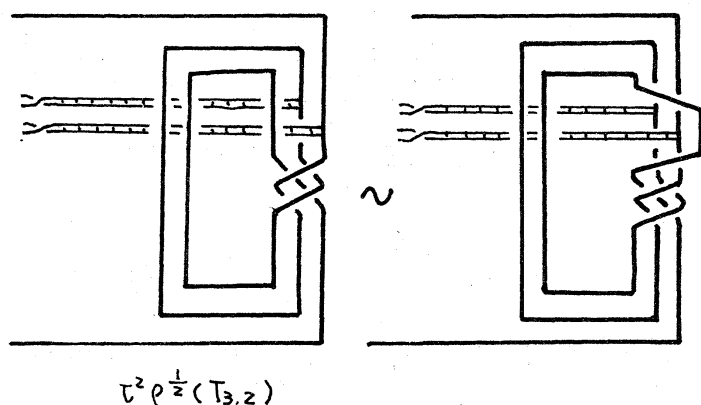
である。しかしその lower band は、twisting band であるこ
 とがわかる。従って $\tau\rho^{\frac{1}{3}}(T_{2,3}) = \tau^{-1}(T_{2,3})$ i.e. $\rho^{\frac{1}{3}}(T_{2,3})$
 $= \tau^{-2}(T_{2,3})$ である。同様に、3-rd crossing の部分を
 $(p-2)$ half twists でおきかえることで、 $\rho^{\frac{1}{p}}(T_{2,p}) = \tau^{-2}(T_{2,p})$
 $(p \geq 3)$ を得る。

一般に $T_{n,p}$ ($p \geq n+1$) に対して、 $\rho^{\frac{1}{p}}(T_{n,p}) = \tau^{-n}(T_{n,p})$
 を示すには $T_{n,n+1}$ について考えれば十分である。次図のよ
 うな $T_{n,p}$ の projection をみる。crossing は $(n-1) \cdot p$ 個あるか
 ら、 ρ は $2(n-1) \cdot p$ 回、 $\rho^{\frac{1}{p}}$ は $2(n-1)$ 回 crossing を送ること

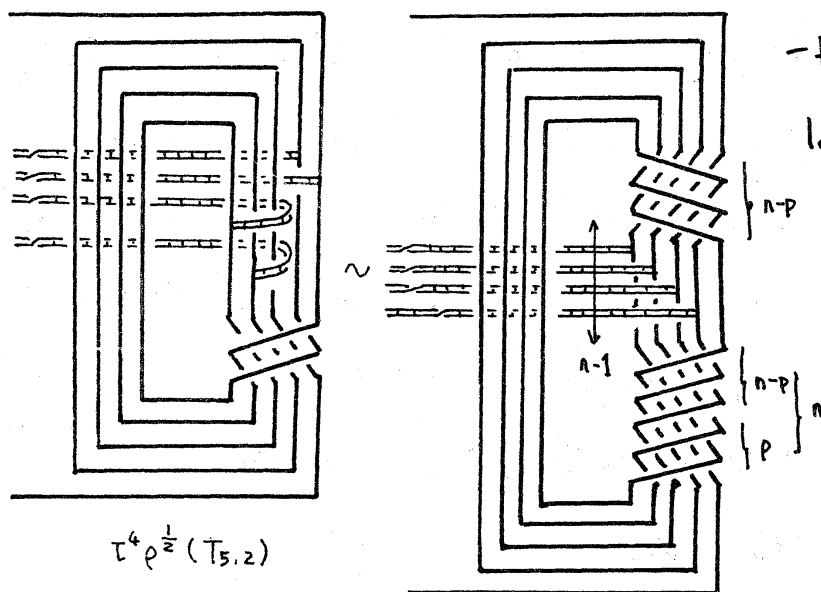


に対応する。meridian 方向に $(n-1)$ 周するから、deformation $\tau^{n-1} \rho^{\frac{1}{2}}$ である。さて $T_{2,3}$ の場合と同様に、arc の motion を行なった後 arc を元の形に整える と、lower bands は上図右のようになる。内側の band から順に下へ slide させて引き出すと、 τ^{-1} に相当する bands であることがわかる。従って $\tau^{n-1} \rho^{\frac{1}{2}}(T_{n,p}) = \tau^{-1}(T_{n,p})$ i.e. $\rho^{\frac{1}{2}}(T_{n,p}) = \tau^{-n}(T_{n,p})$ を得る。(一般に扱う必要があるから、motion を行なう間及び arc を元の形に整える時、bands はできるだけ動かしたくない。arc の形を復元することが優先する。その際、新たに crossing を作ることは許されない。)

次に、 $T_{n,p}$ ($n > p$) に対して $\rho^{\frac{1}{2}}(T_{n,p}) = \tau^{-n}(T_{n,p})$ を示す。先と同様に、crossing が $(n-1)p$ 個の projection において、 $\rho^{\frac{1}{2}}$ は $2(n-1)$ 個の crossings を送る motion に対応する。しかし meridian 方向に $(n-1)$ 周するから、対応する deformation は $\tau^{n-1}\rho^{\frac{1}{2}}$ である。従って、motion によって生じる lower bands が先と同様に、 (-1) -twisting bands であることをみればよい。

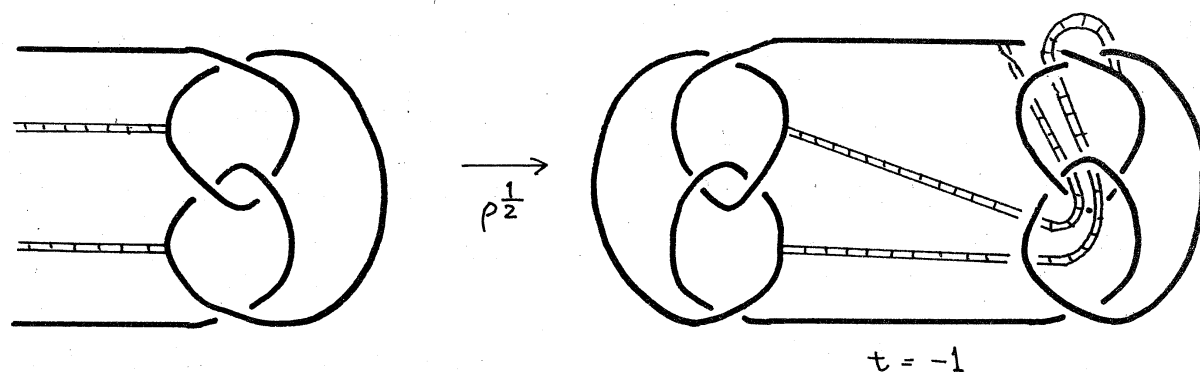

 $\tau^2 \rho^{\frac{1}{2}}(T_{3,2})$

bands は少し違、こ
るが、図のようにして
やると $T_{n,p}$ ($n < p$) の場
合と同じく bands を下
へ slide して、twisting
bands である。

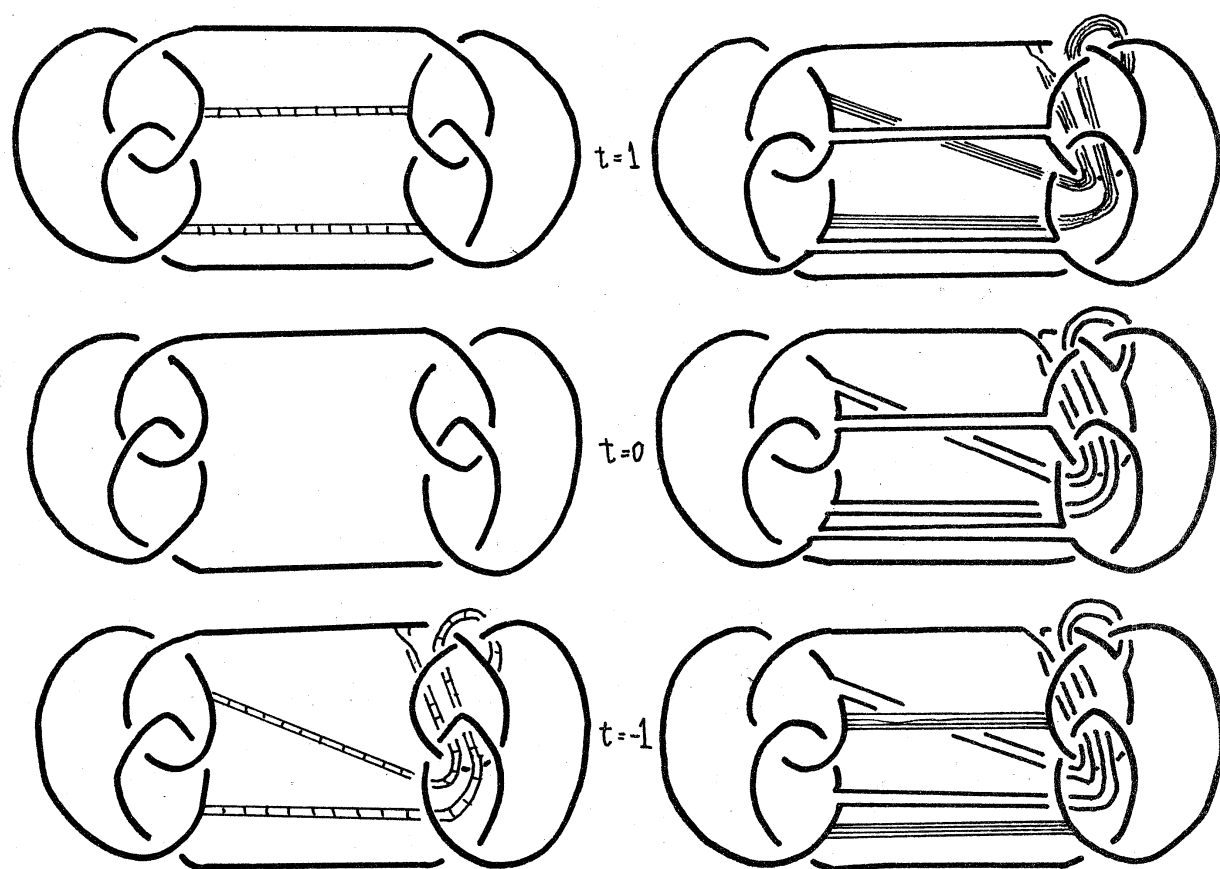

 $\tau^4 \rho^{\frac{1}{2}}(T_{5,2})$

一般に、左図のような
lower bands となり
(arc の復元後)
 n と p の差に関係
する。

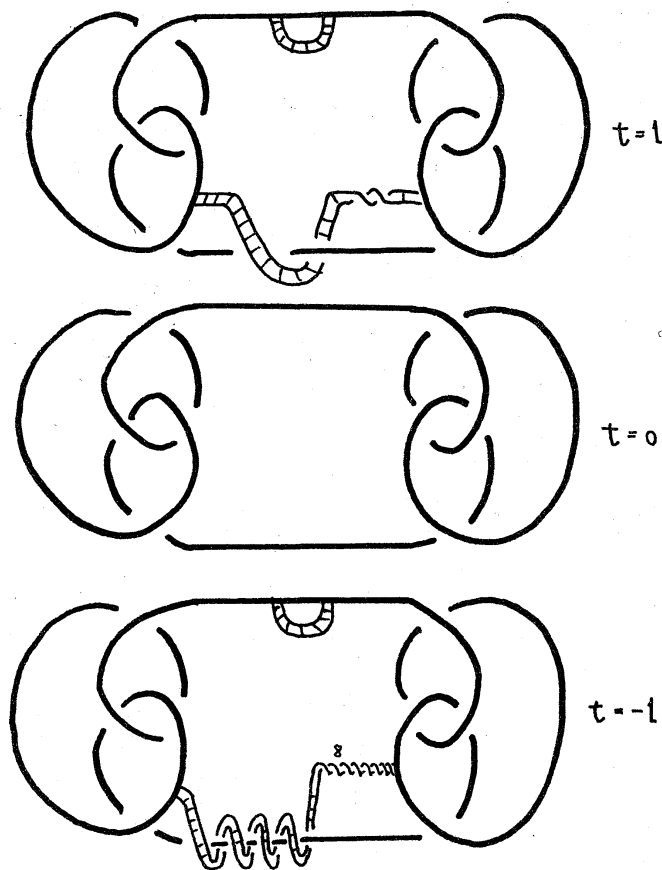
§5 最後に, Fox's roll-spun figure eight knot i. e. $\rho^{\frac{1}{2}}$ (figure eight) が 3-twist-spun trefoil であることを moving picture method により示す。



これは $t = -1$ level にある lower bands であつた。



図のように upper bands と lower bands の level を入れかえる。そして $\mathbb{R}^4$ の vertical-line-preserving ambient isotopy



によって、左図になおせる。

さらに、upper band のからみを解消する $v-l-p$ ambient isotopy を行なえば、deformation の情報を lower band に集めることができ、3-twisting band である。

こうして、

$$\rho^{\frac{1}{2}}(\text{figure-eight}) = \tau^3(\text{trefoil})$$

を得る。

これは、prism manifold $M_{1,2} = (-1, (0, 0); (2, 1), (2, 1), (2, 1))$ を punc したものを fiber にもつ fibered 2-knot である。torus knot 以外の knot に対する deformation では、興味深い現象が様々起こるのだが、それについては稿を改めたい。

References

- Zeeman, E.C., 1965 : Twisting spun knots. Trans. Amer. Math. Soc., 115 (1965) 471 - 495
- Fox, R. H., 1966 : Rolling. Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966) 162 - 164
- Litherland, R.A., 1979 : Deforming twist-spun knots. Trans. Amer. Math. Soc., 250 (1979) 311 - 331
- Kanenobu, T., 1983 : Fox's 2-spheres are twist spun knots. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A., 37 (1983) 81 - 86