

A Criterion for Projectivity of Torus Fibre Spaces

川添 充 (京都大学理学部数学教室)

1. はじめに

コンパクト複素多様体の射影性判定法の決定は重要な問題であるが、具体的に与えられた多様体が射影的であるかどうかを調べるのは一般には難しい問題である。楕円曲面の場合においても、有理曲線上の楕円曲面を除いては、一般には重複ファイバーを持たない場合についてしか射影性判定条件は得られていなかった[7]。しかし、代数曲線上の複素 torus quasi bundle はトーラス束に対数的変換とよばれる変換を施したものであるため、その射影性を対数的変換の言葉で記述できると期待される。実際この問題はすでに Katsura-Ueno [4] において考えられており、有理曲線上の Euler-Poincaré 標数が 0 であるような複素楕円曲面については、これまで知られていた射影性判定法を対数的変換のデータで書き直すことによって具体的な射影性の判定法が得られていたが、一般の種数 g の代数曲線上の重複ファイバーを持つ楕円曲面あるいは高次元のトーラスファイバー空間については、これまでその射影性を判定する有効な判定法はなかった。また、代数曲線上の射影的 torus quasi bundle は、代数曲線上の小平次元 1 の射影的トーラスファイバー空間において多重標準写像の最良性を考える時本質的な役割を果たすものでもあり、その構造を調べることは案外重要であったりする。本稿では論文[6]において得られた代数曲線上の複素 torus quasi bundle のケーラー性および射影性判定法について、講演では時間の都合等で言及できなかったことも補いつつ述べることにする。

2. 準備

まず、torus quasi bundle および abelian fibre space の定義を述べる。

Definition 2.1. (cf. [9],[1])

- (1) X を $\dim(X) \geq 2$ のコンパクト複素多様体、 C をコンパクト Riemann 面とする。ファイバー空間 $\pi : X \rightarrow C$ について、 π が $C - \{p_1, p_2, \dots, p_\ell\}$ 上で (principal) torus bundle で、 p_i 上のファイバーが $m_i T_i$ ($m_i \geq 2$ で T_i はトーラス)、さらに C の適当な有限被覆上への X の引き戻しの正規化が (principal) torus bundle であるとき、ファイバー空間 $\pi : X \rightarrow C$ は (principal) torus

quasi bundle と呼ばれる。とくに、torus quasi bundle $\pi : X \rightarrow C$ が C の適当な有限エタール被覆上への引き戻しが principal torus quasi bundle となるとき、 $\pi : X \rightarrow C$ は *étale principal* であると呼ばれる。

(2) ファイバー空間 $f : X \rightarrow Y$ が次の3つの条件をみたすとき、 (n, m) -abelian fibre space であると呼ばれる。

- (i) X, Y は非特異射影的代数多様体で、 $\dim X = n$ かつ $\dim Y = m$;
- (ii) f のすべてのファイバーは連結;
- (iii) f の一般のファイバーは $n - m (\geq 1)$ 次元の非特異アーベル多様体。

コンパクト Riemann 面上のすべての torus quasi bundle は次に定義する対数的変換によってトーラス束から得ることが出来る。

2.1. 対数的変換 (Logarithmic Transformations)

C をコンパクト Riemann 面、 $p_i, i = 1, 2, \dots, \ell$, を C 上の ℓ 個の相異なる点、 $T = \mathbb{C}^n / \Lambda$ を n 次元トーラスとし、 T をファイバーとする *étale principal torus bundle* $\pi : V \rightarrow C$ を考える。

まず、 p_i の周りでの $\varpi : V \rightarrow C$ の局所自明化を考える。 p_i の周りでの $\varpi : V \rightarrow C$ の局所自明化は、 p_i の開近傍 U_i と $U_i \times T$ から $V|_{U_i}$ への同型 ϕ_i であって $\pi|_{\pi^{-1}U_i} \circ \phi_i = pr_1$ となるものの組 (U_i, ϕ_i) によって与えられる。 p_i のまわりの局所自明化 (U_i, ϕ_i) 、 (U'_i, ϕ'_i) にたいして、

$$(U_i, \phi_i) \sim (U'_i, \phi'_i) \iff \phi_i|_{U_i \cap U'_i} = \phi'_i|_{U_i \cap U'_i}$$

で同値関係が入る。

p_i の周りの局所自明化 (U_i, ϕ_i) を一つ固定し、 t_i を p_i を中心とする U_i の局所座標として U_i 内の p_i の開近傍 $D_i = \{t_i \mid |t_i| < \varepsilon\}$ をとり、各 $i = 1, 2, \dots, \ell$ に対して、 $\mathbb{C}^n$ の元 $\tilde{a}_i$ で $\text{ord}[\tilde{a}_i] = m_i$ ($[\tilde{a}_i] \in \mathbb{C}^n / \Lambda$) となるものをとるとき、これらに関して $\pi : V \rightarrow C$ の p_i での対数的変換は

$$\begin{aligned} & L_{[p_1, \phi_1]}(\tilde{a}_1, m_1) L_{[p_2, \phi_2]}(\tilde{a}_2, m_2) \dots L_{[p_\ell, \phi_\ell]}(\tilde{a}_\ell, m_\ell)(V) \\ &:= \prod_{i=1}^{\ell} (\widehat{D}_i \times T / \langle g_i \rangle) \bigcup_{\varphi_i} (V - \varpi^{-1}(\{p_1, p_2, \dots, p_\ell\})) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \widehat{D}_i := \{s_i \in \mathbb{C}; |s_i| < \varepsilon^{1/m_i}\} \\ g_i : (\widehat{D}_i \times E) \ni (s_i, [z]) \mapsto (\exp(2\pi\sqrt{-1}/m_i)s_i, [z + \tilde{a}_i]) \in (\widehat{D}_i \times E) \\ \varphi_i : (\widehat{D}_i^\times \times E)/\langle g_i \rangle \ni ((s_i, [z])) \mapsto (s_i^{m_i}, [z - \frac{m_i \tilde{a}_i}{2\pi\sqrt{-1}} \log(s_i)]) \in (D_i^\times \times E) \end{array} \right)$$

と定義される。 $L_{[p_1, \phi_1]}(\tilde{a}_1, m_1)L_{[p_2, \phi_2]}(\tilde{a}_2, m_2) \dots L_{[p_\ell, \phi_\ell]}(\tilde{a}_\ell, m_\ell)(V)$ は各 p_i 上に重複ファイバー $m_i T_i$ をもつ。

Remark 2.2. (1) 上の定義は p_i の周りの局所自明化の同値類にのみ依存し、局所座標のとり方にはよらない。

- (2) 自明なトーラス束 $pr_1 : C \times T \rightarrow C$ について、 (U_i, ϕ_i) を pr_1 の制限と自然にとるとき、これに関する対数的変換を $L_{p_1}(\tilde{a}_1, m_1)L_{p_2}(\tilde{a}_2, m_2) \dots L_{p_\ell}(\tilde{a}_\ell, m_\ell)(C \times T)$ とかくことにする。
- (3) すべての torus quasi bundle はある torus bundle に適当な対数的変換を施したものとして得られる。とくに、すべての principal torus quasi bundle は自明なトーラス束に適当な対数的変換を施したものとして得られる (Remark 2.4 参照)。
- (4) $\varpi : V \rightarrow C$ を étale principal T -bundle とする。このとき、 C の適当な有限エタール被覆 $\tilde{C}$ をとることにより、 $V \times_C \tilde{C}$ は principal なトーラス束となる。ここで、 $\tilde{C} \rightarrow C$ の被覆変換群を G とすると、 $\varpi : V \rightarrow C$ の対数的変換 $X = L_{[p, \phi]}(\tilde{a}, m)(V)$ の $\tilde{C}$ 上への引き戻しは次のように表せる。

$$\begin{array}{ccc} X = L_{[p, \phi]}(\tilde{a}, m)(V) & \xleftarrow{\text{étale}} & \tilde{X} = \prod_{\sigma \in G} L_{p_\sigma}(\tilde{a}\rho(\sigma), m) \prod_{k=1}^{\ell} L_{q_k}(\tilde{b}_k, 1)(\tilde{C} \times T) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ C & \xleftarrow{\text{étale}} & \tilde{C} \end{array}$$

(ただし、 $\tilde{p}_\sigma$ は $\tilde{C}$ における p のファイバーの点を表とし、 ρ は G の $GL(n, \mathbb{C})$ への適当な表現とする。)

- (5) $X = L_{p_1}(\tilde{a}_1, m_1)L_{p_2}(\tilde{a}_2, m_2) \dots L_{p_\ell}(\tilde{a}_\ell, m_\ell)(C \times T)$ は、その有限被覆として principal T -bundle がとれる。 $d = m_1 m_2 \dots m_\ell$, $m_0 = \text{lcm}(m_1, m_2, \dots, m_\ell)$ とする。 $C - \{p_1, p_2, \dots, p_\ell\}$ に点 p_0 をとり、 $\sigma : \tilde{C} \rightarrow C$ を p_i 上に重複度 m_i の分岐点を d/m_i 個もつ、 C の d -重アーベル被覆とする。 $\sigma^{-1}(p_i) =$

$\{\tilde{p}_i^{(j)}\}_{j=1,\dots,d/m_i}$ とおき、 $\tilde{X}$ を $X \times_C \tilde{C}$ の正規化とする。

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} & & \\
 \nu \downarrow \text{normalization} & & \\
 X \times_C \tilde{C} & \xrightarrow{p} & S \\
 q \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \tilde{C} & \xrightarrow{\sigma} & C.
 \end{array}$$

ここで $\tilde{\pi} = \nu \circ q$ とおけば、

$$\tilde{\pi} : \tilde{X} \cong \prod_{i,j} L_{\tilde{p}_i^{(j)}}(m_i \tilde{a}_i, 1)(\tilde{C} \times T) \rightarrow \tilde{C}$$

となる。

2.2. Höfer's observation

Riemann 面 C 上のファイバーが $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$ である principal torus bundle の同型類は、 $H^1(C, \mathcal{O}_C(T))$ の元と一対一の対応があり、しばしば与えられた principal torus bundle $\varpi : V \rightarrow C$ を対応する $H^1(C, \mathcal{O}_C(T))$ の元 η を用いて、 $V = (C \times T)^\eta$ と書く。次に述べる Höfer の結果によると $H^1(C, \mathcal{O}_C(T))$ の元はすべて対数的変換とみなすことが出来ることがわかる。

まず次のような可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{C} \otimes \Lambda & \xrightarrow{\exp(\cdot) \otimes \text{id}} & \mathbb{C}^\times \otimes \Lambda \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow = & & \downarrow \iota_C & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & T \longrightarrow 0
 \end{array}$$

真中の縦の写像は自然な inclusion $\iota : \Lambda \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ から誘導される写像である。右端の縦の写像は、 $\mathbb{C}^\times \otimes \Lambda$ の元 $z \otimes \tilde{a}$ に対し、 $[\log(z) \otimes \tilde{a}]$ を対応させる写像である。この可換図式から次の可換図式が導かれる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^1(C, \mathcal{O}_C) \otimes \Lambda & \longrightarrow & H^1(C, \mathcal{O}_C^\times) \otimes \Lambda & \xrightarrow{c_1 \otimes \text{id}} & H^2(C, \mathbb{Z}) \otimes \Lambda \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \iota_C & & \downarrow \Phi & & \downarrow \cong \\
 \dots & \longrightarrow & H^1(C, \mathcal{O}_C^n) & \longrightarrow & H^1(C, \mathcal{O}_C(T)) & \xrightarrow{c} & H^2(C, \Lambda) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

この図式から次のことが示される。

Proposition 2.3. [3] Φ は同型である。即ち、 $H^1(C, \mathcal{O}_C^\times) \otimes \Lambda \cong H^1(C, \mathcal{O}_C(T))$

Remark 2.4. Φ の作り方と対数的変換の定義を見比べることにより、 $\vec{a}_i \in \Lambda$ のとき、次のことが直ちに分かる。

$$(C \times T)^{\Phi(\sum_{i=1}^{\ell} [p_i] \otimes \vec{a}_i)} \cong L_{p_1}(\vec{a}_1, 1) L_{p_2}(\vec{a}_2, 1) \dots L_{p_\ell}(\vec{a}_\ell, 1)(C \times T)$$

さらに、このことと上の Proposition より、すべての principal torus bundle は自明なトーラス束に適当な重複度 1 の対数的変換を施したものとして得られることがわかる。

今後、記号の簡略化のため、対数的変換 $L_{p_1}(\vec{a}_1, 1) L_{p_2}(\vec{a}_2, 1) \dots L_{p_\ell}(\vec{a}_\ell, 1)(C \times T)$ を $(C \times T)^{\sum_{i=1}^{\ell} [p_i] \otimes \vec{a}_i}$ (Φ は省略する) と書くことにする。

3. Principal T -bundles の射影性判定法

*Remark 2.2*でも述べたように、étale principal quasi T -bundle は principal T -bundle による有限被覆をもつから、射影性を考える上では principal T -bundle の場合が本質的となる。そこで、この節では principal T -bundle の射影性判定法について述べることにする。

前節でも述べたが、Riemann 面 C 上の principal T -bundle の同型類は $H^1(C, \mathcal{O}_C(T))$ の元と一対一の対応があり、一般に $H^1(C, \mathcal{O}_C(T))$ の元 η を用いて $(C \times T)^\eta$ と書かれる。さらに前節の *Remark 2.4*により、ある C 上の点 p_i , $i = 1, 2, \dots, \ell$, および Λ の元 $\vec{a}_i$, $i = 1, 2, \dots, \ell$, が存在して、 $(C \times T)^\eta \cong (C \times T)^{\sum_{i=1}^{\ell} [p_i] \otimes \vec{a}_i}$ となる。

一般に Riemann 面 C 上の principal T -bundle について次のことが成立する。

Proposition 3.5. [2][3] $(C \times T)^\eta : \text{Kähler} \iff c(\eta) = 0$ 。

Proposition 3.6. [6] $(C \times T)^\eta : \text{projective} \iff \text{ord}(\eta) < +\infty$ 。

これら 2 つの命題を利用して、次の定理が証明できる。

Theorem 3.7. Riemann 面上の principal T -bundle $\pi : X = (C \times T)^{\sum_{i=1}^{\ell} [p_i] \otimes \vec{a}_i} \rightarrow C$ について次のことが成り立つ。

- (A) $X : \text{Kähler} \iff \sum_{i=1}^{\ell} \vec{a}_i = \vec{0}$ 。
- (B) T がアーベル多様体であるとき、次は同値。
 - (1) X は projective ,

$$(2) \exists \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in H^0(C, \Omega_C^1(\log \sum_{i=1}^{\ell} [p_i]))^{\oplus n} \text{ s.t.}$$

$$(i) \operatorname{Res}_{p_i} \xi = \frac{\bar{a}_i}{2\pi\sqrt{-1}},$$

$$(ii) \int_{\gamma} \xi \equiv \bar{0} \pmod{\mathbb{Q}\Lambda} \text{ for } \forall \gamma \in H_1(C, \mathbb{Z}),$$

$$(3) \sum_{i=1}^{\ell} [p_i] \otimes \bar{a}_i \in (J(C) \otimes \Lambda)_{\text{tor}}.$$

Proof. (A) $c(\sum_{i=1}^{\ell} [p_i] \otimes \bar{a}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \bar{a}_i$ より明らか。

(B)[(1) $\Leftrightarrow$ (2)] まず、(i) を満たす有理型一次形式の存在と $\sum_{i=1}^{\ell} \bar{a}_i = 0$ は同値であるから、(A) より X は Kähler 多様体と仮定してよい。そこで (i) を満たす有理型一次形式を一組とて固定して $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ とおくと、 $\bar{\theta}$ は $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(C, \mathbb{Z}), \mathbb{C}^n/\Lambda)$ の元 $\bar{\theta}^*$ を定める。

ここで次のようなコホモロジーの完全系列による可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & & & 0 & & \\
 & \searrow & & & \nearrow & & \\
 & & H^1(C, \Lambda) & \xrightarrow{j_*} & H^1(C, \mathcal{O}_C^{\oplus n}) & \xrightarrow{j_*} & H^1(C, \mathcal{O}(T)) \longrightarrow H^2(C, \Lambda) \\
 & & \downarrow i'_* & \circlearrowleft & \uparrow i'_* & & \\
 & & H^1(C, \mathbb{C}^n) & & & & \\
 & & \nearrow \delta' & & & & \\
 & & H^0(C, \Omega_C^1)^{\oplus n} & & & & \\
 & \nearrow & & & & & \\
 0 & & & & & &
 \end{array}$$

すると、 $\eta = \sum_{i=1}^{\ell} [p_i] \otimes \bar{a}_i$ に対してある $c \in H^1(C, \mathbb{C}^n)$ が存在して、 $j_* \circ i'_*(c) = \eta$ となる。Proposition 3.6 から X が射影的代数多様体となるための必要十分条件は η の位数が有限となることであつたから、このことと合わせると X が射影的代数多様体となるための必要十分条件は $c \in i'_* H^1(C, \Lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \pmod{\delta' H^0(C, \Omega_C^1)^n}$ であることが分かる。さらに実際、適当な $\bar{\omega} \in H^0(C, \Omega_C^1)^n$ をとれば、 $H^1(C, \mathbb{C}^n) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(C, \mathbb{Z}), \mathbb{C}^n)$ という同一視の下で

$$c \pmod{H^1(C, \Lambda)} \equiv (\bar{\theta} + \bar{\omega})^*$$

となることを示すことができ、定理の主張はこのことから容易に導かれる。

[(1) $\Leftrightarrow$ (3)] Proposition 2.3 および Proposition 3.6 より、 $\Phi(\sum_{i=1}^{\ell} [p_i] \otimes \bar{a}_i)$ の位数が有限であることと $\sum_{i=1}^{\ell} [p_i] \otimes \bar{a}_i \in (\operatorname{Pic}^0(C) \otimes \Lambda)_{\text{tor}}$ は同値であることがすぐわかる。□

4. Principal quasi T -bundles の射影性判定法

前節の Theorem 3.7 より、principal quasi T -bundles について次のことが成立する。

Theorem 4.8. $p_i, i = 1, 2, \dots, \ell$, を Riemann 面 C 上の点、 $\vec{a}_i$ を $\mathbb{Q}\Lambda$ の元、 $m_i = \text{ord} [\vec{a}_i]$ とする。このとき、 $\pi : X = L_{p_1}(\vec{a}_1, m_1) L_{p_2}(\vec{a}_2, m_2) \dots L_{p_\ell}(\vec{a}_\ell, m_\ell)(C \times T) \rightarrow C$ について次のことが成り立つ。

(A) $X : \text{Kähler} \iff \sum_{i=1}^{\ell} \vec{a}_i = \vec{0}$,

(B) T がアーベル多様体である時、次は同値。

(1) X は *projective* ,

(2) ${}^3\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in H^0(C, \Omega_C^1(\log \sum_{i=1}^{\ell} [p_i]))^{\oplus n}$ s.t.

(i) $\text{Res}_{p_i} \xi = \frac{\vec{a}_i}{2\pi\sqrt{-1}}$,

(ii) $\int_{\gamma} \xi \equiv \vec{0} \pmod{\mathbb{Q}\Lambda}$ for $\forall \gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})$,

(3) $\sum_{i=1}^{\ell} [p_i] \otimes \vec{a}_i \equiv \vec{0} \in J(C) \otimes \mathbb{Q}\Lambda$.

Proof. (A) Remark 2.2 から、 $\pi : X \rightarrow C$ は

$$\tilde{\pi} : \tilde{X} := \prod_{i,j} L_{\tilde{p}_i^{(j)}}(m_i \vec{a}_i, 1)(\tilde{C} \times A) \rightarrow \tilde{C}$$

という有限分岐被覆をもつ。[8] より X が Kähler 多様体であることと $\tilde{X}$ が Kähler 多様体であることは同値であるが、一方、Theorem 3.7 から $\tilde{X}$ が Kähler 多様体であるための必要十分条件は $\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{d/m_i} m_i \vec{a}_i = \vec{0}$ である。 $\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{d/m_i} m_i \vec{a}_i = m \sum_{i=1}^{\ell} \vec{a}_i$ であるから、これより主張を得る。

(B) [(1) $\iff$ (2)] $\tilde{X}$ が射影的代数多様体であるための必要十分条件は、Theorem 3.7 より次の (i)'、(ii)" の性質をみたす $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n) \in H^0(\tilde{C}, \Omega_{\tilde{C}}(\log \sum_{i=1}^{\ell} [p_i]))^{\oplus n}$ が存在することと同値である。

(i)' $\text{Res}_{p_i} \tilde{\xi} = \frac{m_i \vec{a}_i}{2\pi\sqrt{-1}}$,

(ii)" $\int_{\gamma} \tilde{\xi} \equiv \vec{0} \pmod{\mathbb{Q}\Lambda}$ for $\forall \gamma \in H_1(\tilde{C}, \mathbb{Z})$.

ここで、 X が射影的代数多様体であることと $\tilde{X}$ が射影的代数多様体であることが同値であるから、(i)、(ii) の性質をみたす C 上の有理一次形式の組 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ の存在と、(i)', (ii)" の性質をみたす $\tilde{C}$ 上の有理一次形式の組 $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n)$ の存在が同値であることを示せばよいが、これは実際、 $\sigma : \tilde{C} \rightarrow C$ に関して一方の pull-back あるいは trace をとることによって容易に示される。

[(2) $\Leftrightarrow$ (3)] (2) の有理一次形式はテータ関数を使って書くことが出来る。実際、 θ を $\theta(0) = 0$ 、 $d_z \theta(0) \neq 0$ となるような C の Jacobi 多様体のテータ関数とし (ただし、 z は C の Jacobi 多様体の普遍被覆の大域座標) とし、 $H^0(C, \Omega_C^1)$ の基底 $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ および $H_1(C, \mathbb{Z})$ の基底 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$ を $\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{ij}$ かつ、行列 $(\int_{\beta_i} \omega_j)$ が symmetric で $(\text{Im} \int_{\beta_i} \omega_j)$ が正定値となるようにとる。

$$\xi_{ji}(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\sum_{k=1}^i a_{kj} \right) d_x \log \frac{\theta(\int_x^{\beta_i} (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g))}{\theta(\int_x^{\beta_{i+1}} (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g))}$$

として $\xi_j(x) = \sum_{i=1}^{\ell-1} \xi_{ji}(x)$ とおけば、 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ は (2) の (i) を満たす。この ξ_j のテータ関数による表示を用いて (2) の (ii) を書き直せば (3) を得る。 $\square$

Corollary 4.9. $C = \mathbb{P}^1$ であるとき、 $X : \text{projective} \Leftrightarrow T$ がアーベル多様体でかつ $\sum_{i=1}^{\ell} \tilde{a}_i = \tilde{0}$ 。

Remark 4.10. (1) Theorem 4.8 (3) より、 X の射影性は対数的変換を施す点 p_i たちの位置関係に依存することが分かる。(cf. Example 6.15)

(2) Theorem 4.8 の (3) については、Höfer's observation を用いても示すことが出来る。 m を $m_1, m_2, \dots, m_{\ell}$ の最小公倍数とすると、 $\sum_{i=1}^{\ell} [p_i] \otimes \tilde{a}_i \in \text{Pic}(C) \otimes \frac{1}{m}\Lambda$ である。 $T' = \mathbb{C}^n / \frac{1}{m}\Lambda$ とすると、 $\Lambda \subset \frac{1}{m}\Lambda$ より $T \rightarrow T'$ が定まり、これにより

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{finite}} & X' = (C \times T')^{\sum_{i=1}^{\ell} [p_i] \otimes \tilde{a}_i} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{principal } T' \text{- bundle} \\ C & \xrightarrow{=} & C \end{array}$$

が得られ、 $X : \text{projective} \Leftrightarrow X' : \text{projective} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\ell} [p_i] \otimes \tilde{a}_i \equiv \tilde{0} \in \text{Pic}^0(C) \otimes \mathbb{Q}\Lambda \cong J(C) \otimes \mathbb{Q}\Lambda$ を得る。

Theorem 4.8 には m_i に関する条件が現れていないように見える。しかし、(A) の条件から m_i たちの間には次のように定義される条件 $\mathcal{U}_k$ を満たしてはいなくてはならないことが分かる。

Definition 4.11. $m_1, m_2, \dots, m_{\ell}$ を、すべての $i = 1, 2, \dots, \ell$ に対して $m_i \geq 2$ となるような整数とし、 $1 \leq k \leq \ell$ なる自然数 k を一つ固定する。ここで、 $n_k = 1$ か

つ $\sum_{i=1}^{\ell} n_i/m_i \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ となるような自然数 $n_1, n_2, \dots, n_{\ell}$ が存在するとき、数の組 $m_1, m_2, \dots, m_{\ell}$ は条件 $\mathcal{U}_k$ を満たすという。

さらに[1] にならって次のことを証明することが出来る。

Proposition 4.12. $f : X \rightarrow C$ を $\kappa(X) = 1$ であるような $(n+1, 1)$ -abelian fibre space とする。ここで、 K_X が f -nef かつ すべての重複ファイバー mF について $H^n(F, \mathcal{O}_F) = 0$ ならば、 $\phi_{|14K_X|} : X \rightarrow \mathbb{P}^{P_{14}(X)-1}$ は正則写像となり、 $f : X \rightarrow C$ は $\phi_{|14K_X|} : X \rightarrow \phi_{|14K_X|}(X)$ と同型である。

5. Étale principal quasi T -bundles の射影性判定法

$\pi : X \rightarrow C$ を Riemann 面 C 上の étale principal quasi T -bundle とすると、Remark 2.2 より、 X は適当な étale torus bundle $\varpi : V \rightarrow C$ に対数的変換を施したものとして表すことが出来る。

$$\pi : X = L_{[p_1, \phi_1]}(\vec{a}_1, m_1) L_{[p_2, \phi_2]}(\vec{a}_2, m_2) \dots L_{[p_{\ell}, \phi_{\ell}]}(\vec{a}_{\ell}, m_{\ell})(V) \rightarrow C$$

と書くと、 X は

$$\tilde{\pi} : \tilde{X} = \prod_{i=1}^{\ell} \prod_{\sigma \in G} L_{\tilde{p}_i^{\sigma}}(\vec{a}_i \rho(\sigma), m_i) \prod_{j=1}^k L_{q_j}(\vec{b}_j, 1)(\tilde{C} \times T) \rightarrow \tilde{C}$$

なる有限不分岐被覆を持つ。(各記号は Remark 2.2 の通りとする。)

ここで、前節の Theorem 4.8 より、次の定理が導かれる。

Theorem 5.13. $\varpi : V \rightarrow C$ を $H^0(C, \pi_* \Omega_{V/C}^1) = 0$ となる étale torus bundle とする。このとき、 $\pi : X \rightarrow C$ を $\varpi : V \rightarrow C$ の対数的変換とすると次のことが成立する。

- (1) X は Kähler 多様体。
- (2) とくに C が楕円曲線である時、 $X : \text{projective} \Leftrightarrow V : \text{projective}$ 。

Proof. (1) $X : \text{Kähler} \Leftrightarrow \tilde{X} : \text{Kähler} \Leftrightarrow \sum_{\sigma \in G, i} \vec{a}_i \rho(\sigma) + c(V \times_C \tilde{C}) = 0$ であるが、 $H^0(C, \pi_* \Omega_{V/C}^1) = 0$ であることより、 $\sum_{\sigma \in G, i} \vec{a}_i \rho(\sigma) + c(V \times_C \tilde{C}) = 0$ は常に成り立つ。

(2) C が楕円曲線かつ T がアーベル多様体である時、常に

$$\pi : X = L_{p_1}(\vec{a}_1, m_1) L_{p_2}(\vec{a}_2, m_2) \dots L_{p_{\ell}}(\vec{a}_{\ell}, m_{\ell})(\tilde{C} \times T) \rightarrow \tilde{C}$$

が射影的であることを示せばよいが、このとき、 G の元に適当な順序を入れれば、
 $\sum_{\sigma \in G, i} [\tilde{p}_i^\sigma] \otimes \tilde{a}_i \rho(\sigma) = \sum_i \sum_{j=1}^{|G|-1} [\tilde{p}_i^{\sigma_j} - \tilde{p}_i^{\sigma_{j+1}}] \otimes \tilde{a}_i \rho(\sigma) = 0 \in \text{Pic}^0(\tilde{C}) \otimes \mathbb{Q} \Lambda$ となる。 $\square$

Remark 5.14. 定理より、principal でない étale principal T -bundle は必ずしも T -bundle の対数的変換では書けないことが分かる。

6. Examples

étale principal quasi torus bundle の射影性判定についての定理 4.8, 5.13 は次のような例でみるとより分かりやすい。

Example 6.15. $E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ ($\text{Im } \tau > 0$) を楕円曲線, $A = \mathbb{C}^n/\Lambda$, $A_i = \mathbb{C}^n/\Lambda_i$ をアーベル多様体とする。

(1) $X = L_p(\tilde{a}, m)L_q(-\tilde{a}, m)(E_\tau \times A) \rightarrow E$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} X : \text{射影多様体} &\iff \tilde{a} \otimes (p - q) \in (E_\tau \otimes \frac{1}{m}\Lambda)_{\text{tor}} \\ &\iff \alpha(p - q), \beta(p - q) \in E_{\tau \text{tor}} \quad (a = \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{m}\tau; \alpha, \beta \in \mathbb{Z}) \\ &\iff p - q \in (E_\tau)_{\text{tor}} \end{aligned}$$

となる。

(2) $\varpi : V = (A \times E_\tau)/\langle g \rangle \rightarrow E_{\frac{\tau}{2}} \quad (g : (\vec{z}, w) \mapsto (-\vec{z}, w + \frac{\tau}{2}))$ とし、 $X = L_p(\tilde{a}, m)(V) \rightarrow E_{\frac{\tau}{2}}$ とすると、

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & \tilde{X} = L_{p_1}(\tilde{a}, m)L_{p_2}(-\tilde{a}, m)(A \times E_\tau) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{\frac{\tau}{2}} & \longleftarrow & E_\tau \end{array}$$

より $(p_i = [p + i\frac{\tau}{2}])$ 、

$$\begin{aligned} X : \text{射影多様体} &\iff \tilde{a} \otimes (p_1 - p_2) \in (E_\tau \otimes \frac{1}{m}\Lambda)_{\text{tor}} \\ &\iff p_1 - p_2 \in (E_\tau)_{\text{tor}} \end{aligned}$$

であるが、 $p_1 - p_2 = [\frac{\tau}{2}]$ より、 X は射影多様体。

(3) $\varpi : V = (A_1 \times A_2 \times E_\tau)/\langle g \rangle \rightarrow E_{\frac{\tau}{2}}$ ($g : (\bar{z}_1, \bar{z}_2, w) \mapsto (-\bar{z}, \bar{z}_2, w + \frac{\tau}{2})$) とし、
 $X = \prod_{i=1}^{\ell} L_{p_i}((\vec{a}_i, \vec{b}_i), m_i)(V) \rightarrow E_{\frac{\tau}{2}}$ とすると、

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & \widetilde{X} = L_{p_i^{(1)}}((\vec{a}_i, \vec{b}_i), m_i) L_{p_i^{(2)}}((-\vec{a}_i, \vec{b}_i), m_i)(A_i \times A_2 \times E_\tau) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{\frac{\tau}{2}} & \longleftarrow & E_\tau \end{array}$$

より $(p_i^{(j)} = [p_i + j\frac{\tau}{2}])$ 、

$$X: \text{Kähler} \iff \sum_{i=1}^{\ell} \vec{b}_i = 0$$

$$X: \text{projective} \iff \sum_{i=1}^{\ell} \vec{b}_i \otimes (p_i^{(1)} + p_i^{(2)}) \equiv \vec{0} \in E_\tau \otimes \mathbb{Q}\Lambda$$

となる。

REFERENCES

1. R. Aerdts, *Fibre spaces of abelian surfaces over curves*, Thesis, State Univ. of Utrecht, (1986),
2. A. Blanchard, *Espaces fibrés kählériens compacts*, C. R. Acad. Sci. **238** (1954) pp. 2281–2283.
3. T. Höfer, *Remarks on torus principal bundles*, Math. Kyoto Univ. **33** (1993), pp. 227–259.
4. T. Katsura and K. Ueno, *On elliptic surfaces in characteristic p* , Math. Ann. **272** (1985), pp. 291–330.
5. M. Kawazoe, *A criterion for algebraicity of certain analytic elliptic surfaces*, to appear in Math. Ann. ,
6. ———, *Projectivity of Torus Fibre Spaces over Curves and Multiple Fibres*, to appear in Intern. J. Math. ,
7. K. Kodaira, *On compact complex analytic surfaces II, III*, Ann. Math. **77** (1963), pp. 563–626, **78** (1963), pp. 1–40.
8. Y. Miyaoka, *Extension theorems for Kähler metrics*, Proc. Japan. Acad. **50** (1974) pp. 407–410.
9. K. Ueno, *Geometry of torus quasi bundles over curves*, preprint.