

Fat Fractals in Quantum Chaos

福岡工大・教養 中村勝弘

古典的に非可積分な系の量子的記述という研究分野(量子カオス)は、最近、著しく興味が持たれている分野の一つである。再帰性のない軌道の量子化の問題は、切論のこと、波動関数のフラクタルな性質、又、期待値の $\hbar \rightarrow 0$ の Scaling 則などは、「量子力学の基」の観点から見て、未だの問題を秘めており、大変重要な諸問題となっている。

Hamilton 力学系で、カオスを示す系は、2つのカテゴリーに分かれる。一つは、特異な境界条件がひきおこす一粒子のエルゴディックな運動を内包する系で、スタディムやシンのビリヤード、金属表面の凹凸に散乱する電子のサイクロトロン運動などが挙げできる。もう一つは、境界条件は normal (例えば、周期境界条件) であるが、複数粒子系の非線形相互作用によりカオスが生じる系で、Henon-Heiles 系や Fermi-Pasta-Ulam 系、3 spin 系などが挙げできる。以上は、自励系であるが、可積分系に、時間依存する外場を作用せよと(非自励系にすると)、カオスが生ずる。これは、次のカテゴリーに属すると言えよう。例としては、Kicked rotor, driven-Sine-Gordon 系, driven-planar spin 系があげられる。

Hamilton 系カオスのおもしろさは、内的乱れ(random exchange)や外的乱れ(impurity)などを動員しなくても、体系自体の決定論的法則で、ergodicity を生じるところにある。特に、量子chaosになると、Anderson 局在や整数量子 Hall 効果にみられる波動関数の局在・非局在転移にほぼ類似の事態が「外的な乱れ」の媒介なしに出現し、具体的問題への応用が、焦眉の課題となりつつある。

さて、ここでは、上記の次のカテゴリーに属する自励的な 3 個の spin 系を例にとり、時間に依存しない波動関数(stationary states)パターンのスケール依存性を考察し、その乱れを定量的に記述することをめざす。交換相互作用で結合した、この spin 系は、最近、典型的な古典カオス系であることが示され、その量子的記述も始まっている。⁽¹⁾ この系のメリットは、量子論において、スピンが大きすぎ(〜 $\hbar^{-1}$) を大きくしていても、つねに有限次元の Hilbert 空間を与えることができることにある。

図 1 には、波数 $k=0$, parity = +1, 全磁化 $T^z = \frac{1}{2}$ の manifold に属するエネルギー準位図が書いている。 σ ($0 \leq -\sigma \leq 1$) は、非可積分 parameter で、交換相互作用における異相性をあらわす。 $\sigma=0, -1$ はそれぞれ、Hersenberg と XY model に対応する。エネルギーの局所曲率 $d^2E/d\sigma^2$ の (エネルギー軸にそった) ゆらぎ及び、その scaling 則 ($\hbar \rightarrow 0$ の時) が量子chaosのよい indicator であることは、最近、示された。⁽²⁾ ここでは、図中に記入してある 2 種類のエネルギー領域で、波動関数(これは、上の manifold の中ではすべて実数である)を調べる。 $R_{2,3}$ ($\sigma=-0.3$) 領域は、highly ergodic で、 R_1 ($\sigma=-0.3$) 領域は、weakly ergodic、又、 R_4 ($\sigma=-0.3$) と R_{-4} ($\sigma=0.0$)

では、それぞれ、古典KAMと
周期軌道が支配的である。(1)

波動関数 ψ は、2次元の
位相空間 $\vec{m} = (M_1/s, M_2/s)$
で表示される。 $M_i (i=1 \sim 3)$ は
個々の量子 spin の z-成分で
ある。 M_3 は $T^2 = \sum_{i=1}^3 M_i = \frac{1}{2}$
で定まる。 $\psi(\vec{m})$ の 3次元
picture は定量的記述には
有効ではない。そこで、 $\psi(\vec{m})$
を $\vec{m}$ 平面に射影して見える
スケールに依存した binary
pattern をつくる。つまり、
線形の粗視スケール ε に対
して、正方形状の $\varepsilon \times \varepsilon$ の
mesh $A(\varepsilon)$ を位置 $\vec{m}$ の
回りに考え、

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\vec{m} \in A(\varepsilon)} \psi(\vec{m}) d\vec{m} \geq h$$

を満たす時、その mesh に +1
を与え、さもなければ -1 を与える。
 $\vec{m}$ 平面上的すべての mesh に
対して、この操作をおこなうこと

により、分解能 ε での 2次元 binary pattern ができる。 $\varepsilon = 2^{n-1} \varepsilon_0$ ($n=1, 2, 3, \dots$)
と scale を変えるが ε_0 はあるスケールで $\varepsilon_0 = \frac{1}{2s}$ である。 h は波動関数の
"cross-section" の scale に依存しない高さで $h_c = \nu \cdot \sqrt{N}$ である。 N, ν はそれぞれ、
Hilbert 空間の次元、適当な小数因子である。

量子・古典 ergodicity は図1の各エネルギー区間で平均された意味で考察されてきた。(1)
そこで、ここでは、上の 2次元 binary pattern ψ_ε (これは、それぞれ、個々の energy eigenvalue
に対応する) を各エネルギー区間で平均化する ($\bar{\psi}_\varepsilon$)。 (2) 図2は、 $S=32\frac{1}{2}$ ($N=561$)
の時、パターンがスケール依存性 ($\varepsilon = 2^{n-1} \varepsilon_0$, $n=1 \sim 3$) をあらわす。左側は $\sigma=0.0$ で、右側は、
 $\sigma=-0.3$ に対応する。 $\nu=-0.04$ を採用している。これは、波動関数の位相が $+\pi$ から $-\pi$ へ、あるいは
 $-\pi$ から $+\pi$ へ変化する "cross-section" を採用したことを意味する。尚、図2に対応するエネルギー
領域は $R_2(\sigma)$ である。最小のスケール ε_0 に軌着している限り、 $R_2(\sigma=0.0)$ と $R_2(\sigma=-0.3)$ とでパターン
にはほとんど差異はない。しかし、スケールを $\varepsilon = \dots \rightarrow 2^2 \varepsilon_0 \rightarrow 2 \varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0$ と減少させた時のパターンの変化
を見ると、 $\sigma=0.0$ の時は、+ (黒) 領域の面積、つまり、ルベグ測度は、 mild に減少するの

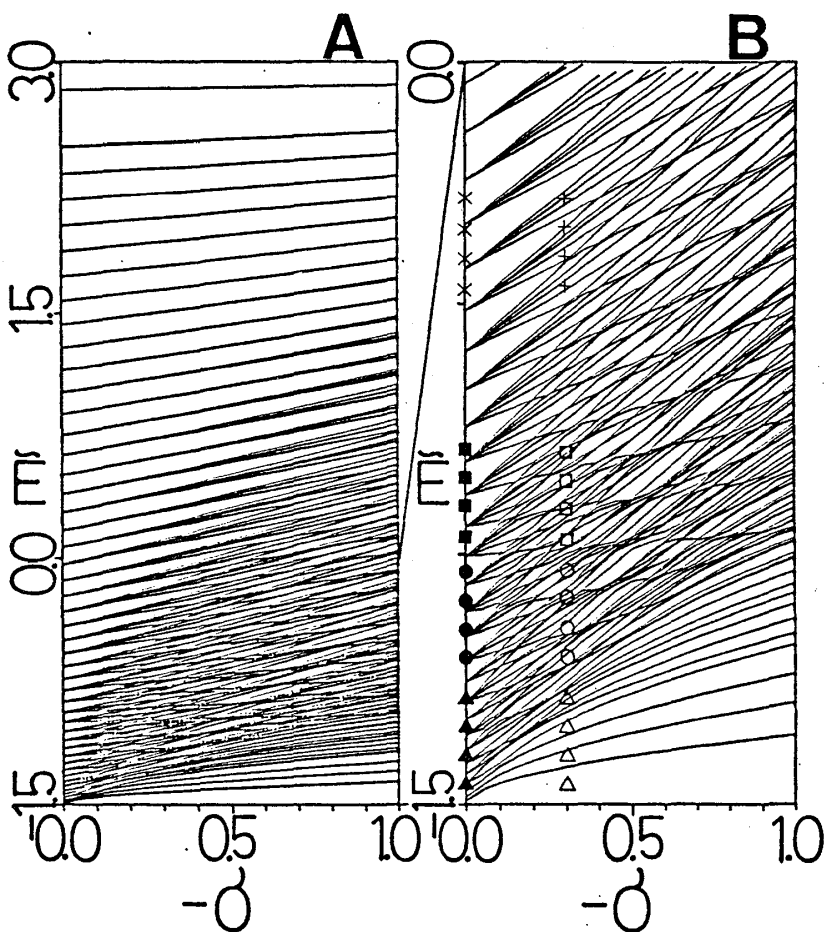


図1. エネルギー準位の σ 依存性 ($S=16\frac{1}{2}$).
 $\bar{E} = E/(S+1)$. (B) は拡大図。 $\triangle(\Delta)$, $\bullet(\circ)$, $\blacksquare(\square)$, $\times(+)$ は、
それぞれ、領域 $R_1(\sigma)$ $-1.50 \leq \bar{E} \leq -1.25$, $R_2(\sigma)$ $-1.25 \leq \bar{E} \leq -1.0$,
 $R_3(\sigma)$ $-1.0 \leq \bar{E} \leq -0.75$, $R_4(\sigma)$ $-0.55 \leq \bar{E} \leq -0.25$ に対応。黒記号と $\times$
は $\sigma=0.0$, 白記号と $+$ は $\sigma=-0.3$.

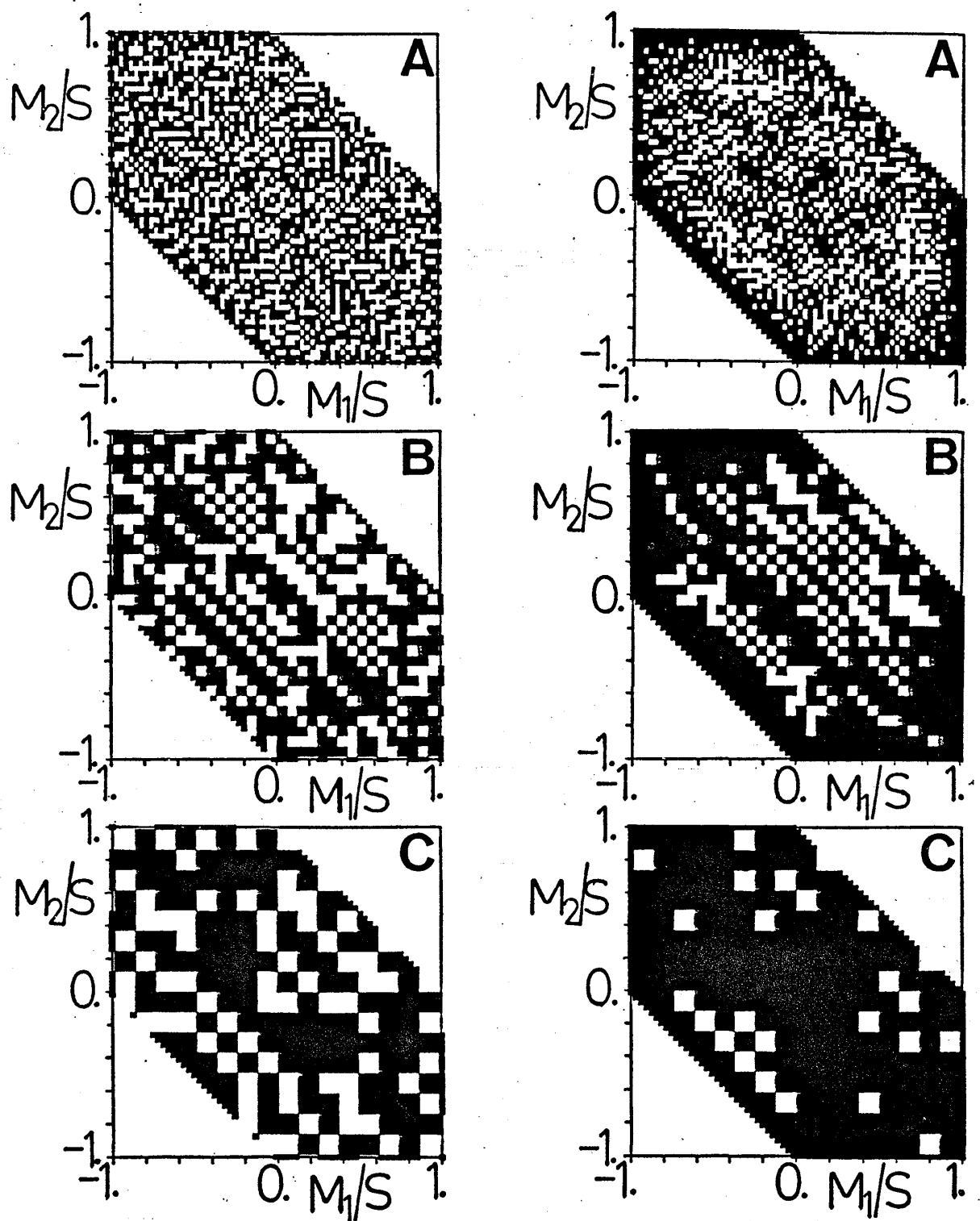


図 2. 平均化した binary pattern $\bar{I}_{\epsilon}$ の ϵ 依存性.

$S = 32 \frac{1}{2}$. (A) $\epsilon = \epsilon_0$, (B) $\epsilon = 2\epsilon_0$, (C) $\epsilon = 2^2\epsilon_0$.

左側パズルは $\sigma = 0.0$, 右側パズルは $\sigma = -0.3$. 黒と白は位相 $+1, -1$ に各々対応する. 位相空間 $(\bar{m})$ は $|\frac{1}{2} - (M_1 + M_2)|/S \leq 1$ に制限されている. ($T^2 = \frac{1}{2} \sigma T^2$.)

すなわち、 $\sigma = -0.3$ の時は、スケールが $2\varepsilon_0$ から ε_0 に変るとき、劇的にルベグ測度が減少し、大きなスケールから $2\varepsilon_0$ のスケールまでは、あまり減少しない。このようなルベグ測度 (以下、L.M. と略す) のスケール依存性における差異は、 $\sigma = -0.3$ の時の irregular 波動関数係数は、他のスケールでしか、その fine structure が顔をたさないことによる。

L.M. の ε 依存性を定量的に示したものが、図3である。上の劇的な評論と一致して、 $\sigma = 0.09$ の時は、内挿曲線は下に凸な単調増加曲線である。 $\sigma = -0.3$ の時は、特に $R_2(\sigma)$, $R_3(\sigma)$ の領域では、上に凸な曲線となり、 $\varepsilon = 0$ の近くでの singularity がうかがえる。

伝統的な fractal は $\varepsilon \rightarrow 0$ で L.M. $\rightarrow 0$ の仮定を前提としているので、全く無力である。fat fractal scaling 則⁽²⁾

$d \ln(\mu(\varepsilon) - \mu(0)) / d \ln \varepsilon = \beta$ が、その代用として有効である。図3の結果は、この scaling 則によく fit し、 β の値は図4の $S=32.5$ の値になる。 $\beta < 1$ が chaos に対応し、 $\beta \geq 1$ が KAM と周期軌道に対応する。 S を小さくすると、このような結論が明確にでないことも図4からわかる。

[文献]

- (1) K. Nakamura et al: P.R.L. 54, 861 (1985);
K. Nakamura & A.R. Bishop: P.R.B33, No.1 (1986)
- (2) K. Nakamura et al: to be published.
(preprint)

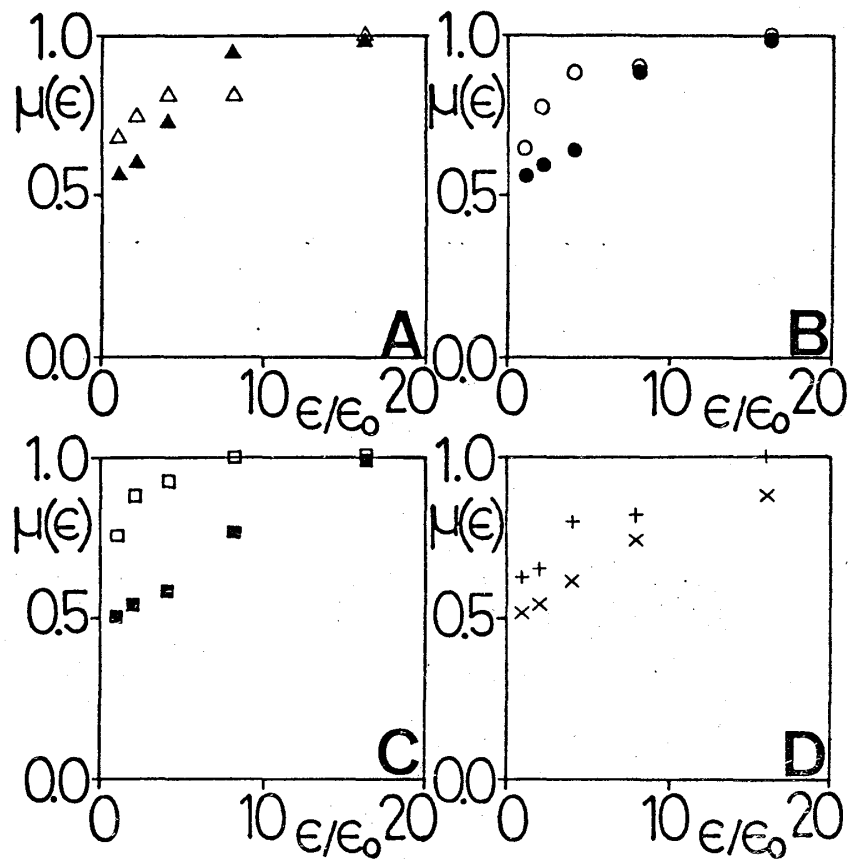


図3 (上図). ルベグ測度 $\mu(\varepsilon)$ の ε 依存性. (A) $R_1(\sigma)$, (B) $R_2(\sigma)$, (C) $R_3(\sigma)$, (D) $R_4(\sigma)$. 記号の意味は図1と同一。

図4 (下図). fat fractal exponent β の S 依存性. 記号の意味は図1と同一。

