

Hasse-Weil L 関数の岩澤理論の構想

東京工業大学 加藤和也 (Kazuya Kato)

様々の種類の zeta 関数の, 整数点での値の, 数論的な意味を知ることは, 数論の重要な主題である。岩澤理論は, 部分 Riemann zeta 関数の整数点での値を, 円分体の ideal 類群と結びつけるもので, 部分 Riemann zeta 関数の値の数論的意味についての, 現在考えられる最高の理論である。任意の Hasse-Weil L 関数についてもこのような岩澤理論を展開することは, 数論における最も大きな夢の一つであると言えるであろう。

志村五郎氏の言葉(「数字」13号, 「保型形式と整数論Ⅱ」)

「整数論いたる所 zeta 関数あり」

に今,

「zeta 関数ある所 岩澤理論あり」

と続けたい。

本稿では, Fontaine, Faltings 他の人々によって近年発展させられた p 進 Hodge 理論 (p 進 period の理論) を局所理論として, 「任意の Hasse-Weil L 関数の岩澤 main conjecture」を定式化する。

る。ここに述べる一般化された岩澤 main conjecture は, Bloch との共同研究 (Grothendieck 記念号) にもとづき, Fontaine と Perrin-Riou の idea もとり入れたもので, Deligne 予想, Beilinson 予想, 古典的岩澤 main conjecture 等, zeta 関数 L 関数の値についての, 知られている大多数の予想を含む。

§ 1. 円単数は zeta の化身

$$1 - \alpha \quad (\alpha \text{ は } 1 \text{ の } N \text{ 乗根, } \alpha \neq 1)$$

を円単数と呼ぶ。(実際は $1 - \alpha$ は α の位数が素数中ではない時に限り「単数」であり, 位数が素数 p の中なら $\mathbb{Z}[\alpha, \frac{1}{p}]$ の可逆元でしかないのだが, 簡単のため円単数, と呼んだ。)

円単数の絶対値の $\log$ をとると, zeta の値が次のようにあらわれる: $\alpha = \exp(\frac{2\pi i a}{N})$, $(a, N) = 1$ とおくと,

$$\log |1 - \alpha| = - \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} (\zeta_{\equiv a(N)}(s) + \zeta_{\equiv -a(N)}(s)).$$

ここは

$$\zeta_{\equiv a(N)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv a \pmod{N}}} \frac{1}{n^s}$$

は部分 Riemann zeta 関数と呼ばれ, $\operatorname{Re}(s) > 1$ で絶対収束し, ①全体へ解析接続されて $s = 1$ 以外で正則である。

円単数はこれ以外にもさまざまな仕方で zeta の値と関係す

る。 α の位数を N とし $p^n | N$ とし $m = p^{-n}N$ とおくととき,

$u \in \mathbb{Z}_p[\alpha]^\times$ に対し, 1 の原始 p^n 乗根 α^m を用いた Hilbert

symbol $(1-\alpha, u) \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の値は,

$$\text{Trace}_{\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p} \left(\left(\frac{1}{2\pi i} (\zeta_{\alpha(N)}(u) - \zeta_{-\alpha(N)}(u)) \right) \log(u) \right) \quad \left(\begin{array}{l} \log \text{ は} \\ p\text{-進} \log \end{array} \right)$$

の mod p^n に等しい。また円単数の p -進 $\log$ をとると, 部分

p -進 Riemann zeta 関数の $s=1$ での値があらわれる。

このようなことから, 円単数は zeta の化身であると言える。少なくとも, zeta の精がこりかたまってできたものであることは疑えない。 ($\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ でも, $\mathbb{Q}_p$ 上でも, ゼータに関係する, という離れわざ) は, ゼータの化身なればこそないうることである。

円単数は岩澤理論において次のように重要な役割を演ずる。

p を素数とし, 簡単のため $p \neq 2$ とする。 $n \geq 1$ に対し 1 の原始 p^n 乗根 β_n を, $\beta_{n+1}^p = \beta_n$ がみたされるようにとる。

$C_n = \mathbb{Q}(\beta_n)$ の ideal 類群の p 巾部分

$$C = \varprojlim_n C_n \quad (\text{逆系は 1 ルム写像 } C_{n+1} \rightarrow C_n \text{ について})$$

$$\Lambda = \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\text{Gal}(\mathbb{Q}(\beta_n)/\mathbb{Q})]$$

とおく。 C は Λ 加群とみなせる。 $\mathbb{Z}[\beta_n, \frac{1}{p}]^\times$ を $\mathbb{Z}[\beta_n, \frac{1}{p}]$ の可逆元全体の乗法群とし,

$$E = \varprojlim_n (\mathbb{Z}_p[\beta_n, \frac{1}{p}]^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p) \quad (\text{逆系は 1 ルムについて})$$

とおく。 E も Λ 加群である 最後

$$z = (1-\beta_n)_n \in E$$

とおく。 $(1-\beta_{n+1}) \in \mathbb{Z}_p[\beta_{n+1}, \frac{1}{p}]^\times$ の $\mathbb{Z}_p[\beta_n, \frac{1}{p}]^\times$ への 1 ルムは $1-\beta_n$ である。

さて Λ は 2 次元の正則半局所環であり, $\mathbb{C}$ 及び $E/\Lambda\mathbb{Z}$ は, ともに有限生成 Λ 加群であり (「 Λ のある非零因子によって零化されることを意味する」), Mazur-Wiles

によって証明された岩澤 main conjecture は

$$\text{length}_{\Lambda_p}(C_p) = \text{length}_{\Lambda_p}(E/\Lambda\mathbb{Z})_p$$

が Λ のすべての高さ 1 の素 ideal $\mathfrak{p}$ について成立することである。

以上まとめると, 円単数は部分 Riemann zeta の化身であって, しかも classical な岩澤 main conjecture は円単数にもとづいて述べられる。

本稿に述べる「Hasse-Weil L 関数の岩澤 main conjecture」の主張する所は, すべての Hasse-Weil L 関数が, 「円単数」のごとき「zeta の化身」を有するということである。さらには, これらの「化身」は, 大域体のすべての p 進 Galois 表現 (モチーフから来るとは限らない) に対しても定義されるということである。「化身」はどこに定義されるのかというと, それは, 「その p 進 Galois 表現に対応する p 進層の cohomology の, determinant 加群」の生成元として存在しているはずなのである。

以下では素数 p を固定し, 簡単のため $p \neq 2$ とする。

§2. 準備

一般化された岩澤 main conjecture を述べるための準備をおこなう。

(2.1) perfect complex. Λ を可換環とする。 $D(\Lambda)$ で、 Λ 加群の圏の導来圏をあらわす。 Λ 上の perfect complex とは、 $D(\Lambda)$ の対象であって、有限生成射影 Λ 加群の有限複体で代表されるもののことである。

(2.2) determinant 加群. Λ を可換環とし、 P を Λ 上の perfect complex とするとき、 P の determinant 加群と呼ばれる可逆 Λ 加群 $\det_{\Lambda} P$ が定義される。

例えば、もし P が rank r の有限生成自由 Λ 加群を、 degree m の所においたものとするとき、 $\det_{\Lambda} P$ は、 m が偶数の時は P の Λ 上の r 次外積加群であり、 m が奇数の時はその逆加群である。

$$0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$$

が Λ 加群の複体の exact sequence で、 C, C', C'' がどれも $D(\Lambda)$ の中でみて perfect complex である時、標準同型

$$(2.2.1) \quad \det_{\Lambda}(C) \cong \det_{\Lambda}(C') \otimes_{\Lambda} \det_{\Lambda}(C'')$$

が与えられる。

(2.3) 以下では次の (a) (b) のいずれかをみたす可換環 Λ を考える.

(a) Λ は完備ネーター半局所環で, Λ の任意の極大 ideal の剰余体は標数 p の有限体である.

(b) Λ は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体の有限個の直積に同型.

(2.4) Λ を (2.3) のような環とし, X を $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 上の有限型の scheme とする時, 圏 $D_{\text{ctf}}(X, \Lambda)$ を次のように定義する.

(1) Λ が有限環の時, $D(X, \Lambda)$ を étale site $X_{\text{ét}}$ 上の Λ 加群の層の圏の導来圏とし, $D_{\text{ctf}}(X, \Lambda)$ を, 次の条件 (i) (ii) をみたす $D(X, \Lambda)$ の対象 F 全体からなる, $D(X, \Lambda)$ の full subcategory と定義する.

(i) cohomology 層 $\mathcal{H}^q(F)$ は, ほとんどすべての q について零であり, すべての q について constructible である.

(ii) すべての $x \in X$ に対し stalk $F_{\bar{x}}$ は, Λ 上の perfect complex である.

(2) Λ が (2.3) (a) をみたす環の時, $D_{\text{ctf}}(X, \Lambda)$ を次のように定義する. Σ を, Λ/I が有限環となる Λ の ideal I 全体の集合とする. $D_{\text{ctf}}(X, \Lambda)$ の対象とは, 各 $I \in \Sigma$ に対して $D_{\text{ctf}}(X, \Lambda/I)$ (すでに (1) で定義したもの) の対象 F_I を与え, $I, J \in \Sigma$ で $J \subset I$ の時, 同型 $\rho_{I,J} : F_J \otimes_{\Lambda/J}^L \Lambda/I \xrightarrow{\sim} F_I$ ($\otimes^L$ は導来圏におけるテンソル積) を与える system であり,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{I,I} \text{ は恒等射,} \\ I, I', I'' \in \Sigma \text{ で } I \subset I' \subset I'' \text{ なら } \rho_{I,I''} = \rho_{I,I'} \circ \rho_{I',I''} \end{array} \right.$$

をみたすもののことである。

(3) Λ が (2.3)(b) をみたす環の時, $D_{\text{ctf}}(X, \Lambda) = D_{\text{ctf}}(X, \mathcal{O}_\Lambda) \otimes \mathbb{Q}$ と定義する。こゝに $\mathcal{O}_\Lambda$ は, $\Lambda = \prod_{i=1}^r F_i$, F_i は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大, $\mathcal{O}_i$ を F_i の整数環とした時, $\mathcal{O}_\Lambda = \prod_{i=1}^r \mathcal{O}_i$ と定義する。つまり, $D_{\text{ctf}}(X, \Lambda)$ は, 対象が $D_{\text{ctf}}(X, \mathcal{O}_\Lambda)$ と同じ, Hom が,

$(D_{\text{ctf}}(X, \mathcal{O}_\Lambda) \text{ における Hom }) \otimes \mathbb{Q}$ と定義したものである。

(2.5) 以下では, 次のような三つ組 (X, Λ, F) を考える。

$$\left\{ \begin{array}{l} X \text{ は } \mathbb{Z}[\frac{1}{p}] \text{ 上の有限型 scheme,} \\ \Lambda \text{ は (2.3) の条件をみたす環,} \\ F \text{ は } D_{\text{ctf}}(X, \Lambda) \text{ の対象.} \end{array} \right.$$

この時, $R\Gamma(X, F)$, $R\Gamma(X \otimes \mathbb{R}, F)$ は, ともに Λ 上の perfect complex であることが証明できる。

$$\Delta_\Lambda(X, F) = (\det_\Lambda R\Gamma(X, F))^{-1} \otimes_\Lambda (\det_\Lambda R\Gamma(X \otimes \mathbb{R}, F(-1)))^{-1}$$
 と定義する。

§3. 一般化された岩澤 main conjecture.

次の予想 (3.1) が 一般化された岩澤 main conjecture である。

その中の条件 (v) は, 正確に述べきれなかった。

予想 (3.1). (2.5) に述べたようなすべての三つ組 $(X, \wedge, F)$ に対し, 可逆 $\wedge$ 加群 $\Delta_{\wedge}(X, F)$ の生成元 $z_{\wedge}(X, F)$ を与えて, 次の (i)-(vi) が成立するようにすることが可能である。

(i) $(X, \wedge, F), (X, \wedge', F')$ がともに (2.5) に述べたような三つ組 (X は共通) で, 環準同型 $\wedge' \rightarrow \wedge$ と, $D_{\text{ctf}}(X, \wedge)$ における同型 $h: F \otimes_{\wedge'}^L \wedge \xrightarrow{\sim} F$ がある時, h によって導かれる同型 $\Delta_{\wedge'}(X, F') \otimes_{\wedge'}^L \wedge \xrightarrow{\sim} \Delta_{\wedge}(X, F)$ は $z_{\wedge'}(X, F') \otimes 1$ を $z_{\wedge}(X, F)$ にうつす。

(ここで $\wedge'$ が (2.3)(a) をみたし, $\wedge$ が (2.3)(b) をみたすという事態も許す。)

(ii) $X, \wedge$ は (2.5) にあるとありとし,

$$0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$$

は, X_{et} 上の $\wedge$ 加群の層の複体の完全列で, F, F', F'' は導来圏の中でみて, $D_{\text{ctf}}(X, \wedge)$ に属するとする。この時, この完全列から導かれる同型

$$\Delta_{\wedge}(X, F) \cong \Delta_{\wedge}(X, F') \otimes_{\wedge} \Delta_{\wedge}(X, F'') \quad ((2.2.1) \text{ による})$$

は, $z_{\wedge}(X, F)$ を $z_{\wedge}(X, F') \otimes z_{\wedge}(X, F'')$ にうつす。

(iii) $(X, \wedge, F)$ は (2.5) にあるとあり, Y は $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 上の scheme で, $f: X \rightarrow Y$ を morphism とする。この時, 同型

$$\Delta_{\wedge}(X, F) \cong \Delta_{\wedge}(Y, Rf_* F)$$

は $z_{\wedge}(X, F)$ を $z_{\wedge}(Y, Rf_* F)$ に移す。

(iv) (X, Λ, F) を (2.5) のとおりとし, X は素数 $l \neq p$ について $\mathbb{F}_l$ 上の scheme であるとする。この時, $z_\Lambda(X, F)$ は次のように定義される。 $F \rightarrow I$ を F の移入分解とすると完全系列

$$0 \rightarrow \Gamma(X, I) \rightarrow \Gamma(X \otimes_{\mathbb{F}_l} \overline{\mathbb{F}_l}, I) \xrightarrow{1-\varphi} \Gamma(X \otimes_{\mathbb{F}_l} \overline{\mathbb{F}_l}, I) \rightarrow 0$$

($\varphi \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_l}/\mathbb{F}_l)$ は Frobenius 置換) から, 同型

$$\det_\Lambda \Gamma(X \otimes_{\mathbb{F}_l} \overline{\mathbb{F}_l}, I) \cong (\det_\Lambda \Gamma(X, I)) \otimes_\Lambda (\det_\Lambda \Gamma(X \otimes_{\mathbb{F}_l} \overline{\mathbb{F}_l}, I))$$

を得るが, ここから $\det_\Lambda \Gamma(X \otimes_{\mathbb{F}_l} \overline{\mathbb{F}_l}, I)$ を cancell して,

$$\Lambda \cong \det_\Lambda \Gamma(X, I) = \det_\Lambda R\Gamma(X, F)$$

が得られる。(この最後の同型は移入分解のとり方によらない)

$z_\Lambda(X, F) \in \Delta_\Lambda(X, F)$ は, この同型による $1 \in \Lambda$ の $\det_\Lambda R\Gamma(X, F)$ への像の逆元 $\in (\det_\Lambda R\Gamma(X, F))^{-1} = \Delta_\Lambda(X, F)$ である。

(v) (zeta の値との関係。もっと詳しいことを (3.3) に述べる。) A を可換環で, $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体の有限個の直積になっているものとし, M を $\mathbb{Q}$ 上の A 係数モチーフとする。(A 係数モチーフとは, A が作用しているモチーフのこと。) M_p を M の p 進 étale realization, X を $S_{\text{pec}}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ の空でない開集合で M_p が X 上で不分岐なるものとし, $\Lambda = A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ とおく。すると (X, Λ, M_p) は (2.5) をみたすか, $z_\Lambda(X, M_p)$ は $M^*(1)$ の A 係数 zeta 関数 ((3.2) 参照) の値と関係し, その関係によって特徴づけられる ((3.3) 参照)。

ここには $M^*(1)$ は, M の双対モチーフ $\underline{\text{Hom}}_A(M, A) \cong \underline{\text{Hom}}(M, \mathbb{Q})$

を1回 Tate twist したもの。

(3.2) (3.1)の条件(v)の補足説明として, まず A 係数 zeta 関数を論ずる。 A を可換環で, $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体の有限個の直積であるとし, $\Lambda = A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ とし, この Λ について (X, Λ, F) を (2.5) のとおりとし, 更に F は X 上の A 係数モチーフ M の p 進 étale realization であるとする。この時, M の X 上の A 係数 zeta 関数 $\zeta_A(X, M, s)$ は次のものである。

X の各閉点 x に対し多項式 $P_x(t)$ を

$$P_x(t) = \det_{\Lambda} (1 - \varphi_x^{-1} t; F_{\bar{x}}) \in \Lambda[t]$$

(φ_x は x の Frobenius 置換) と定義する。 $P_x(t) \in A[t]$ と予想される。

$$\zeta_A(X; M, s) = \prod_x P_x(N(x)^{-s})^{-1}$$

(x は X の閉点を走り, $N(x)$ は x の剰余体の元の個数) と定義される。これは $\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続されようと考えられる。

(3.3) (3.1)の条件(v)における $\zeta_{\Lambda}(X, M_p)$ と $\zeta_A(X, M^*(1), s)$ との関係も, もう少し詳しく説明する。

M を $\mathbb{Q}$ 上のモチーフとすると, M の Betti realization M_B , M の de Rham realization M_{dR} という有限次元 $\mathbb{Q}$ -vector space が定まり, M_B には $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ が作用し (その $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ -fixed part を M_B^+ と書く), M_{dR} は 降 filtration $(M_{dR}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ をもつ。

X, A, M を (3.1) (v) のとおりとする。説明を略すか、 K 理論から定まる可逆 A 加群 $\Delta'_A(X, M)$ が定まり、

$$\Delta_A(X, M) = \det_A(M|_R^0) \otimes_A \det_A(M(-1)_B^+)^{-1} \otimes_A \Delta'_A(X, M)$$

とあくと、

$$(3.3.1) \quad \Delta_A(X, M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

$$(3.3.2) \quad \Delta_A(X, M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong \Delta_{\wedge}(X, M_p)$$

が、(3.3.1) は、Hodge 理論、 K 群の regulator map, height pairing を用いて与えられ、(3.3.2) は、 p 進 Hodge 理論、 K 群の p 進 etale chern class map, $M(-1)_B^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong R\Gamma(\mathbb{R}, M(-1)_p)$ を用いて与えられる。そして (3.1) (v) にいう $z_{\wedge}(X, M_p)$ と

$\zeta_A(X, M^*(1), s)$ の関係は、

「 $z_{\wedge}(X, M_p)$ は $\Delta_A(X, M)$ の或る元 $z_A(X, M)$ の (3.3.2) による像であり、しかも $z_A(X, M)$ の (3.3.1) による $A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ における像は、

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{-r} \zeta_A(X, M^*(1), s)$$

(ここは $r: \operatorname{Spec}(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ は $\zeta_A(X, M^*(1), s)$ の $s=0$ における位数) に等しいというものである。

§4. 例

例を述べる前にひとこと、「部分 zeta 関数」が、abelian

Galois 群についての「 $\mathbb{Q}[G]$ -係数 zeta 関数」でとらえられることを説明する。

X, A, M を (3.2) のとおりとし, $f: Y \rightarrow X$ を finite etale abelian covering とし, G をその Galois 群とする。この時, $A[G] \otimes \mathbb{C}$ -値関数として,

$$\zeta_{A[G]}(X, f_* f^* M, s) = \sum_{\sigma \in G} \zeta_A(X, M, \sigma\text{-part}, s) \sigma$$

となる。ここは $\zeta_A(X, M, \sigma\text{-part}, s)$ は $\zeta_A(X, M, s)$ の部分 zeta 関数であり, 次のように定義される。

$$\zeta_A(X, M, s) = \sum_{\mathcal{O}} c(\mathcal{O}) N(\mathcal{O})^{-s} \quad c(\mathcal{O}) \in A$$

を, $\zeta_A(X, M, s)$ の Dirichlet 級数としての表示とする。但し

ここは $\mathcal{O}$ は形式的有限積

$$\prod_{i=1}^r x_i^{n_i} \quad (r \geq 0, x_i \text{ は } X \text{ の閉点}, n_i \geq 0)$$

を走り, $N(\mathcal{O}) = \prod_{i=1}^r N(x_i)^{n_i}$ 。この時

$$\zeta_A(X, M, \sigma\text{-part}, s) = \sum_{(\mathcal{O}, Y/X) = \sigma} c(\mathcal{O}) N(\mathcal{O})^{-s}$$

ここは $(\mathcal{O}, Y/X)$ は Artin symbol $\prod_{i=1}^r \varphi_{x_i}^{n_i}$ (φ_{x_i} は x_i の Frobenius 置換) $\in G$ を意味する。

$$(4.1) \quad X = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]), \quad Y = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\beta_n, \frac{1}{p}]^+) \quad (\beta_n \text{ は } \S 1 \text{ の})$$

とおり $()^+$ は $\operatorname{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ -fixed part), $f: Y \rightarrow X$ を標準写像

とする。 $G = \operatorname{Gal}(Y/X)$, $\Lambda = \mathbb{Q}_p[G]$, $\Lambda' = \mathbb{Z}_p[G]$, $A = \mathbb{Q}[G]$

とし, r を正の偶数として, $F = f_* f^* \mathbb{Q}_p(r)$, $F' = f_* f^* \mathbb{Z}_p(r)$,

$M = f_* f^* \mathbb{Q}(r)$ とおく。

すると

$$H^m(X, F) = 0, \quad H^m(X \otimes \mathbb{R}, F(-1)) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

であり, よって $\Delta_\Lambda(X, F) = \Lambda$ である。また $\Delta_A(X, M) = A$ であり, 同型 (3.3.1) (3.3.2) はそれぞれ恒等写像に他ならない。

$$\zeta_A(X, M^*(1), s) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n)^\times} \zeta_{\equiv a(p^n)}(s+1-r) \sigma_a$$

(σ_a は, β_n を β_n^a にうつす $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\beta_n)/\mathbb{Q})$ の元を $\mathbb{Q}(\beta_n)^\times$ に制限して得られる G の元) であり,

$$z_A(X, M) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n)^\times} \zeta_{\equiv a(p^n)}(1-r) \sigma_a \in A,$$

$z_\Lambda(X, F)$ はこの元の Λ での像である。

$$\Delta_{\Lambda'}(X, F') \subset \Delta_{\Lambda'}(X, F') \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \Lambda$$

と見る時, (3.1)(i) は $z_\Lambda(X, F)$ が $\Delta_{\Lambda'}(X, F')$ の Λ' -基底である ($z_{\Lambda'}(X, F')$ に等しい) ことを言っているが, このことは実は classical な岩澤主予想の言いかえになっていることが確かめられる。

(4.2) $X, f, \Lambda, \Lambda', A$ を (4.1) のとおりとし, $F = f_* f^* \mathbb{Q}_p(1)$, $F' = f_* f^* \mathbb{Z}_p(1)$, $M = f_* f^* \mathbb{Q}(1)$ とおく。この時 $z_A(X, M)$ は本質的に円単数である。 S を $\mathbb{Q}(\beta_n)^\times$ の実素点全体の集合, $\text{Map}(S, \mathbb{Q})$ を S から $\mathbb{Q}$ への写像全体の集合とする。 $\text{Map}(S, \mathbb{Q})$ は rank 1 の自由 A 加群であり, $M(-1)_B^+$ は $\text{Map}(S, \mathbb{Q})$ と同一視される。

$\text{Spec}(A) \setminus \{\text{原点}\}$ 上において

$$\Delta_A(X, M) = \mathbb{Z}[\beta_n, \frac{1}{p}]^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Map}(S, \mathbb{Q})^{-1}$$

$$\Delta_{\Lambda}(X, F) = H^1(\mathbb{Z}[\beta_n, \frac{1}{p}], \mathbb{Q}_p(1)) \otimes_{\mathbb{Q}} \text{Map}(S, \mathbb{Q})^{-1}$$

$$z_A(X, M) = (1 - \beta_n)(1 - \beta_n^{-1}) \otimes e^{-1}$$

但し $e \in \text{Map}(S, \mathbb{Q})$ は, $\beta_n + \beta_n^{-1} \in \cos(\frac{2\pi}{pn})$ にうつす S の元に 1 を, S の他の元に 0 を対応させるもの。(3.1)(i)に言う所の, $z_{\Lambda}(X, F)$ が $\Delta_{\Lambda'}(X, F')$ の基底の像であるということか, §1 に紹介した classical な岩澤主予想の言いかえであることが確かめられる。

[補足] 本稿に述べたことの詳細は, 筆者の次の論文にあります。

Iwasawa theory and p -adic Hodge theory (preprint),

Approach to Iwasawa theory of Hasse-Weil L -functions via Bdr (準備中),

p -adic Hodge theory and values of zeta functions of elliptic cusp forms (準備中)

なお本稿において, p 進 Hodge 理論の役割がどこにあるかを十分述べなかつたが, 同型 (3.3.2) の定義に, p 進 Hodge 理論が不可欠なのである。(3.3.1) の方は, period integral や K -群の regulator の話として, すでに多くの人々が論じてきたものである。)