

磁性流体界面形状解析における非線形応答

北大大学院工学研究院 水 田 洋 (Yo Mizuta)

Fac. of Engineering, Hokkaido Univ.

1 はじめに

磁性流体自由表面に印加する磁場を強めていくとき、界面形状が一様から六角格子状などへ遷移する。この現象は、互いに敏感な磁場と流体の相互作用によって生じるため、解析にあたっては、界面形状の大きさ複雑さや印加磁場の分布に制限されない方法が必要になる。これまでの線形解析 (Cowley-Rosensweig[1, 2] など)・弱非線形解析 (Gailitis[3], Twombly-Thomas[4, 5] など)・数値解析 (Boudouvis et al.[6] など) は、界面変位振幅や磁性流体と真空の間の透磁率差が微小、印加磁場は一様鉛直などの条件のもとで行われている。

本研究の磁場解析・流体解析は、界面形状・界面磁場・界面応力などを周期関数列で展開したときの展開係数に基づく。この「スペクトル」を、従来の解析のような近似を用いず、汎用性のある方法 [7, 8] で厳密かつ効率的に求め、物理的洞察を深める際の利便性を高めている。ここでは、この解析を磁性流体界面におけるパターン遷移の安定性解析に適用する。

界面の安定性を判定するとき、線形調和解析では分散関係の周波数を調べるが [2]、本研究では、界面変位に応じて変化する界面応力から導かれた**非線形応答**を用いる [8, 9]。これは、線形調和解析における周波数の 2 乗を有限界面変位・多モードへ拡張したものに当り、界面変位に与えるモードの波数の関数であると共に、印加磁場強度と界面変位の振幅にも依存する。

本稿では、平面の界面形状が不安定になって六角格子状に遷移する条件を調べる。これを、印加磁場強度と界面変位振幅の平面上に分岐図式としてまとめ、Gailitis の安定性解析 [3] と比較する。また、磁気応力差・表面張力などの界面応力に対する波数スペクトルに基づいて、解析結果に数値的および物理的考察を加える。

2 界面磁場解析 [7, 8]

任意の界面形状と印加磁場分布のもとで、調和性と界面条件を満たす界面磁場を厳密かつ効率的に求める。その特徴は、次のようにまとめられる。

1. 界面磁場の各成分を**基本場**と**誘導場**に分ける。
2. 誘導場を求めるには、既知量を周期関数列 f_{k_v} で展開し、それに **3次元 Hilbert 変換演算子** $\hat{G}_I$ ($I=X, Y, Z$) を作用させる。こうすると、 $\hat{G}_I$ の周期関数への作用を解析的に求められるようになる。
3. $\hat{G}_Z$ の周期関数への作用は、非線形モード結合の形に表される。すなわち、界面形状モード f_{k_μ} と磁場モード f_{k_v} の波数の和または差の成分が新たに生じる。

$$\hat{G}_Z[f_{k_v}(\mathbf{R}')] \simeq -\frac{1}{2P} \sum_{\mu=0}^{\infty} \tilde{\zeta}_\mu (k_{k_v+k_\mu} f_{k_v+k_\mu} + k_{k_v-k_\mu} f_{k_v-k_\mu}). \quad (1)$$

3 界面力学方程式 [8]

界面が大きく複雑に変形していても、非線形効果を落とさず流体解析を行うため、非回転・非粘性を仮定した流体を Bernoulli 方程式で扱う。これに、界面上で力学的条件を適用すれば、界面力学方程式

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + S + p_0 = 0, \quad S \equiv G + C + T \text{ (応力和)} \quad (2)$$

が導かれる。ここで、 $\rho, \mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z), g, z, \kappa_{1,2}, \gamma, p_0, \mu_j, [\cdots], h_{X,Y}, b_Z$ を密度・流速・重力加速度・界面変位・主曲率・表面張力係数・大気圧・透磁率 ($j=1$: 流体, $j=2$: 真空)・界面を横切る値の跳び (2-1)・接線磁場・法線磁束密度 とすれば、速度ポテンシャル・動圧・重力ポテンシャル・表面張力・磁気応力差は

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_{-\infty}^z dz' v_z, \\ D &= \rho |\mathbf{v}|^2 / 2 \quad (\simeq 0), \\ G &= \rho g z, \\ C &= \gamma(\kappa_1 + \kappa_2), \\ T &= -[1/\mu_j] \{ \mu_1 \mu_2 (h_X^2 + h_Y^2) + b_Z^2 \} / 2 \end{aligned}$$

と表される.

線形調和解析では, $\omega, \mathbf{k}$ を角周波数・波数ベクトル, $z^1 \propto \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}$ を微小界面変位として, 印加磁場が鉛直一様な場合の線形分散関係

$$\omega^2 = gk + (\gamma/\rho)k^3 - (M_n^2/2\rho P)k^2 \quad (3)$$

を導く. ここで M_n は法線磁化で, 印加磁場強度 H_0 と次の関係がある.

$$M_n \simeq 2MH_0/P, \quad M \equiv (1/\mu_2 - 1/\mu_1)/2, \quad P \equiv (1/\mu_2 + 1/\mu_1)/2. \quad (4)$$

H_0 が増えると ω^2 は減るが, ω^2 が負になって ω が虚部を持つ領域が現れると, 界面形状は平面では不安定になる. この安定性遷移の臨界条件は, Fig. 2-Fig. 5(a) に示すように, $\omega^2=0, \partial\omega^2/\partial k=0$ から求められ, 次のようになる.

$$\begin{cases} k = k_{CL} \equiv \left(\frac{\rho g}{\gamma}\right)^{1/2}, & \text{(臨界波数)} \\ H_0 = H_{CL} \equiv \frac{PM_{CL}}{2M}, \quad M_{CL}^2 \equiv 4P(\rho g \gamma)^{1/2}. & \text{(臨界磁場強度)} \end{cases} \quad (5)$$

次に, 界面力学方程式(2)における界面変位と応力和を, 周期関数列で

$$z(\mathbf{R}) = \Phi^{(zS)}(\mathbf{R})\tilde{z}, \quad S(\mathbf{R}) = \Phi^{(zS)}(\mathbf{R})\tilde{S} \quad (6)$$

と展開する. ここで,

$$\Phi^{(zS)}(\mathbf{R}) = (\cos \Theta_\mu | \sin \Theta_\mu) \equiv (f_{k_\mu}(\mathbf{R})) \quad (7)$$

は周期関数行ベクトルで, $N = N_S + N_A$, $\Theta_\mu \equiv \mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{R}$, $\mathbf{k}_\mu$ は波数ベクトル,

$$\tilde{z} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{z}_\mu \\ \vdots \\ \tilde{z}_N \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{S}_\mu \\ \vdots \\ \tilde{S}_N \end{pmatrix} \quad (8)$$

は展開係数(スペクトル)列ベクトルである.

流速場に調和性があれば, 流速の鉛直成分 v_z の, 波数ベクトルの大きさが k である波数成分は, $v_z = (\partial z / \partial t) e^{kz}$ と表される. これを $\varphi = \int_{-\infty}^z dz' v_z$ に用いると, $\tilde{z}$ に対する界面力学方程式

$$\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial t^2} = -\frac{k}{\rho} \tilde{S}(\tilde{z}), \quad \tilde{S}(\tilde{z}) = \tilde{G}(\tilde{z}) + \tilde{C}(\tilde{z}) + \tilde{T}(\tilde{h}_X(\tilde{z}), \tilde{h}_Y(\tilde{z}), \tilde{b}_Z(\tilde{z})) \quad (9)$$

$$G(\mathbf{R}) = \Phi^{(zS)}(\mathbf{R})\tilde{G}, \quad C(\mathbf{R}) = \Phi^{(zS)}(\mathbf{R})\tilde{C}, \quad T(\mathbf{R}) = \Phi^{(zS)}(\mathbf{R})\tilde{T}$$

が導かれる. この方程式は, 本稿のような安定性解析に止まらず, 界面の動的現象を波数空間で調べるために使うことができる.

(9)を用いた解析を実際に行うためには, 関数関係 $\tilde{S}(\tilde{z})$ を確立しておかな

なければならない。\$\tilde{z}\$ と \$\tilde{G}(\tilde{z})\$, \$\tilde{C}(\tilde{z})\$ の関係は直接的であるが、
 \$\tilde{T}(\tilde{h}_X(\tilde{z}), \tilde{h}_Y(\tilde{z}), \tilde{b}_Z(\tilde{z}))\$ は、\$\tilde{h}_{X,Y}\$, \$\tilde{b}_Z\$ を通した複雑な関係になる。関数関係 \$\tilde{S}(\tilde{z})\$
 を確立すれば、勾配行列を次のように定義できる。

$$H(\tilde{z}^0) \equiv \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{z}_\mu} \right)_{\tilde{z}^0}. \quad (10)$$

4 有限界面変位における安定性解析 [8, 9]

線形波動の分散関係 (3) は、界面変位が微小で \$z^1 \propto \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}\$ である
 として導かれた。界面変位が微小であれば、波数空間における界面力学方程
 式は、勾配行列 \$H\$ を用いた近似 \$\tilde{S}(\tilde{z}^1) \simeq H\tilde{z}^1\$ より、

$$\frac{\partial^2 \tilde{z}^1}{\partial t^2} = -\frac{k}{\rho} \tilde{S}(\tilde{z}^1) \simeq -\frac{k}{\rho} H\tilde{z}^1 \quad (11)$$

となる。これから、\$\omega^2\$ には \$(k/\rho)H\$ が対応すると考えられる。

次に、界面変位 \$z^0(\mathbf{R})\$ は必ずしも微小でないとする。このとき界面が安定
 なら、界面を \$z^0(\mathbf{R})\$ から \$z(\mathbf{R}) = z^0(\mathbf{R}) + z^1(\mathbf{R})\$ までわずかに動かしても、ず
 れ \$z^1(\mathbf{R})\$ は長時間後に 0 に近づく。界面変位を \$z(\mathbf{R}) = \Phi^{(z^S)}(\mathbf{R})\tilde{z}\$, \$\tilde{z} = \tilde{z}^0 + \tilde{z}^1\$
 と周期関数列で展開して、\$z(\mathbf{R})\$, \$z^0(\mathbf{R})\$ に対する界面力学方程式に用い、近
 似 \$\tilde{S}(\tilde{z}^0 + \tilde{z}^1) \simeq \tilde{S}(\tilde{z}^0) + H(\tilde{z}^0)\tilde{z}^1\$ を行くと、

$$\frac{\partial^2 (\tilde{z}^0 + \tilde{z}^1)}{\partial t^2} = -\frac{k}{\rho} \tilde{S}(\tilde{z}^0 + \tilde{z}^1) \simeq -\frac{k}{\rho} \tilde{S}(\tilde{z}^0) - \frac{k}{\rho} H(\tilde{z}^0)\tilde{z}^1 \quad (12)$$

より、(11) が再び導かれる。すなわち \$(k/\rho)H(\tilde{z}^0)\$ は、有限界面変位の場合で
 もやはり、安定性の判定に使うことができる。\$(k/\rho)H(\tilde{z}^0)\$ の最小固有値を \$h\$
 と置けば、\$h\$ は微小界面変位での \$\omega^2\$ を有限界面変位・多モードへ拡張した
 ものになっている。以下では、\$h\$ を**非線形応答**とよぶ。

波数の大きさ \$k\$ のモードで界面変位を与え、\$k\$ を変えながら \$h\$ を求めて行
 くと、関数関係 \$h(k)\$ が得られる。この関数関係は、印加磁場強度 \$H_0\$ と界面
 変位の代表振幅 \$\zeta_0\$ に依存する。\$h(k)\$ は、線形波動の分散関係 \$[\omega(k)]^2\$ と同様
 に、その値が負になる領域が現われると界面は不安定、と判定される。

平らな界面が安定状態から不安定状態へ遷移する瞬間の**臨界磁場強度** \$H_0 = H_c\$ は、
 \$h(k)\$ の極小値が 0 となる条件、すなわち \$h = 0\$, \$\partial h / \partial k = 0\$ から決ま

る. $h(k)$ の極小位置が臨界波数 k_c である. ζ_0 毎に H_c を決め, (H_0, ζ_0) 平面上の (H_c, ζ_0) に点を打ち, これらを結ぶと分岐の枝が描かれる.

5 六角格子界面形状の安定性解析

この節では, Fig. 1 に示すような六角格子状の界面について, 前節で定義した非線形応答 h に基づいて安定性を数値的に調べ, 分岐図式にまとめる.

5.1 パラメータの選択

ここでは, 次のような物性値を持つ磁性流体を想定する.

$$\begin{cases} \text{密度 } \rho = 1.0 \times 10^3 \text{ [kg m}^{-3}\text{]}, \text{ 表面張力係数 } \gamma = 2.6 \times 10^{-2} \text{ [N m}^{-1}\text{]}, \\ \text{透磁率比 } \mu_1/\mu_0 = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 \text{ } (\mu_2/\mu_0 = 1.0, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ [H/m]}). \end{cases}$$

これらの値から求めた臨界波数 k_{CL} , 臨界波長 λ_{CL} , 臨界磁場強度 H_{CL} , 水面高に換算した磁気圧は, (5) により, 次のようになる (臨界波数・臨界波長は透磁率に依存しない).

$k_{CL} [10^2 \text{ m}^{-1}]$	$\lambda_{CL} [10^{-2} \text{ m}]$	μ_1/μ_0	$H_{CL} [10^4 \text{ A/m}]$	磁気圧 $[10^{-3} \text{ mH}_2\text{O}]$
6.14	1.02	1.1	7.31	34.21
		1.2	3.75	17.92
		1.3	2.57	12.49
		1.4	1.98	9.77

印加磁場は鉛直一様で, その強度は $0.95H_{CL} \leq H_0 \leq 1.03H_{CL}$ の範囲である.

Fig. 1(a) のような界面形状は, 波数 k_μ が異なる 3 つの基本モードを次のように重ねて与える.

$$\begin{cases} z^1(\mathbf{R}) = \sum_{\mu=1}^3 \zeta_0 \cos \mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{R}, \\ \mathbf{k}_\mu = m_\mu \mathbf{A} + n_\mu \mathbf{B}, \quad (m_\mu, n_\mu) = (2, 0), (0, 2), (2, 2), \\ \mathbf{A} = (\hat{X} - \sqrt{3}\hat{Y})\pi / (2\sqrt{3}h_0), \mathbf{B} = (\hat{X} + \sqrt{3}\hat{Y})\pi / (2\sqrt{3}h_0). \end{cases} \quad (13)$$

ここで, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ は 2 次元実空間を離散化した規則格子に対する逆格子ベクトル, $\hat{X}, \hat{Y}$ は互いに直交する単位ベクトル, ζ_0 は界面変位の振幅, h_0 は実空間領域の大きさである. ζ_0 は $0.10 [\text{mm}] \leq \zeta_0 \leq 0.50 [\text{mm}]$ の範囲である.

(13) における 3 つの基本モードの大きさ $k = |\mathbf{k}_\mu|$ は相等しい. 以下で非線形応答の波数依存性 $h(k)$ を調べる際は, k を連続的に変える. しかし, 実空間領域の大きさが決まっていれば, k は離散的になり, $h(k)$ を詳しく調べる

ためには、大きな実空間領域と数多くのモードを用意する必要がある。

$k_0 = \pi/h_0$ で単位モードを定義し、 $n_c = k/k_0$ と置けば、 $k = n_c k_0$ と表される。ここでは、 n_c をいろいろ動かす代わりに、 $n_c = 10$ と固定して h_0 を動かす。 h_0 は、 $0.6 \leq k/k_{CL} \leq 1.6$ の範囲で k が連続的に動くように、 5.0×10^{-2} [m] 付近 (λ_{CL} の 5 倍程度) で調整した。

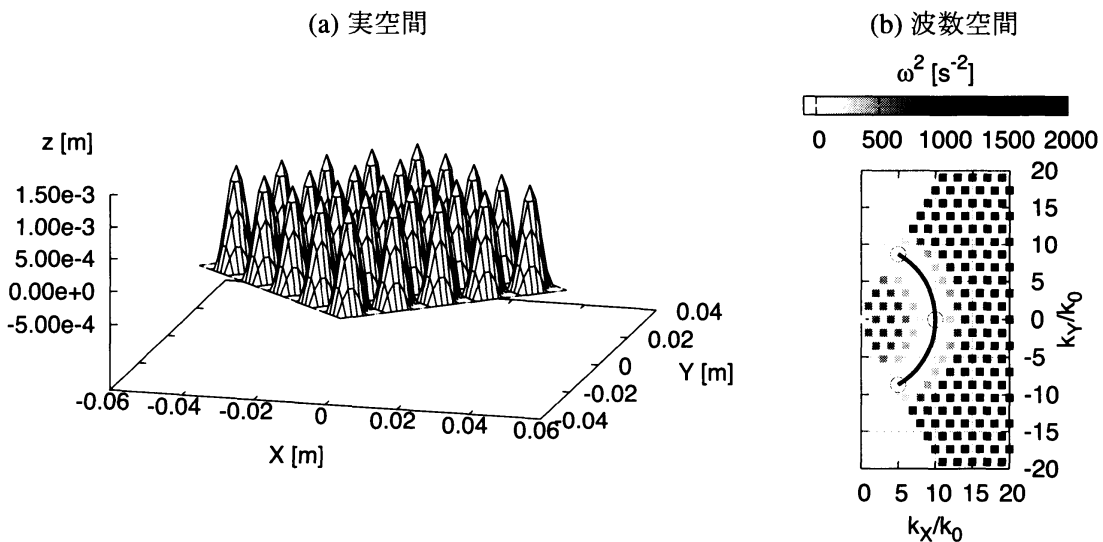
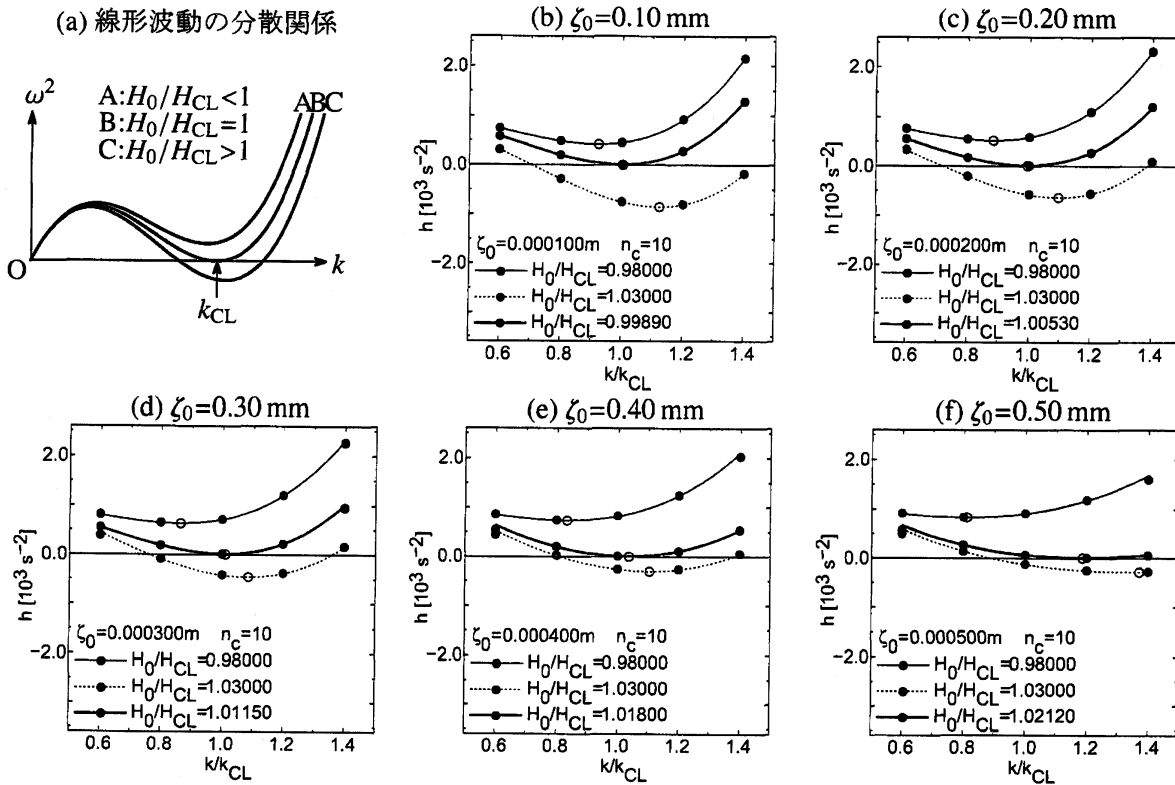
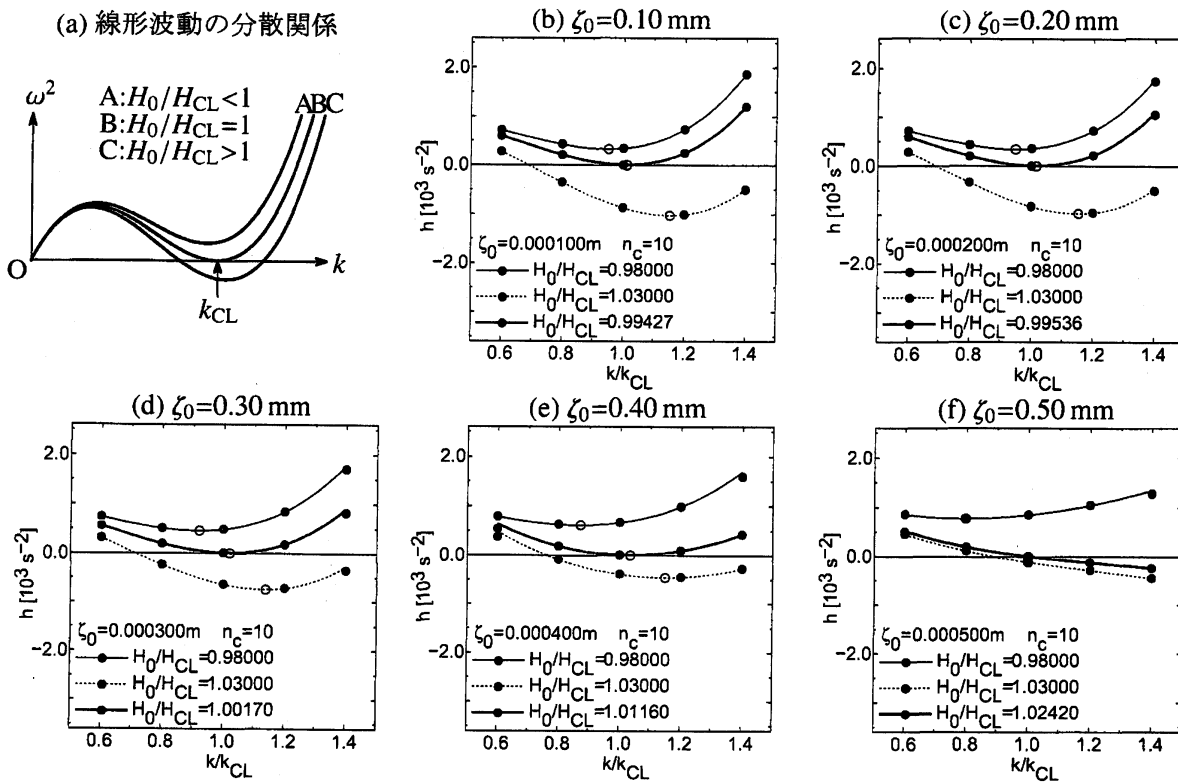


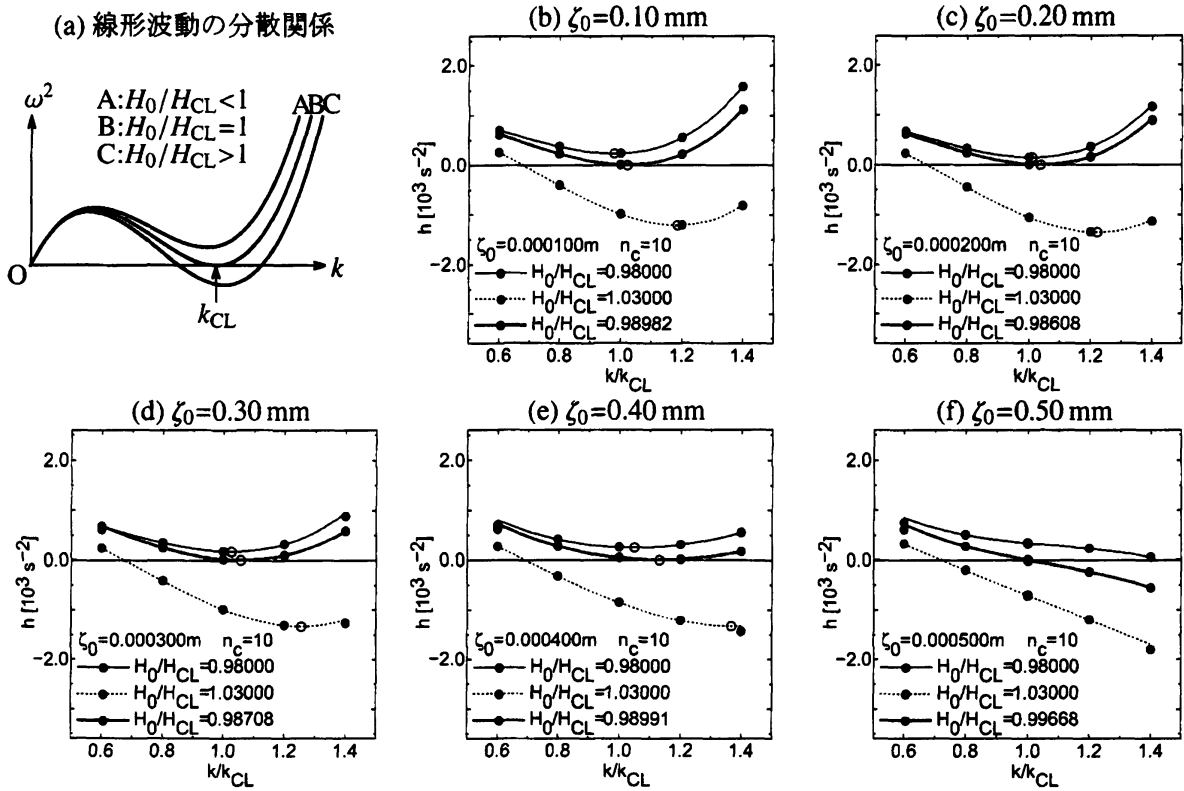
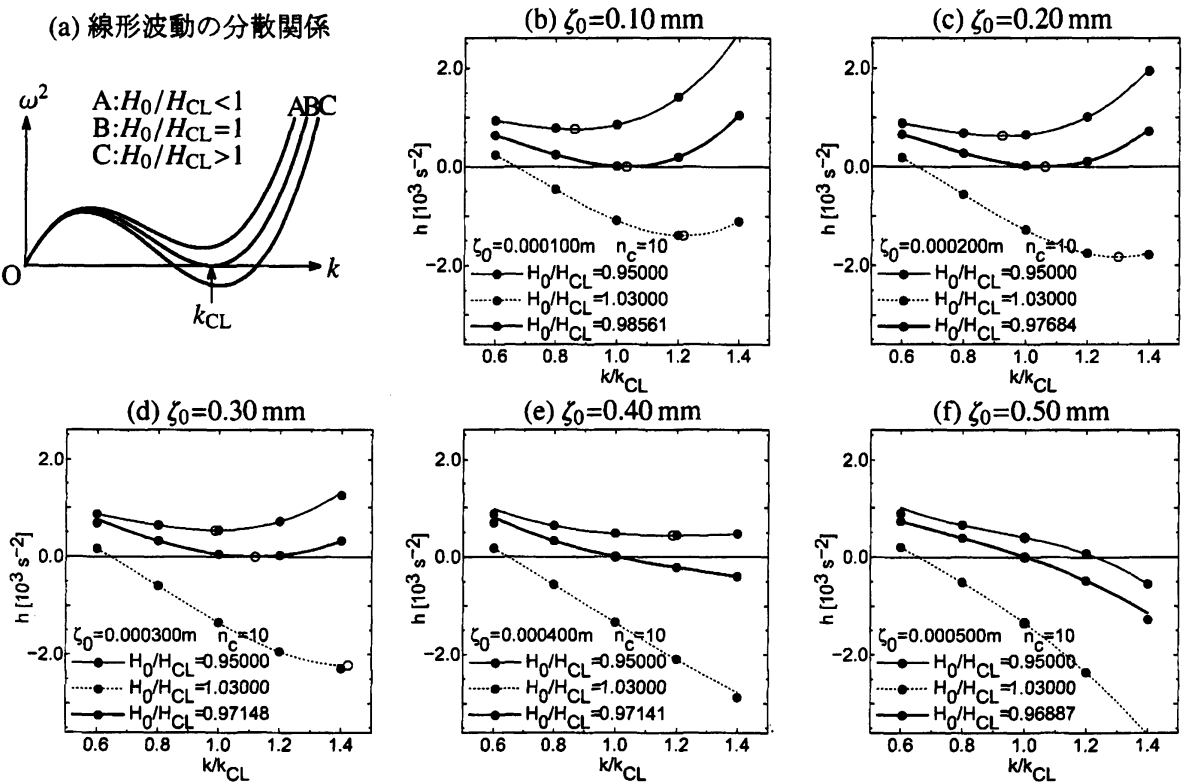
Fig. 1: 六角格子界面形状

線形波動の分散関係(3)はもともと2次元界面形状に対するものであるが、3次元でも、(13)のように基本モードの大きさが相等しければ、 $|k_\mu| = k$ としてそのまま使うことができる。Fig. 1(b)には、 $H_0 = H_{CL}$ における各波数での ω^2 の値を■の濃淡で示した。さらにこの図には、臨界波数の位置 $k = k_{CL}$ を円弧で、3つの基本モードの波数を○で示した。基本モードがこれら3つだけでも、表面張力と磁気応力差の非線形性のため、界面応力には他のモードが数多く現れる。これらは、波数領域に用意した 18×18 個のモードで捉えた。

5.2 非線形応答

Fig. 2–Fig. 5は、非線形応答の波数依存性 $h(k)$ を、磁性流体の透磁率比 μ_1/μ_0 ・界面変位振幅 ζ_0 ・印加磁場強度 H_0 ごとに示したものである。

Fig. 2: 非線形応答の界面変位振幅・印加磁場強度依存性 ($\mu_1/\mu_0 = 1.1$)Fig. 3: 非線形応答の界面変位振幅・印加磁場強度依存性 ($\mu_1/\mu_0 = 1.2$)

Fig. 4: 非線形応答の界面変位振幅・印加磁場強度依存性 ($\mu_1/\mu_0 = 1.3$)Fig. 5: 非線形応答の界面変位振幅・印加磁場強度依存性 ($\mu_1/\mu_0 = 1.4$)

(a)は線形波動における ω^2 であるが、(b)–(f)には ζ_0 ごとに、 $k = k_{CL}$ 付近の ω^2 に相当する $h(k)$ を示した。線形波動の分散関係(3)では、重力・表面張力は正で k, k^3 に比例し、磁気応力差は負で k^2 に比例する。中間波数では磁気応力差が、高波数では表面張力が優勢になるため、極小が現れる。 H_0 が増加すると ω^2 は全体的に下がるが、 $\omega^2 < 0$ の領域は一点から始まるため、 $\omega^2=0, \partial\omega^2/\partial k=0$ より臨界磁場強度・臨界波数が決まる。

ζ_0 が有限でも、 $\zeta_0 \leq 0.40$ [mm] なら ($\mu_1/\mu_0=1.4$ では $\zeta_0 \leq 0.30$ [mm])、線形波動と同様に、 $h(k)$ には極小が存在し、いずれの $\mu_1/\mu_0, \zeta_0$ においても、 h は印加磁場強度 H_0 が増加するにつれて減少する (Fig. 2–Fig. 5)。したがって、臨界磁場強度・臨界波数は当初の定義、すなわち $h = 0, \partial h/\partial k = 0$ 、どおりに決められる。このためには、印加磁場強度 H_0 を小さめおよび大きめにして、いくつかの波数 k で非線形応答 h を計算し(●印)、それらの内挿関数(細線)の極小を求める(○印)。 H_0 の調節を繰り返してこの極小値が0となる H_0 を求めれば(太線)、このときの H_0 が臨界磁場強度 H_c 、極小位置の波数が臨界波数 k_c となる。

ζ_0 がさらに大きくなると、高波数領域で $h(k)$ は増加せずに単調減少し、 $h < 0$ なる不安定領域が現れるようになる。 H_0 が減少すれば不安定領域の下限は高波数側へ移動するが、不安定領域そのものはなくなる。また $h(k)$ に極小は存在しないので、臨界磁場強度に代えて、 $k=k_{CL}$ で $h(k)=0$ とする印加磁場強度を不安定性の目安に用いる。この場合はもちろん、 $\partial h/\partial k|_{k=k_{CL}}=0$ とならない。

界面の安定性は、磁性流体の透磁率比に応じても変化する。 μ_1/μ_0 が大きいほど臨界磁場強度は下がり、界面の応答も敏感になる。

5.3 分岐図式

Fig. 6に、前節の $h(k)$ の振る舞いから求めた、界面変位振幅 ζ_0 ごとの臨界磁場強度 H_c を示す。これは、界面安定性の分岐図式となる。▲△, ◆◇, ●○, ■□はそれぞれ、透磁率比 $\mu_1/\mu_0=1.1, 1.2, 1.3, 1.4$ に対する(H_c, ζ_0)で、黒印が当初の定義から求めたもの、白印は $k=k_{CL}$ で $h(k)=0$ となる印加磁場

強度を示す.

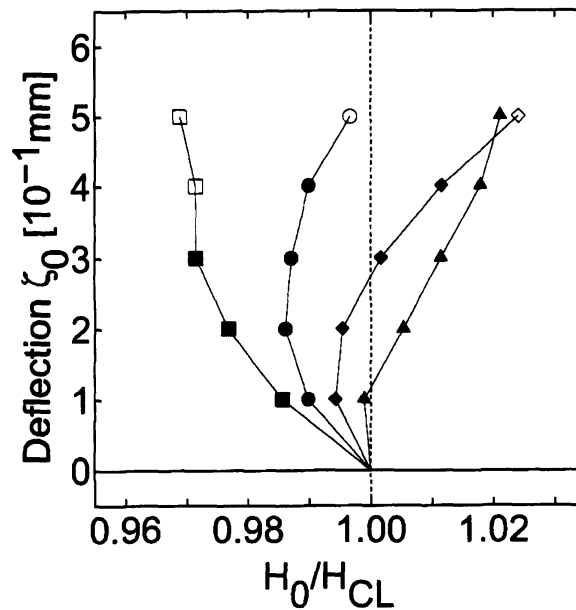


Fig. 6: 界面安定性の分岐図式. $\mu_1/\mu_0=1.1$ ($\blacktriangle\triangle$), 1.2 ($\blacklozenge\lozenge$), 1.3 ($\bullet\circ$), 1.4 ($\blacksquare\square$).

小さな ζ_0 では, いずれの透磁率比 μ_1/μ_0 においても $H_c < H_{CL}$ となることから, この分岐は亜臨界である. 透磁率比が大きいほど H_c は下がる. これは透磁率比が大きいと磁場の効果が実質的に大きくなるためである.

$\zeta_0 > 0.30$ [mm] では, 透磁率比ごとに様子が異なる. $\mu_1/\mu_0=1.1$ の場合, もっと小さな ζ_0 から分岐の枝は超臨界側にある. $\mu_1/\mu_0=1.2, 1.3$ の場合, ζ_0 が増えるにつれて亜臨界側から超臨界側へ分岐の枝は動いて行き, 履歴を生じる分岐曲線が描かれる. しかし $\mu_1/\mu_0=1.4$ になると, 分岐の枝が亜臨界側にあるうちに, h の極小から臨界磁場強度を決められる状況は壊れてしまう.

5.4 界面応力スペクトル

前節までの結果は波数空間における界面力学方程式 (9) から導かれたが, その要となるのが応力 and のスペクトル $\tilde{S}(\bar{z})$ である. $\tilde{S}(\bar{z})$ は, 重力・表面張力・磁気応力差のスペクトル $\tilde{G}(\bar{z}), \tilde{C}(\bar{z}), \tilde{T}(\tilde{h}_x(\bar{z}), \tilde{h}_y(\bar{z}), \tilde{b}_z(\bar{z}))$ の和である.

5.2 節で見たとおり, ζ_0 が大きくなると, $h(k)$ は高波数領域で単調減少して極小を持たなくなる. この原因を次のように調べた.

まず, 定式化とプログラミング, 特に勾配行列の計算を見直した. 次に,

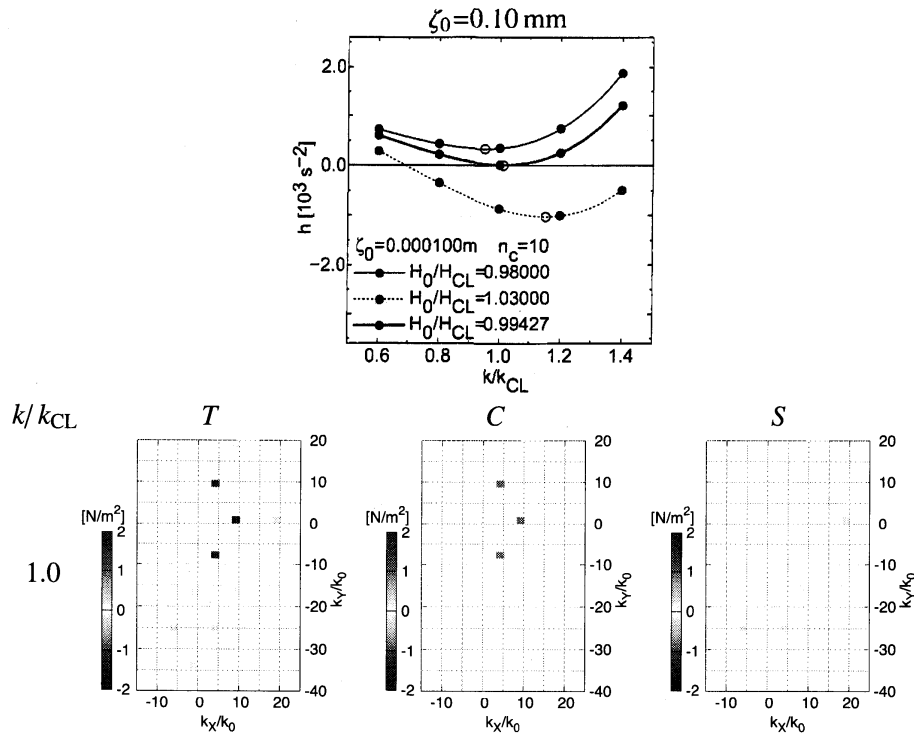


Fig. 7: 界面応力スペクトル ($\mu_1/\mu_0=1.2$, $\zeta_0=0.10 \text{ mm}$, $H_0/H_{CL}=0.99427$)

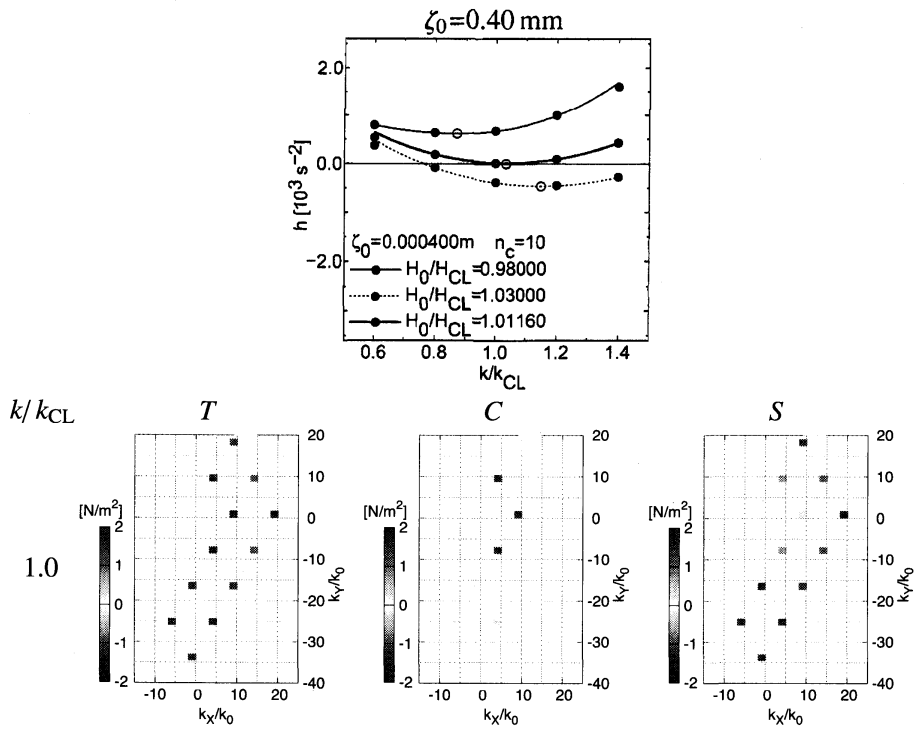


Fig. 8: 界面応力スペクトル ($\mu_1/\mu_0=1.2$, $\zeta_0=0.40 \text{ mm}$, $H_0/H_{CL}=1.01160$)

勾配行列(10)について、 $\tilde{z}_\mu$ に関する微分から解析的に求めたものと、 $\tilde{z}_\mu$ をわずかに変えた差分から数値的に求めたものを比較した。実空間の分割数に依存するものの、その差が計算精度の範囲内に収まることを確認した。なお、実空間の分割数を細かくすると表面張力は若干弱まるが、応力和はそれほど大きくは変わらないため、空間分割数は十分なものと判断した。

界面変位振幅が増えると非線形効果も大きくなり、界面変位に与えた基本モードの波数から遠く離れたモードでも、界面応力の振幅は成長する。したがって、スペクトル分布の拡がりを覆えるだけ、波数領域は充分大きくなければならない。このための目安として、スペクトル強度で重みづけし、全波数領域の大きさを規格化した、界面応力スペクトルの相対標準偏差を調べた。臨界磁場強度においては、各応力がつりあうため、相対的に応力和のスペクトルは拡がる。この場合でも、標準偏差が全波数領域の範囲に収まることを確認した。

Fig. 7, Fig. 8 は、 $\mu_1/\mu_0=1.2$, $k/k_{CL}=1.0$ および臨界磁場強度において、 $\zeta_0=0.10\text{ mm}$, 0.40 mm の磁気応力差 T ・表面張力 C ・応力和 S のスペクトルを較べたものである。界面変位振幅が小さければ、磁気応力差と表面張力はいくつあっても、応力和はいずれのモードにも現れない。しかし、界面変位振幅が大きくなると、表面張力はあまり様子が変わらない一方、磁気応力差には基本モード以外の成分が多く現れてきて、応力和には、表面張力と打ち消されなかった成分が残る。 h は $\tilde{S}(\tilde{z})$ の勾配の固有値であって、 $\tilde{S}(\tilde{z})$ そのものを直接表すわけではないが、大きな ζ_0 では、勾配行列において負の寄与をする磁気応力差の成分が多く現れて表面張力を凌ぐため、 h が減少するものと考えられる。

5.5 Gailitis の安定性解析 [3]

Gailitis による弱非線形解析では、 $(\gamma/\rho g)^{1/2}$ で無次元化した界面変位振幅(ここでは a とする) および磁性流体と真空の透磁率差が充分小さいとし、また、界面形状の基本モードの波数の大きさを線形臨界波数 k_{CL} に一致させる。こうして、単位面積あたりの界面エネルギー δU_3 を、 a の 4 次のべきま

で展開する.

$$\delta U_3 = -\frac{3}{2}Ea^2 - Ga^3 + \frac{3}{4}Ta^4. \quad (14)$$

ここで, $E \equiv (H_0/H_{CL})^2 - 1$ は線形臨界磁場強度からの印加磁場強度のずれ, また $T = 1.0356$, $G \equiv 3M/4P$ は透磁率パラメータである.

これから求めた平衡条件

$$0 = \frac{\delta U_3}{\delta a} = -3Ea - 3Ga^2 + 3Ta^3 = 3a \left\{ T \left(a - \frac{G}{2T} \right)^2 - \frac{G^2}{4T} - E \right\} \quad (15)$$

から, 次の分岐曲線が得られる.

$$E = T \left(a - \frac{G}{2T} \right)^2 - \frac{G^2}{4T}. \quad (16)$$

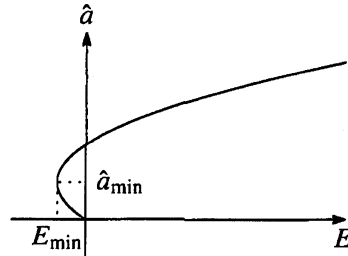


Fig. 9: 平衡条件

Fig. 9 に示すように, E は $\hat{a} = \left(\frac{\gamma}{\rho g} \right)^{1/2} \frac{G}{2T} \equiv \hat{a}_{\min}$ で最小値 $E = -\frac{G^2}{4T} \equiv E_{\min}$ をとる. このことを Fig. 6 で確かめているが, 今のところ一致は得ていない.

6 まとめと今後の課題

汎用的な磁場解析・流体解析を, 磁性流体界面におけるパターン遷移の非線形な安定性解析に適用した. 磁場解析では, 任意の界面形状と印加磁場分布のもとで, 厳密に界面磁場を求め, 流体解析では, 界面力学方程式により非線形効果を全て取り入れている.

有限界面変位の場合の安定性の議論には, 非線形応答 (界面応力 and の界面変位による勾配行列の固有値) を用いる. 平面の界面形状が六角格子状に遷移する場合の数値解析を示した. 非線形応答の波数依存性 $h(k)$ に極小があれば, そのときの印加磁場強度が臨界磁場強度, 極小の位置が臨界波数とな

る。しかし界面変位振幅が大きくなると、高波数で非線形応答が単調減少して極小がなくなり、界面は印加磁場強度が小さくても不安定になる。この場合も敢えて線形臨界波数で非線形応答が 0 になるときの印加磁場強度を不安定性の目安に取れば、印加磁場強度－界面変位振幅内に安定性分岐の枝を描くことができ、この枝は亜臨界となる。

大きな界面変位振幅で高波数の非線形応答が単調減少する原因は、界面応力の波数スペクトルで大体探ることができる。界面変位振幅が大きくても表面張力の様子はあまり変わらないが、磁気応力差には多くの成分が現れるようになり、応力和で、表面張力と打ち消されなかった成分が負の寄与をする。

現在、弱非線形理論により、分岐曲線の近似形を再導出すると共に、界面応力スペクトルからよりの確な情報を引き出す方法を模索している。

参考文献

- [1] M.D.Cowley and R.E.Rosensweig: The interfacial stability of a ferromagnetic fluid; *J. Fluid. Mech.*, **30**(4), p.671 (1967).
- [2] R.E.Rosensweig: *Ferrohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge), Chap.7 (1985).
- [3] A.Gailitis: Formation of the hexagonal pattern on the surface of a ferromagnetic fluid in an applied magnetic field; *J. Fluid Mech.*, **82**(3), p.401 (1977).
- [4] E.Twombly and J.W.Thomas: Mathematical theory of non-linear waves on the surface of a magnetic fluid; *IEEE Trans. Magn.MAG*, **16**(2), p.214 (1980).
- [5] E.E.Twombly and J.W.Thomas: Bifurcating instability of the free surface of a ferrofluid; *SIAM J. Math. Anal.*, **14**(4), p.736 (1983).
- [6] A.G.Boudouvis, J.L.Puchalla, L.E.Scriven and R.E.Rosensweig: Normal field instability and pattern in pools of ferrofluid; *J. Magn. Magn. Mater.*, **65**, p.307 (1987).
- [7] Y.Mizuta: Interface magnetic field analysis for free surface phenomena of magnetic fluid; *Magnetohydrodynamics*, **44**(2), p.155 (2008).
- [8] 水田 洋: 磁性流体界面における磁場解析と安定性解析; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理解と応用」, **1701**, p.139 (2010).
- [9] Y.Mizuta: Stability analysis on the free surface phenomena of a magnetic fluid for general use; *J. Magn. Magn. Mater.*, **323**(10), p.1354 (2011).