

科研費研究会報告

カオス運動に内在する拡散的性質と
間欠的性質の新しい方法による研究

昭和 62 年度 文部省科学研究費 一般研究 C

課題番号 61540281

目次

序	2
§ 1 相似指数 λ_q と一般相関関数 $Q_n^{(q)}$ の導入	3
§ 2 揺動スペクトル理論	4
2-1 拡散性と間欠性の相補性とスケーリング則	4
2-2 熱力学形式	6
2-3 複素分配関数によるカオス転移の分類	10
2-4 対称性の破れを伴うカオス転移	15
2-5 純間欠カオスの臨界現象	24
§ 3 一般相関関数の方法	29
3-1 一次元写像系（固有関数展開の方法）	29
3-2 一変数時系列（連分数展開の方法）	38
§ 4 揺動スペクトル理論の他の分野への応用	42
4-1 マルチ・フラクタル集合と乱流	42
4-2 局所次元の揺らぎ	45
4-3 イジング・スピン型パターン	46
4-4 ハミルトニアン集合	57
§ 5 認識論的諸問題	61
5-1 カオスの一般的位置づけ	61
5-2 カオスの統計物理学的考察	62
5-3 カオスにおける相補性	66
5-4 自然認識における抽象化とリアリティー	66
5-5 自然法則としての力学と認識方法としての力学系	69
5-6 統計性と不可逆性および偶然性と必然性	70
5-7 意味づけの多様性と価値付与によるその選択	72
5-8 認識様式のプロト・タイプとしての時系列型認識とパターン型認識	73

序

現代科学を活性化する新しい概念として、カオスとフラクタルが広範な分野において脚光を浴びている。非摂動論的な非線形現象の典型例であるカオスについては、その発生のシナリオは最近の研究により、かなり解明されてきた。ところでカオスを総合的に理解するためには、シナリオ等の“genesis of chaos”のみならず、カオスの中味を問題とする“logos of chaos”の研究が不可欠である。そこで我々はカオスの本質の多くは解析が容易な小自由度カオスに内在しているとみなし、これを解明する方法論として『揺動スペクトル理論』と『一般相関関数の方法』を開発した。これにより小自由度カオスの研究は新しい時代を迎えた。これを量子論の歴史にたとえるならば、いまや前期量子論の時代は過ぎ、本格的な量子力学の時代に入ったといえよう。このときSchrödinger方程式に対応するのが時間推進演算子（一次元写像系では q -次 Frobenius-Perron 演算子）の固有値方程式である。この方程式の最大固有値より相似指数 λ_q が得られる。この λ_q とそのルジャンドル変換により得られる関数によって揺動スペクトル理論は構成される。この理論により、カオス系の長時間的（global）挙動に内在する拡散的性質とそれに相補的な間欠的性質を統一的に解析できる。揺動スペクトル理論は熱力学形式を構成しており、これによってカオスの統計熱力学が完成したといってもよい。他方、固有値のセットを用いることによって一般相関関数の方法は得られる。この方法は、従来の相関関数の方法（パワー・スペクトルの方法）を含む一般形式を構成しており、カオスのダイナミクスを統一的な観点から取り扱える新しい方法論になっている。この一般的方法により、従来のパワー・スペクトルは時系列の拡散的側面しか捉えていないことがわかる。

揺動スペクトル理論と一般相関関数の方法は一般の定常時系列にも適用でき、極めて応用範囲が広い。カオス研究によって、カオス以外の問題にも適用できる新しい方法論が開発されたことは、カオス自体の解明とともに、カオス研究の輝かしい成果だと思う。

なお、この報告書をまとめるにあたって、我々の研究室の大学院生である、田辺潔、萩原竜一、山口彰、仮屋広美の諸君に原稿のタイプをしていただいた。ここに謝意を表します。

井上政義（鹿児島大学理学部）
藤坂博一（鹿児島大学理学部）
山田知司（九州工業大学工学部）

§ 1 相対指数 λ_q と一般相関関数 $Q_n^{(q)}$ の導入

ここではカオス・マップや実験などにより定常な時系列 $\{u_j; j = 0, 1, 2, \dots\}$ が与えられたとする。まずスケール依存平均値 α_n を次式で導入する

$$\alpha_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u_j \quad (1-1)$$

揺動量である α_n の揺らぎは n の増大とともに小さくなり、次式が成立する

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \langle u_j \rangle \quad (1-2)$$

この α_n より自己相似変数 A_n を次の様に導入する

$$A_n \equiv \exp(n \alpha_n) \quad (1-3)$$

この変数の比 $A_{n+1}/A_n (= \exp(u_n))$ は $\{u_j\}$ の定常性より、ある平均値のまわりで揺らぐ量になっている。この意味で A_n は自己相似性、詳しくは統計的自己相似性をもっている。時系列の統計的性質は A_n の q 次モーメント $M_q(n)$ により解析される。このモーメントを次の様に表す

$$M_q(n) \equiv \langle A_n^q \rangle = Q_n^{(q)} \exp(q \lambda_q n) \quad (1-4)$$

ここで $Q_n^{(q)}$ は次の意味で global な性質をもっていない。即ち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Q_n^{(q)} = 0 \quad (1-5)$$

これより λ_q は次の様に表すことができる

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln M_q(n) \quad (1-6)$$

ここに導入された二つの関数、 λ_q 、 $Q_n^{(q)}$ が我々の新しい方法論の出発点である。時系列 $\{u_j\}$ の長時間にわたる性質 (static あるいは global な性質) は λ_q によって解析され、 $\{u_j\}$ に内在する相関 (dynamics) は $Q_n^{(q)}$ により調べられる。

カオスの研究では、しばしば抽象的な系が用いられる。抽象モデルの役割と意義については § 5-4 に述べてある。また研究が数学的遊戯に墮することがないように、モデルとしては自然現象の本質的特徴を表現している簡潔な系を採用し、それを解析するときには従来の伝統的物理学との接点を求めそれとの内的関係を探求する必要がある。

§ 2 揺動スペクトル理論

2-1 拡散性と間欠性の相補性とスケーリング則

時系列の長時間的挙動の特徴は λ_q による解析方法からみると以下に述べる二つの側面がある。この特徴がどのようにして λ_q によって捉えられるかを調べる。

λ_q を次の様に展開する

$$\lambda_q = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n q^{n-1}, \quad (2-1)$$

ここで

$$\kappa_n \equiv \frac{1}{n!} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\langle (j \alpha_j)^n \rangle_c}{j^n}, \quad (2-2)$$

上式の $\langle \dots \rangle_c$ はキュムラント平均である。展開の収束半径を κ としたとき、 λ_q は次の二つの領域に分けられる。

(1) $|q| \ll \kappa$; 拡散領域

この領域では λ_q は次の様に展開できる。

$$\lambda_q = \lambda_{q=0} + Dq + \dots, \quad (2-3)$$

ここで $\lambda_{q=0}$ と D は時系列の平均値および拡散係数をそれぞれ表している。即ち

$$\lambda_{q=0} = \langle u_j \rangle, \quad (2-4)$$

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{d\lambda_q}{dq} \right)_{q=0}, \\ &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \langle \left(\sum_{j=0}^{n-1} u_j - \langle \sum_{j=0}^{n-1} u_j \rangle \right)^2 \rangle / 2n. \end{aligned} \quad (2-5)$$

この領域は平均値と拡散係数で特徴づけられているので、拡散領域と名づける。時系列が純ガウス過程の場合、厳密に $\lambda_q = \lambda_{q=0} + Dq$ が成立する。これが時系列の一つの典型例であり、熱雑音によるブラウン運動がこの過程で理想化できる。また、純間欠カオスではこの領域がなくなる。

(2) $|q| \gg \kappa$; 間欠性領域

この領域では λ_q は次の様に展開できる。

$$\lambda_q = \lambda_{\varepsilon\infty} - \frac{1}{q} \left[\frac{1}{\tau_\varepsilon} + \text{const} \cdot \exp(-\gamma_\varepsilon |q|) \right] + \dots, \quad (2-6)$$

ここで ε は $\varepsilon = \pm$ を表し、 $\tau_\varepsilon > 0$ 、 $\gamma_\varepsilon > 0$ である。

この領域は $\lambda_{\varepsilon\infty}$ とラミナー状態のコヒーレンス時間 τ_ε で特徴づけられるので、間欠性

領域と名づける。この領域の意味および解釈は § 2-5 の例を調べると良く理解できる。

一つの時系列は拡散性と間欠性という二つの側面をもっている。これは一つの物体でもそれが高温で示す性質と低温で示す性質をもっているのに対応している。また拡散性と間欠性は互いに相補的であると理解できる。これらについては § 5-3 において調べる。

全領域にわたってスケーリング則が得られる場合がある。これについては § 2-3, § 2-4, および § 2-5 において具体例が示される。この場合は、二つの領域に内的関係があることをスケーリング則は示している。スケーリング則はカオスという複雑な運動の中にひそんでいた法則である。カオスの物理学では、より普遍的な法則の探求および法則の体系化、実験との比較、応用が課題となる。

2-2 熱力学形式

巨視系の過渡現象の扱いは一般に困難である。ところが過渡現象を示さないaged系に対しては、統計熱力学を構成することができる。カオスにおいても過渡過程の解析は難しいので、我々は定常カオスのみを取り扱ってきた。対象を定常カオスに限れば、以下に述べる定常カオス理論を我々は構築することができる。この理論は熱力学形式を構成している。そこで定常カオス理論と統計熱力学の関係を調べることにする。

定常カオス理論と統計熱力学のパラレリズム (parallelism) は、それらの基本的立脚点の共通性によって成立する。それは

(A) 問題とすべき性質 (物理量) として “長時間にわたる大局的性質 (global property)” を考える。

(B) 大局的物理量として “指数的特性量の極限值” を採用する。

まず統計熱力学の理論形式を復習する。粒子数 N 、体積 V の系のエネルギーを $E(N, V)$ とすると、この系の分配関数 Z は

$$Z(N, \beta, V) = \int_0^{\infty} dE \Omega(N, \beta, V) e^{-\beta E(N, V)}, \quad (2-7)$$

$$= \langle \exp [-\beta E(N, V)] \rangle, \quad (2-8)$$

ここで $\Omega(N, \beta, V)$ は状態密度、 β は逆温度である。ヘルムホルツの自由エネルギー F は

$$F(N, \beta, V) = - \frac{1}{\beta} \ln \langle \exp [-\beta E(N, V)] \rangle. \quad (2-9)$$

上式で、 $\beta = -\theta$ と取れば、 Z はモーメント母関数、 $-\beta F$ はキュムラント母関数となる。また、 $\beta = -i\xi$ と取れば、 Z は特性関数とみなせる。巨視系の熱力学量を導くためには、熱力学的極限を取る必要がある。特に、相を定義するためには、この操作が必要不可欠である。極限を取った一粒子当りの自由エネルギーは次の様に表せる、

$$f(v, \beta) = - \frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \langle \exp [-\beta E(N, V)] \rangle, \quad (2-10)$$

ここで $v (= V/N)$ は一定としている。

極限操作 $N \rightarrow \infty$ によって、巨視系の本質的性質 (bulk property) が抽出される。 $-\beta f(v, \beta)$ は、もはやキュムラント母関数ではなく、逆変換によって $\Omega(N, E)$ を求めることはできない。即ち、情報の縮約が行われている。

ところで定常一次元時系列 $\{u_j\}$ の相似指数 (1-6) 式は次の様に書ける。

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \langle \exp(q U_n) \rangle, \quad (2-11)$$

$$U_n \equiv \sum_{j=0}^{n-1} u_j . \quad (2-12)$$

式(2-10)と式(2-11)を比較すると、次の関係を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{統計熱力学} & : f(\beta) \quad E(N) \quad N \quad \beta \\ \text{定常カオス理論} & : \lambda_q \quad -U_n \quad n \quad q \end{array}$$

即ち、 λ_q を自由エネルギーとみたと、 q を β 、 n を N 、そして $-U_n$ を $E(N)$ に対応させれば定常カオスの熱力学形式が得られる事を示唆している。

実際、この熱力学形式は次の様にして得られる。まず揺動量 α_n がある値 α' をとる確率密度 $\rho_n(\alpha')$ を導入する。この確率密度を用いると q 次モーメント $M_q(n)$ は次の様に表せる。

$$M_q(n) \sim \int \rho_n(\alpha') \exp(q \alpha' n) d\alpha' . \quad (2-13)$$

大きな n に対して、 $\rho_n(\alpha')$ は漸近的に次の様に書けると仮定する。

$$\rho_n(\alpha') \sim \exp[-n \sigma(\alpha')] , \quad (2-14)$$

ここで $\sigma(\alpha')$ は揺動スペクトルであり次の性質を持つ。

$$\sigma(\alpha') \geq 0 , \quad \sigma''(\alpha') \geq 0 . \quad (2-15)$$

n が増大するにつれ、 α_n が α' という値を取る確率は減少していくが、その減少の速度をスペクトル $\sigma(\alpha')$ は表している。鞍点法を用いると (q, λ_q) から $(\alpha, \sigma(\alpha))$ に変換する Legendre 変換が得られる。これは次の様に与えられる。

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq} (q \lambda_q) , \quad (2-16)$$

$$\sigma(\alpha) = q^2 \frac{d \lambda_q}{dq} = q[\alpha - \lambda_q] . \quad (2-17)$$

上の関係式からわかるように、熱力学との対応は、

$$\begin{array}{ll} q & : \text{逆温度} \\ \lambda_q & : \text{1粒子当りヘルムホルツ自由エネルギー} \\ \alpha & : \text{1粒子当り内部エネルギー} \\ \sigma & : \text{1粒子当りエントロピー} \end{array}$$

これより $(q, \lambda_q, \alpha(q), \sigma(\alpha))$ は熱力学形式を構成していることがわかる。

ところで β は 逆温度であるという明確な物理的な内容をもっている。 q はモーメントの次数であるから、このままの解釈では上記の対応は形式的なものに留まる。そこで β と q に共通する意味を探ることにする。相似指数 λ_q については次の様に解釈できる。間欠性領域 $q \gg \kappa$ ($q \ll \kappa$) では大きな U_n (小さな U_n) が主に λ_q に寄与し、

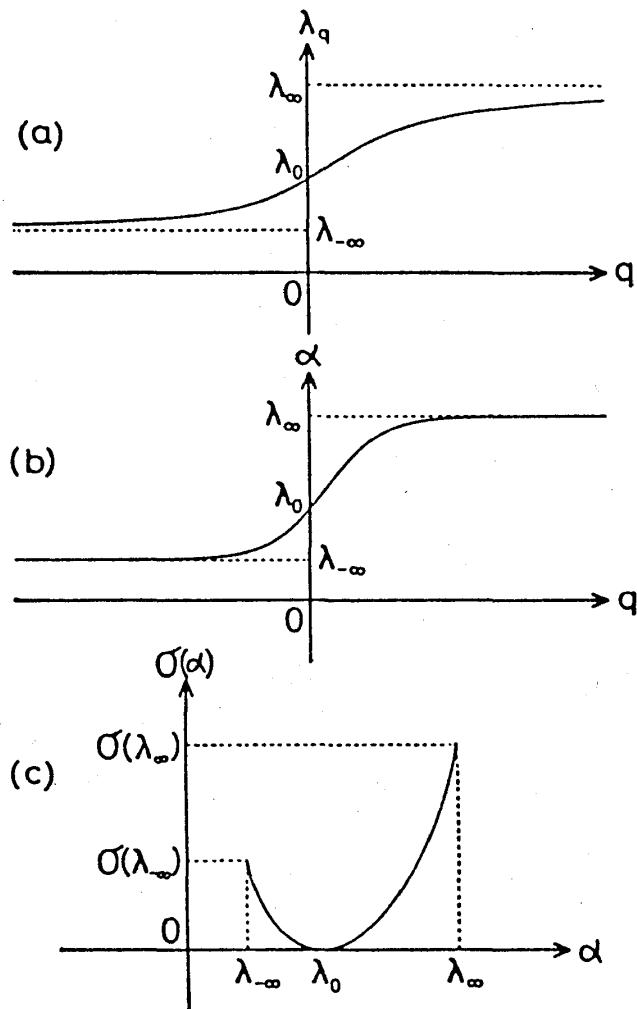


Fig.2.1. Schematic forms of λ_q , $\alpha(q)$ and $\sigma(\alpha)$.

$q = 0$ の場合はアンサンブル・メンバーのどれもが一様に λ_q に寄与している。統計熱力学では、低温 $\beta \gg 1$ では小さなエネルギーをもつ状態が主に寄与し、無限大温度 $\beta = 0$ では、どの状態も一様に寄与する。このように β と q は寄与をコントロールするパラメーターになっている。そこで我々は β と q の共通の意味を表す新しい概念として “filtering parameter” を導入する。ここでいう filter はフーリエ成分のフィルターや、単に重みづけ ($W_1 a_1 + W_2 a_2 + \dots$; における W) のパラメーターではなく、指数特性量 $f(v, \beta)$ (λ_q) への加算的量 $E(N, V)$ (U_n) の寄与を (2-10) ((2-11)) のようにコントロールしているものである。

拡散的領域 ($|q| \ll \kappa$) と間欠的領域 ($|q| \gg \kappa$) での漸近型を求める。拡散的領域では、

$$\alpha = \lambda_0 + 2Dq, \quad (2-18)$$

$$\sigma(\alpha) = \frac{(\alpha - \lambda_0)^2}{4D}, \quad (2-19)$$

が得られる。式 (2-19) に示されている $\sigma(\alpha)$ の $\alpha = \lambda_0$ 近傍の放物線曲線は、中央極限定理の結果として知られている。すなわち、揺動スペクトル $\sigma(\alpha)$ が最小になる α の値が u_j の平均値であり、この点における $\sigma(\alpha)$ の曲率より u_j の分散が求まる。これに対して、間欠性領域では、

$$\alpha - \lambda_{\pm\infty} \propto \exp(-\gamma_{\pm}|q|), \quad (2-20)$$

$$\sigma(\alpha) - \frac{1}{\tau_{\pm}} \propto |\alpha - \lambda_{\pm\infty}| \ln |\alpha - \lambda_{\pm\infty}|. \quad (2-21)$$

上式は拡散的領域での結果 (2-18)、(2-19) と著しく異なっており、一般に摂動論的に両者をつなぐことはできない。拡散的領域の性質は従来から注目されていた性質であるが、間欠的領域の性質は我々によって初めて明確に特徴づけられた性質である。間欠的領域の現象は、一般に出現確率が小さく無視される場合が多いが、純間欠過程の場合は、拡散的領域の広さが無限小となり間欠的性質のみによって過程を特徴づけることができる。

α の変域は $\lambda_{-\infty} \leq \alpha \leq \lambda_{\infty}$ であるから、 $\alpha > \lambda_{\infty}$ と $\alpha < \lambda_{-\infty}$ では $\rho_n(\alpha) = 0$ 。これより $\alpha > \lambda_{\infty}$ と $\alpha < \lambda_{-\infty}$ では $\sigma(\alpha) = \infty$ である。揺動スペクトル、 λ_q および $\alpha(q)$ の概略図を図 2.1 に示してある。

うえに q, λ_q, α と $\sigma(\alpha)$ が熱力学形式 K を構成していることを示したが、これと異なる変数の組 $\hat{q}, \hat{\lambda}_{\hat{q}}, \hat{\alpha}$ と $\hat{\sigma}(\hat{\alpha})$ によっても熱力学形式 $\hat{K}$ を構成することができる。形式 K から形式 $\hat{K}$ への変換は 2 個の変数の関係より定まる。例えば変換 $T(a, b)$ は

$$\hat{q} = aq + b, \quad (2-22)$$

$$\hat{\lambda}_{\hat{q}} = -(q/\hat{q})\lambda_q. \quad (2-23)$$

ここで a と b は定数である。この $T(a, b)$ を用いると

$$\hat{\alpha} = -\alpha / a, \quad (2-24)$$

$$\hat{\sigma}(\hat{\alpha}) = -b\alpha / a - \sigma(\alpha). \quad (2-25)$$

次の章で、変換 $T(a, b)$ の具体例が示される。

この節において λ_q を使い $\alpha(q)$ と $\sigma(\alpha)$ を導入し、組 $(\lambda_q, \alpha(q), \sigma(\alpha))$ が熱力学形式を構成していることを示した。この形式およびこれを用いて行う解析方法の総体を「揺動スペクトル理論」と呼ぶことにする。

2-3 複素分配関数によるカオス転移の分類

揺動スペクトル理論と統計熱力学の形式的類似性について前節で調べた。統計熱力学においては、複素大分配関数を用いた Yang-Lee の相転移論がある。これに倣い揺動スペクトル理論の複素分配関数 $Z(z)$ を次式で導入する。

$$Z(z) = \exp(z \lambda_z). \quad (2-26)$$

方程式 $Z(z) = 0$ の根の分布よりカオス転移を分類することを試みる。以下いくつかの例について調べる。

(A) カオス拡散のモデル

拡散は多くの場合、熱雑音によって生じる。ところがカオス運動によっても拡散が生じる場合がある。単位時間当りの粒子の位置変化 Δ は、 j を離散時間としたとき x_j の関数とする。 x_j はマップ $f(x)$ によって変化するとし、マップとして次のベルヌーイ変換 $B(p, 1-p)$ を採用する。

$$f(x) = \begin{cases} x/p, & (0 \leq x < p) \\ (x-p)/(1-p), & (p \leq x < 1) \end{cases} \quad (2-27)$$

ここで p はコントロール・パラメーターであり、その変域は $0 \leq p \leq 1$ とする。位置変化 Δ は次の規則より与えられるとする。

$$\Delta(x_j) = \begin{cases} 0, & (0 \leq x < p) \\ 1, & (p \leq x < 1) \end{cases} \quad (2-28)$$

この場合の相似指数 λ_q は、 u_j として $\Delta(x_j)$ をとると次のように求まる。

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \ln [p + (1-p) e^q]. \quad (2-29)$$

ドリフト速度は $\lambda_0 (= 1-p)$ であり、拡散係数は $D = p(1-p)/2$ である。コントロール・パラメーターが $p=0(1)$ のとき拡散はなく、 λ_q は一定値 $0(1)$ をとる。この場合の複素分配関数は、(2-26)と(2-29)より

$$Z(z) = p + (1-p) e^z. \quad (2-30)$$

上式の $Z(z)$ を用いた方程式 $Z(z)=0$ の根 z_n は次のように求まる。

$$z_n = \ln [p/(1-p)] + (2n+1) \pi i. \quad (2-31)$$

($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

式(2-30)の $Z(z)$ は超越整関数であり一位の零点をもっている。この零点と根は一致している。無限個の根が $\operatorname{Re}(z) = \ln [p/(1-p)]$ という線上に等間隔 2π で並んでいる。任意の p の値にたいして実軸上に根はなく、拡散の発生点 $p=0(1)$ において根がリーマン球面の北極に集積する。この集積が転移に対応している。根の分布と λ_q の q 依存性を図2.2に示してある。

(B) 局所リヤプノフ指数の揺らぎ

一般に局所リヤプノフ指数は揺らいでいる。この揺らぎは u_j として $u_j = \ln |f'(x_j)|$ を採用すると、この変数にたいする λ_q より特徴づけられる。先に用いた(2-27)のマップの場合、 λ_q は次のように計算できる。

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \ln [p^{1-p} + (1-p)^{1-p}]. \quad (2-32)$$

この λ_q は関係式 $\lambda_q(1-p) = \lambda_q p$ をみたしている。ドリフト速度 $\lambda_0 = -p \ln p - (1-p) \ln (1-p)$ は、この場合、従来のリヤプノフ指数 $\lambda = \langle \ln |f'(x)| \rangle$ に等しい。リヤプノフ指数の揺らぎの拡散的性質は $D = d\lambda_q/dq|_{q=0} = [p(1-p)/2] [\ln \{(1-p)/p\}]$ より特徴づけられる。最大リヤプノフ指数と最小リヤプノフ指数はそれぞれ $\lambda_{\infty} = \operatorname{Max} [-\ln p, -\ln (1-p)]$ と $\lambda_{-\infty} = \operatorname{Min} [-\ln p, -\ln (1-p)]$ より与えられる。式(2-32)の場合の複素分配関数は

$$Z(z) = p^{1-z} + (1-p)^{1-z}. \quad (2-33)$$

この $Z(z)$ による方程式 $Z(z)=0$ の根は

$$z_n = 1 + \frac{(2n+1)}{\ln [(1-p)/p]} \pi i. \quad (2-34)$$

($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

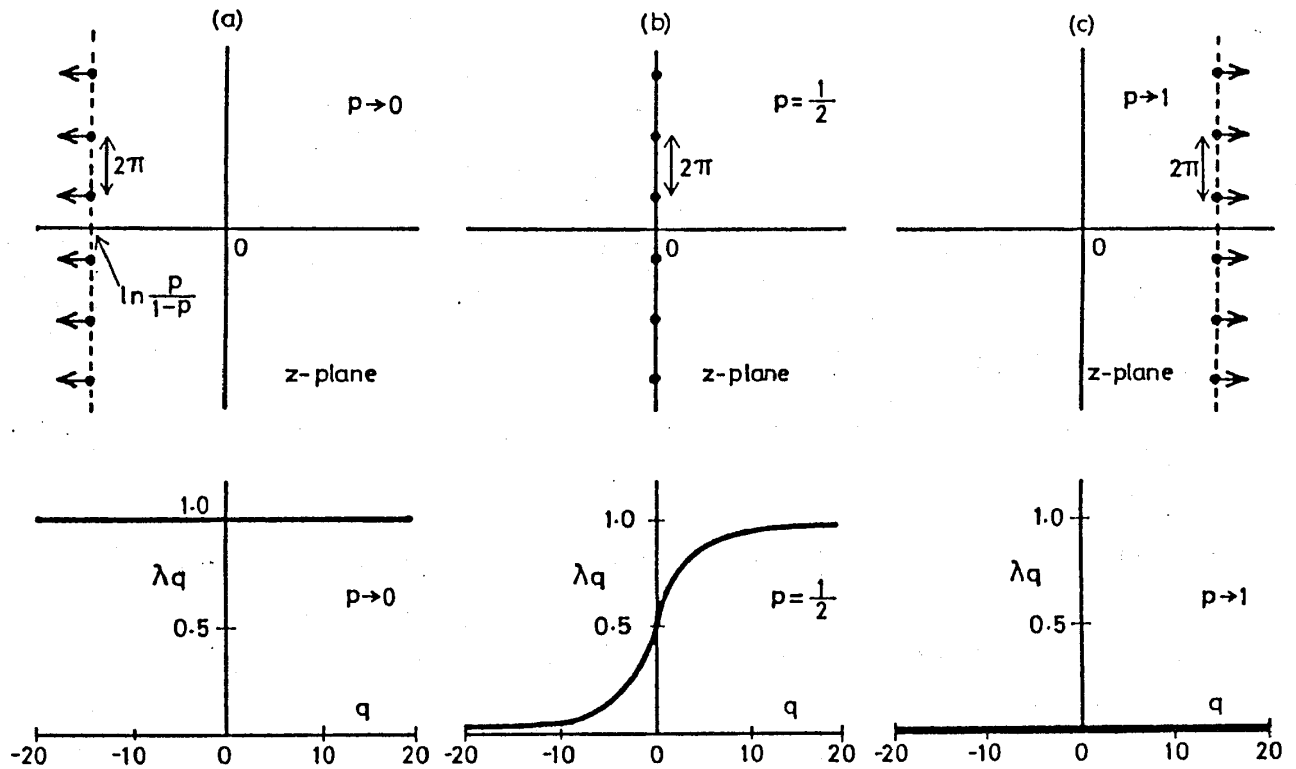


Fig.2.2. The distribution of solutions of $Z(z)=0$ on the complex z -plane and λ_q vs q for the chaos induced diffusion in which $Z(z)$ and λ_q are expressed by Eqs. (2-30) and (2-29), respectively.

この場合も $Z(z)$ の一位の零点と根は一致している。根は $\operatorname{Re}(z)=1$ という線上に等間隔で並んでいる。その間隔は $|2/\ln[(1-p)/p]|$ であり、これは p に依存している。二つの極限の場合 (i) $p=0(1)$ と (ii) $p=1/2$ がある。

(i) の場合

コントロール・パラメーター p を $0(1)$ に近づけていくと、非常に間欠的なカオスが $p=0(1)$ でとまる。このとき、 q で微分した λ_q の値が $q=1$ のところで対数的に発散し、根が $z=1$ のところに集積する。これは実根の出現と転移が対応していることを表している。

(ii) の場合

揺らぎは $p=1/2$ でなくなり、 λ_q は一定値 $\ln 2$ をとる。このとき根はリーマン球面の北極に集積する。

この場合の根の分布と λ_q の q 依存性を図 2.3 に示してある。

(C) 自発的対称性の破れ

拡張されたマップ $f(x)=x+r\sin(2\pi x)$ の間欠転移点 $r=r_*(=1)$ の近くでは $u_j=u(x_j)$ を次の規則で与えると λ_q のスケーリング関数が得られる。

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \{x \mid (f(x) - [x]) > 1\}, \\ 0, & \{x \mid 0 \leq (f(x) - [x]) \leq 1\}, \\ -1, & \{x \mid (f(x) - [x]) < 0\}, \end{cases} \quad (2-35)$$

ここで $[x]$ は x の整数部を表している。

コントロール・パラメーター r が $r < r_*$ のとき、 λ_q について次のスケーリング関数を得る。

$$\lambda_q = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left[\frac{q}{q_*} \right], \quad (2-36)$$

ここで q_* はスケーリング・パラメーターであり、次式で与えられる。

$$q_* = (2/\pi D). \quad (2-37)$$

この場合、拡散係数 D は $r=r_*$ で発散する。臨界点の上 $r > r_*$ では、拡散を伴わないドリフト運動、すなわち $U_j = \pm j$ 、が現れ、 λ_q は $+1$ か -1 のいずれかをとる。この選択は、初期条件によって決まる。つまり $r=r_*$ で自発的対称性の破れを伴う転移が起こっている。式 (2-36) の複素分配関数は

$$Z(z) = \exp[A(z)], \quad (2-38)$$

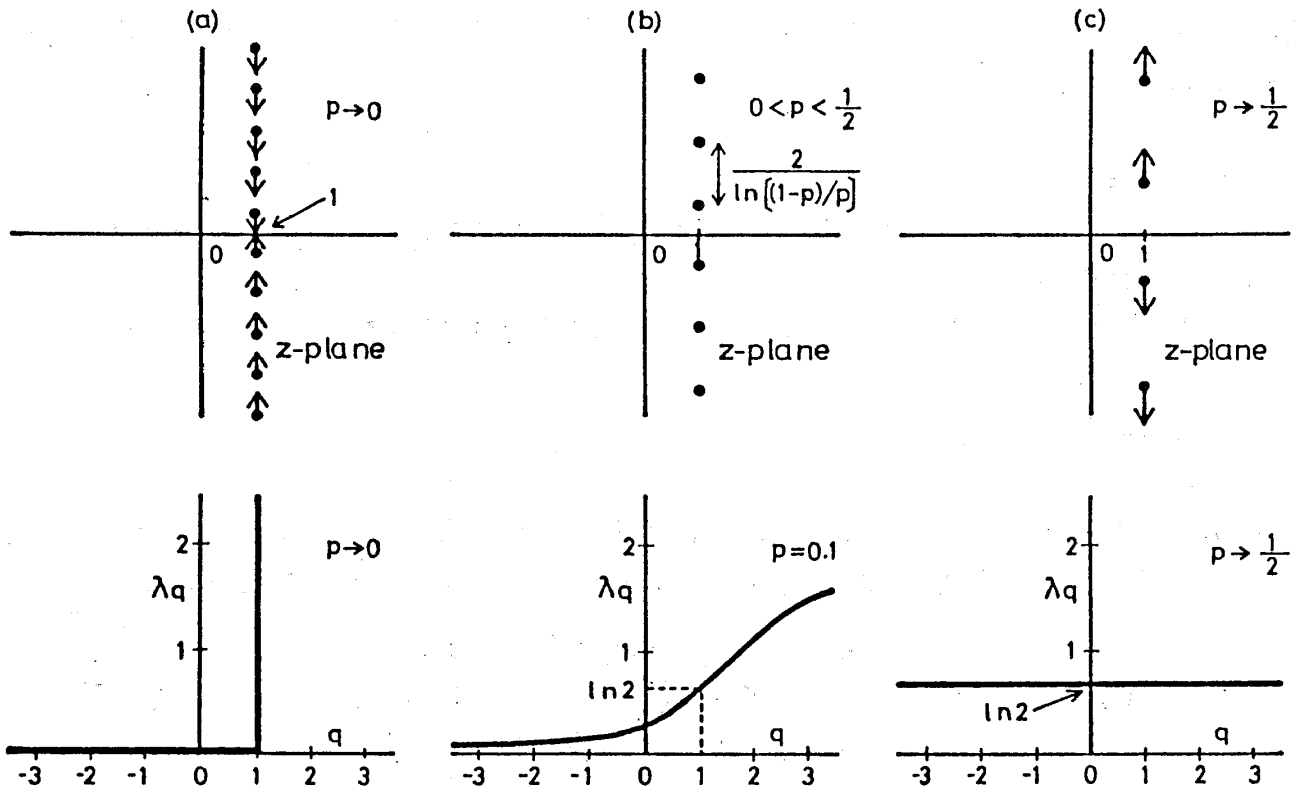


Fig.2.3. The distribution of solution of $Z(z)=0$ on the complex z -plane and λ_q vs q for the fluctuation dynamics of local Lyapunov exponents in which $Z(z)$ and λ_q are expressed by Eq.(2-33) and (2-32), respectively.

ここで

$$A(z) \equiv \frac{2z}{\pi} \tan^{-1} \left[\frac{z}{q_*} \right] \quad (2-39)$$

この複素分配関数は多価関数であり、一対の対数的分岐点を $z = \pm i q_*$ にもっている。これは $\tan^{-1} [z/q_*] = (1/2i) \ln [(1 + iz/q_*) / (1 - iz/q_*)]$ という関係式より求まる。

方程式 $Z(z) = 0$ を解くために、 $A(z)$ を次のように実数部と虚数部にわける。

$$A(z) = \frac{q_*}{\pi} \left[x' \tan^{-1} \frac{2x'}{1-x'^2-y'^2} - y' \tanh^{-1} \frac{2y'}{1+x'^2+y'^2} + i \left\{ y' \tan^{-1} \frac{2x'}{1-x'^2-y'^2} + x' \tanh^{-1} \frac{2y'}{1+x'^2+y'^2} \right\} \right], \quad (2-40)$$

ここで x と y は、それぞれ z の実数部と虚数部であり、 $x' \equiv x/q_*$ 、 $y' \equiv y/q_*$ である。

転移点に近づくと (2-37) より $q_* \rightarrow 0$ となるから $|x| \rightarrow \infty$ となる、このとき $\tan^{-1} [2x / (1 - x'^2 - y'^2)]_{|x| \rightarrow \infty} = n\pi$; ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) が成立する。これより (2-40) の右辺の実部の第一項が $Z(z) = 0$ の根を与えることがわかる。この根はリーマン球面の北極に集積する。また実部の第二項は2根 $(x, y) = (0, \pm q_*)$ 、すなわち $z = \pm i q_*$ を与える。これは対数的分岐点と同一である。この2根は転移点で原点 $z = 0$ に集まる。この場合も実根の出現と転移が対応している。

この場合の根の分布と λ_q の q 依存性を図2.4に示してある。

転移には λ_q の q 依存性よりみると2つのタイプがある。コントロール・パラメータを臨界点に近づけると (a) λ_q の q 依存性がなくなる (b) λ_q がある $q = q_*$ のところで特異性をもつようになる。これを方程式 $Z(z) = 0$ の根の分布でみると、(a) の場合は根がリーマン球面の北極に集積し、(b) の場合は根が $z = q_*$ に集まり、実根が出現することになる。

2-4 対称性の破れを伴うカオス転移

次のマップで生成される時系列を調べる。

$$f(x) = \begin{cases} f^+(x) & \text{for } x \in \Omega_+ \equiv (0, 1], \\ f^-(x) & \text{for } x \in \Omega_- \equiv [-R, 0), \end{cases} \quad (2-41)$$

ここで $f^+(x)$ と $f^-(x)$ は相似である、すなわち $f^-(x) = -R f^+(x/R)$ ($f^\pm(0) = 0$)。 $f^+(x)$ は領域 Ω_+ で準連続な不変測度をもつとし、チャンネル $\omega_+ \equiv (1 - \varepsilon, 1]$ を通して位相点が Ω_+ から Ω_- へ移るとする。また、 $f^+(x)$ はただ1つの極大値を

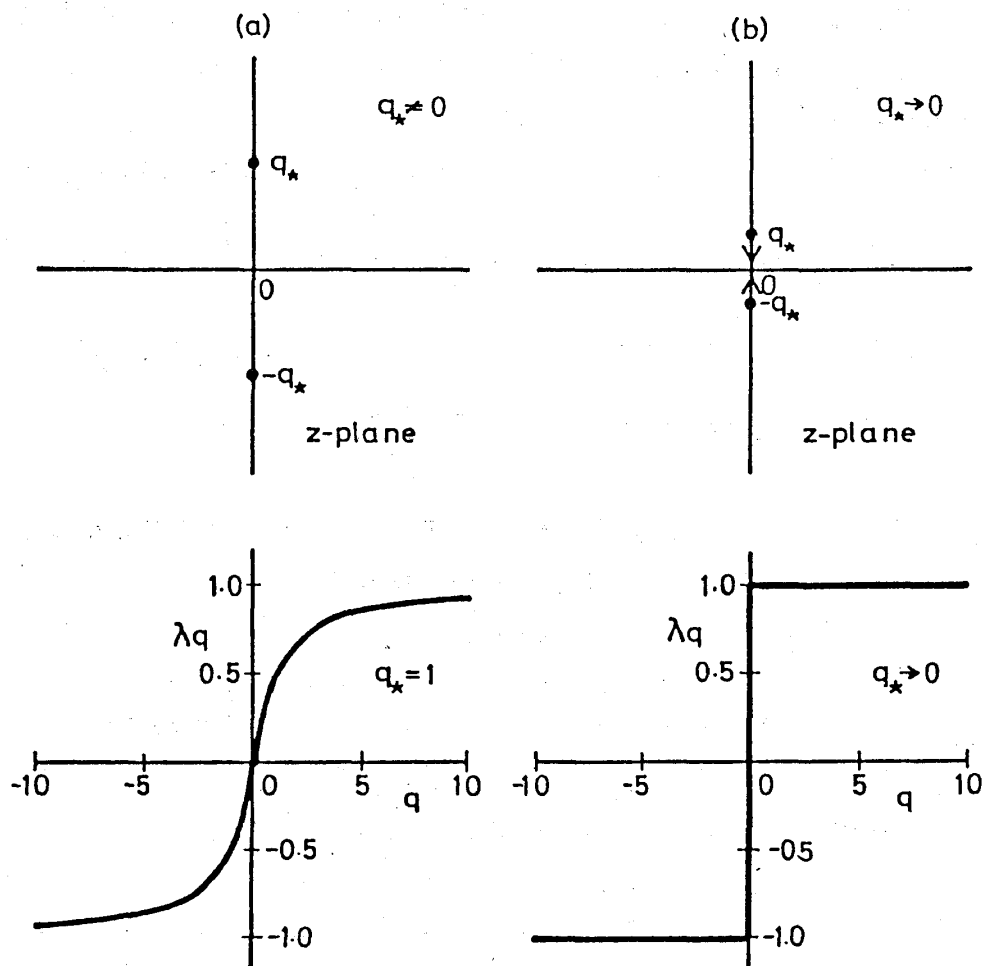


Fig.2.4. The distribution of solutions of $Z(z)=0$ on the complex z -plane and λ_q vs q for the scaling function in which $Z(z)$ and λ_q are expressed by Eqs.(2-38) and (2-36), respectively.

$x \equiv x_m^+$ でもち、その周りで、 $f'(x) = 1 - c(x - x_m^+)^2$ と展開できるとする。ここで c は正の定数である。マップ $f(x)$ の典型例を図2.5に示してある。数値実験を行うに際し次のマップを用いた。

$$f'(x) = 4x(-x + 1 - \varepsilon_+) / (1 - \varepsilon_+)^2, \quad (2-42)$$

ここで $\varepsilon_+ (> 0)$ は領域 ω_+ の幅であり、これをコントロール・パラメーターとする。転移点は $\varepsilon_+ = 0$ で与えられる。

位相点が $\Omega_+ (\Omega_-)$ から $\Omega_- (\Omega_+)$ へ移る確率を $p_+ (p_-)$ とする。この場合の不変測度は $\rho(x) \doteq c^{-1/2} \rho(x_m^+) (1 - x)^{-1/2}$; $x \in \omega_+$ であるから、

$$p_+ = \int_{\omega_+} \rho(x) dx \doteq 2 \rho(x_m^+) (\varepsilon_+ / c)^{1/2}, \quad (2-43)$$

同様にして、

$$p_- = \int_{\omega_-} \rho(x) dx \doteq 2 \rho(x_m^-) (\varepsilon_- R / c)^{1/2}. \quad (2-44)$$

ところで転移点では $\rho(x_m^+) / \rho(x_m^-) = R$ であるから、

$$p_+ = p_- \equiv p / 2 \propto \varepsilon_+^{1/2} \quad (2-45)$$

同一の領域に留まる平均の時間 τ_r 。(residence time)は $\tau_r = p^{-1} \propto \varepsilon_+^{-1/2}$ となる。

転移点近傍の「対称性のダイナミクス」と「間欠性の発達」を解析するために、次の2つの粗視化を行う。

$$G(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \Omega_+), \\ -1 & (x \in \Omega_-), \end{cases} \quad (2-46)$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \omega_+), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad (2-47)$$

ここで $g(f(x)) = |G(f(x)) - G(x)| / 2$.

粗視化を行うまえの3つのタイプの時系列と、上記の粗視化の例を図2.6に示してある。

$G(x)$ を対称性変数、 $g(x)$ をバースト変数と呼ぶことにする。

(A) 対称性変数のダイナミクス

バーストは互いに独立だと仮定すると、2時間相関関数 $C_0(t)$ は次の型にかける。

$$C_0(t) \doteq \exp(-t / \tau_0) \quad (2-48)$$

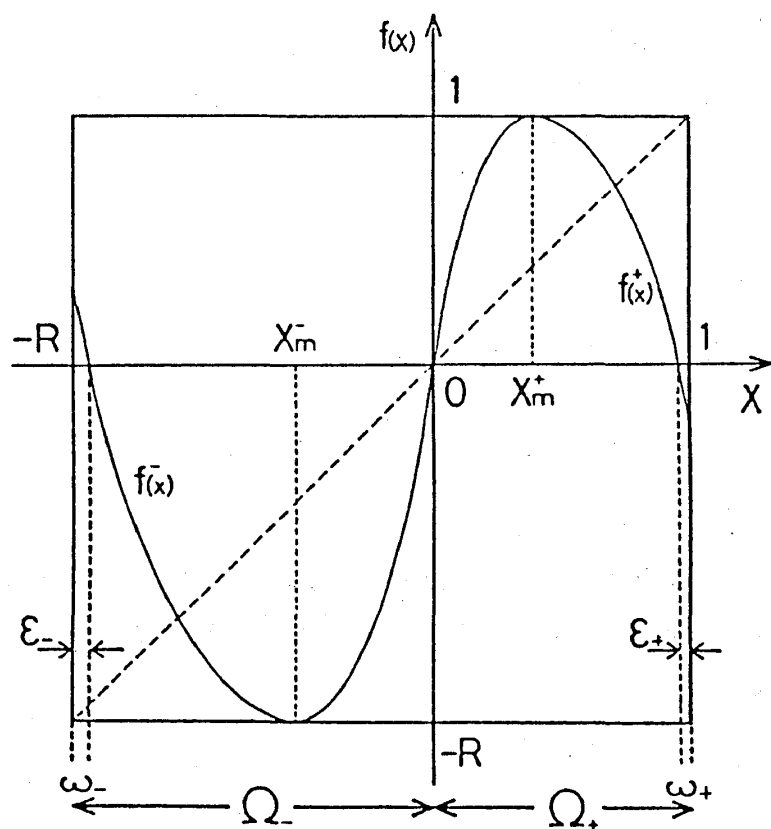


Fig.2.5. Schematic figure of mapping system exhibiting the symmetry-breaking transition.

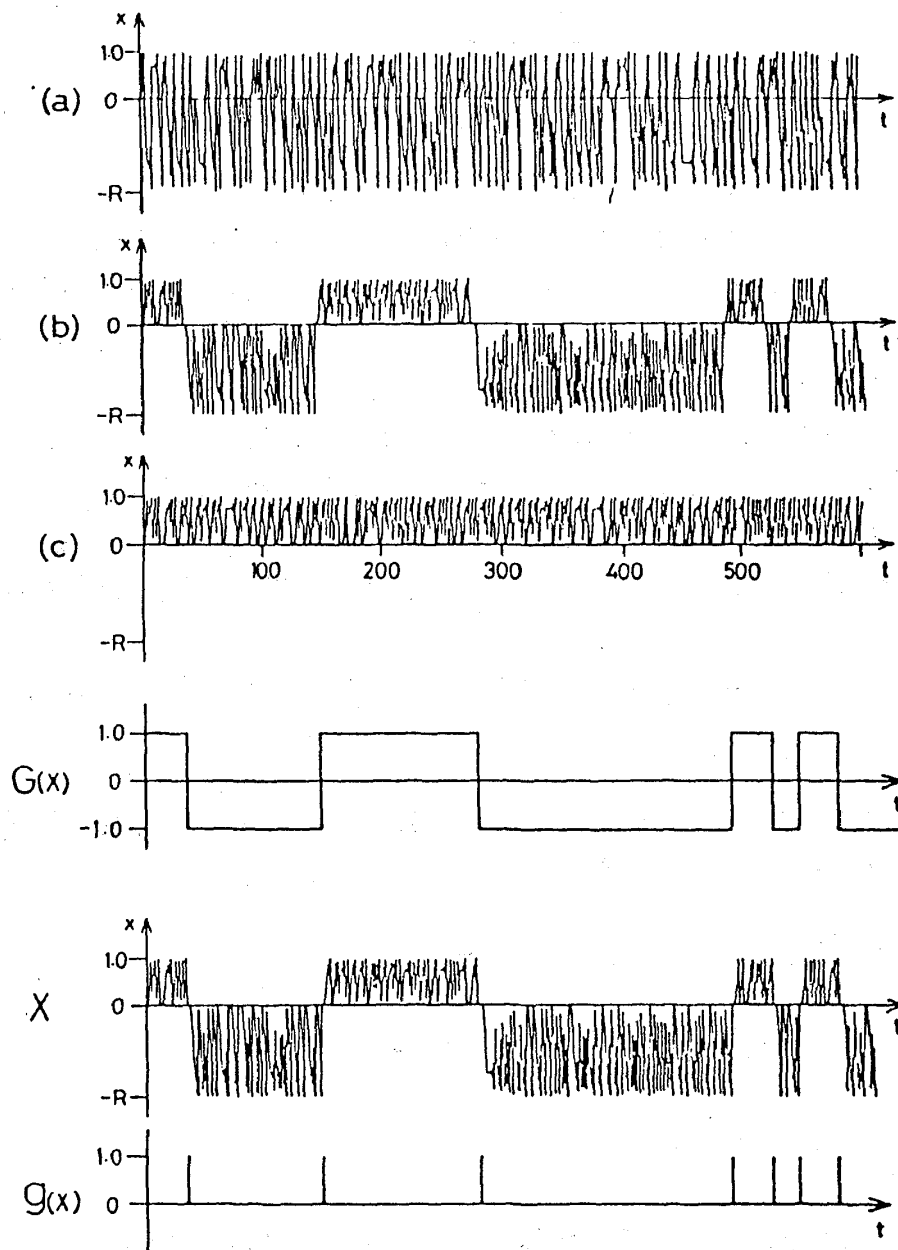


Fig.2.6. When the system is sufficiently above the transition point, migration processes over $x < 0$ and $x > 0$ frequently occur (a). As the system approaches the transition point, the intermittency characteristic develops (b). Just at the transition point, no migration is observed (c). Remaining three figures show the construction of coarse-grained variables $G(x)$ and $g(x)$ from the series $x(=x_j)$ (see Eqs. (2-46) and (2-47)).

ここで、

$$\tau_0 = 1 / \ln(1 - 2p)^{-1} \propto \varepsilon_+^{-1/2} \quad (2-49)$$

は相関時間である。これより、拡散係数 D_0 は

$$D_0 = (1/2) \coth(1/2 \tau_0) \doteq \tau_0 \propto \varepsilon_+^{-1/2}, \quad (2-50)$$

と計算される。コントロール・パラメータ ε_+ が臨界点 0 に近づくと、拡散が異常に大きくなるが、これは相関時間が長くなることによっている。この結果は数値実験と一致している。また、(2-48) から導かれる、パワー・スペクトル $S(\omega) \doteq \sinh(1/\tau_0) / [\cosh(1/\tau_0) - \cos \omega]$ も数値実験と極めて良く一致する。これはバーストの独立性の仮定が正しいことを示している。

次に λ_q を用いて $G(x_t)$ を解析することにする。対称性より、 $\lambda_{-q} = -\lambda_q$; $\varepsilon_+ > 0$ 、また臨界点の近くでは $\lambda_\infty(\lambda_{-\infty}) = 1(-1)$ 。臨界点に近づくと D_0 が大きくなるので、拡散領域の中 κ_0 は $\kappa_0 \sim 1/D_0 \sim \varepsilon_+^{1/2}$ に従って小さくなる。これは臨界点近傍では、間欠性が発達することによっている。 λ_q の数値実験の結果を図 2.7 に示してある。

臨界点の近傍では、図 2.8 に示しているように、スケーリング則が成立する。ここで、

$$q_* \equiv 2(\pi D_0)^{-1} \propto \varepsilon_+^{1/2} \quad (2-51)$$

は拡散領域と間欠領域の境界を推測するときに用いられる。すなわち境界は $q \doteq q_*$ のところである。スケーリング関数は次のように与えられる。

$$\lambda_q = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{q}{q_*}\right) \quad (2-52)$$

これは、図 2.8 において実線で表されている。

(B) バーストのダイナミックス

$C(t)$ の運動方程式において記憶項を無視すると、次式を得る。

$$C_g(t) \doteq C_g(0) (-1)^t \exp(-t/\tau_g), \quad (2-53)$$

ここで、 $\tau_g = -1 / \ln |C_g(1)/C_g(0)|$ 。バーストは互いに独立であるという仮定を用いると

$$\tau_g \propto (\ln \varepsilon_+^{-1})^{-1}, \quad (2-54)$$

$$\begin{aligned} D_g &\doteq C_g(0) \tanh(1/2 \tau_g) / 2 \\ &\doteq p/2 = 1/4 D_0 \propto \varepsilon_+^{1/2}. \end{aligned} \quad (2-55)$$

対称性変数 $G(x)$ の場合と逆に、臨界点に近づくと、相関時間 τ_g と拡散係数 D_g は零に

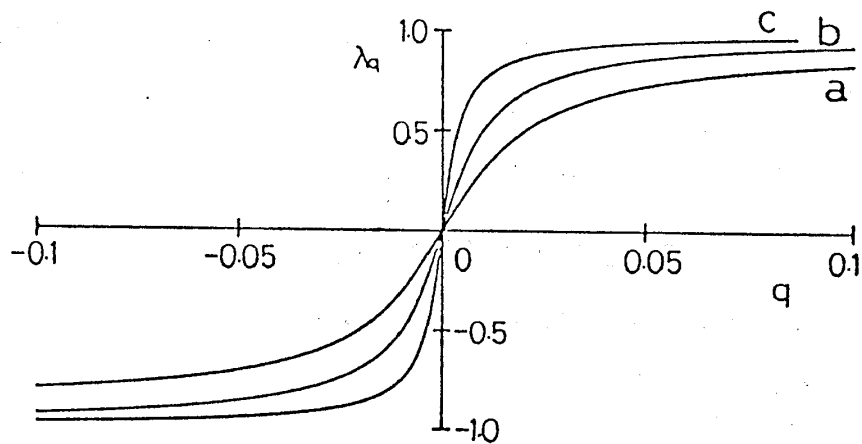


Fig.2.7. Numerical results of similarity exponents for $G(x_j)$. The parameter ϵ_+ , which appears in Eq.(2-42), is taken as (a) 4×10^{-4} , (b) 10^{-4} and (c) 1.225×10^{-5} .

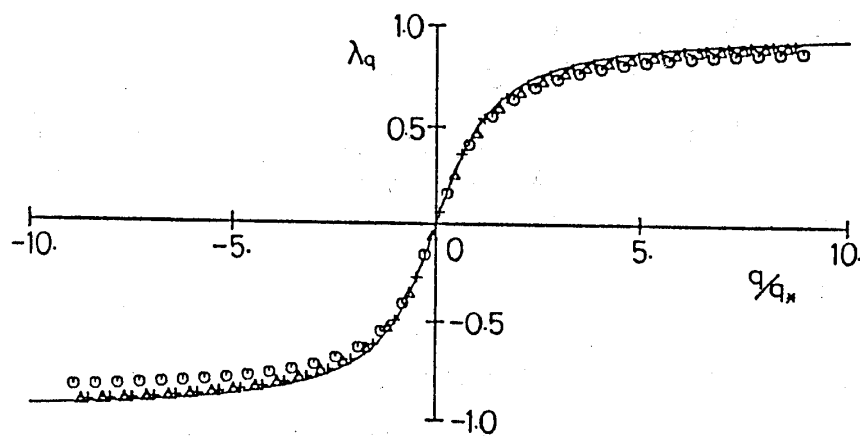


Fig.2.8. Comparison of the scaling function (2-52) (solid line) with numerical results given in Fig.2.7. q_* was defined in (2-51). Symbols o, Δ and + indicate numerical results for a, b and c, respectively.

近づく。これより、 $\varepsilon_+ \rightarrow 0$ ではパワー・スペクトルは白色雑音型で近似できる。すなわち

$S(\omega)/C_g(0) \doteq \sinh(1/\tau_g) / [\cosh(1/\tau_g) + \cos \omega] \rightarrow 1$ 。
臨界点近傍では τ_g は小さくなるので、バーストはランダムに発生すると仮定できるから、 λ_q は次のように求まる。

$$\lambda_q \doteq \frac{1}{q} \ln [1 + 2D_g(e^q - 1)], \quad (2-56)$$

ここで $D_g \doteq p/2$ を用いた。次の量を定義する。

$$q_c \equiv \ln(1 + 1/2D_g) \propto \ln \varepsilon_+^{-1/2} \quad (2-57)$$

これを用いて q の領域を分けると、

$$\lambda_g \doteq 2D_g \frac{e^q - 1}{q}, \quad (q \ll q_c) \quad (2-58)$$

$$\doteq 1 - \frac{q_c}{q}, \quad (q \gg q_c) \quad (2-59)$$

領域 $q \ll q_c$ では、 λ_q は D_g と同様に $\varepsilon_+ \rightarrow 0$ のとき小さくなる。このときの $(e^q - 1)/q$ の部分はポアソン過程の λ_q と同型である。ところが、 $q \gg q_c$ では $q \rightarrow \infty$ のとき λ_q は1に近づくが、これは図2.9に示している数値実験の結果と異なっている。これは相関の効果によるものと思われる。

式(2-56)よりスケーリング則として $\lambda_q / 2D = (e^q - 1)/q$ を得る。これを数値実験と比較したものを図2.10に示してある。スケーリングの境界 q_c は臨界点近傍では大きくなるので、バースト変数 g のダイナミックスは、ポアソン過程で良く近似できるようになる。

(A)の場合は q の全領域にわたって良いスケーリング則を得たが、(B)の場合は、バーストの相関のために $q \ll q_c$ の領域のみにおいて、スケーリング則を得た。このように1つの時系列から出発しても、その時系列のどの側面をみるかという粗視化の違いにより、異なった結果を得た。このことの重要性については§5-7で再び論ずることにする。

以上の議論は、カオス→カオス転移の典型例である、バンド分離現象の場合にも応用できる。このときのマップは $f(x) = f_r^2(x) \equiv f_r(f_r(x))$ 、ここで $f_r(x)$ はロジスティック・パラボラ $f_r(x) = -x^2 - 2rx$ である。バンド分離は $r = r_c = 0.83928 \dots$ で起こる。この場合のコントロール・パラメーターとして $\delta \equiv r - r_c$ を取ると、上に展開された議論と全く同様になる。

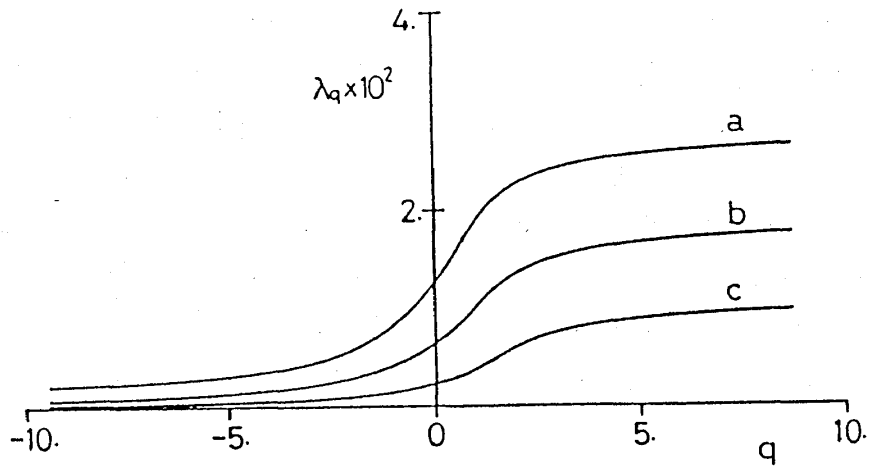


Fig.2.9. Numerical results of similarity exponents for $g(x_j)$. The parameter ϵ_+ , which appears in Eq.(2-42), is taken as (a) 4×10^{-4} , (b) 10^{-4} and (c) 1.225×10^{-5} .

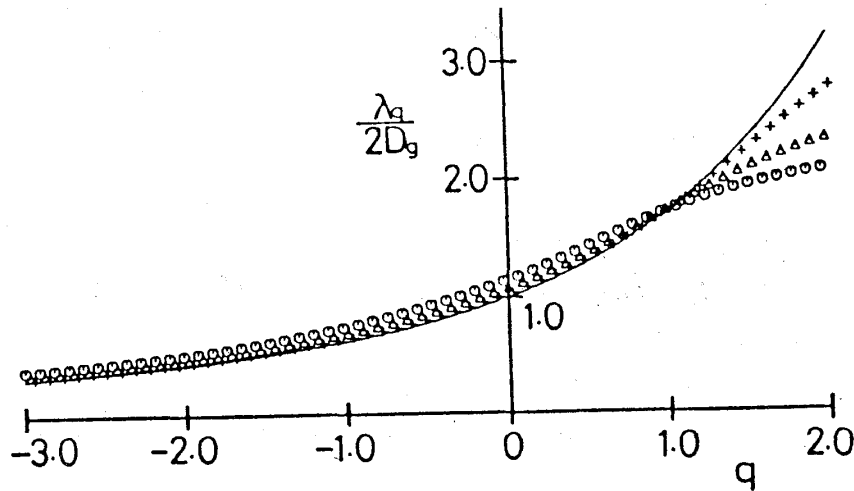


Fig.2.10. Scaling laws of λ_q for bursts. The solid lines are $(e^q - 1)/a$ (Eq.(2-58)). Data are the same as in Fig.2.9. Symbols o, Δ and + indicate numerical results for a, b and c, respectively.

2-5 純間欠カオスの臨界現象

時系列の拡散的性質（平均値, 分散, ...）については従来から良く調べられている。ところが間欠的性質はキュムラントの高次展開を用いても解析できないので、この性質の研究は殆どなされていない。我々の方法は両性質を統一的に解析できるので、間欠的性質を強くもつ時系列は、揺動スペクトル理論の良い適用例となる。そこで、極限において純間欠性を示す時系列を導入し、これに揺動スペクトル理論を適用することにする。このタイプの時系列 $\{u_j\}$ の一つを次の様にして作る。変数 u_j は x_j の関数とし、 x_j は $x_{j+1} = f(x_j)$ で生成されたとする。マップ $f(x)$ としてベルヌーイ変換 $B(p, 1-p)$ を採用する。即ち、

$$f(x) = \begin{cases} x/p & (0 \leq x < p) \\ (x-p)/(1-p) & (p \leq x < 1) \end{cases} \quad (2-60)$$

ここで p はコントロール・パラメーターであり、変域は $0 \leq p \leq 1$ とする。

上記のマップを用い、時系列 $\{u_j\}$ を次の様に定義する、

$$u_j(x_j) = \begin{cases} u^{(1)} = a/p & (0 \leq x_j < p) \\ u^{(2)} = (b-a)/(1-p) & (p \leq x_j < 1) \end{cases} \quad (2-61)$$

ここで a と b は定数であり、 $u^{(1)} > u^{(2)}$ 、即ち $a > b p$ を仮定している。定数 b は時系列の平均値を与えている、即ち $b = \langle u_j \rangle = p u^{(1)} + (1-p) u^{(2)}$ 。ここで $\langle \dots \rangle$ はマップ $f(x)$ の自然な不変測度を用いた平均を意味している。いまの場合は、この不変測度 $p(x)$ は $p(x) = 1$ である。

コントロール・パラメーターが臨界値 $0(1)$ に近づくと図 2.11 に示した様に、時系列は強い間欠性を示す。

この時系列に対する λ_q は次の様に求まる。

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \ln [p e^{q(a/p)} + (1-p) e^{q(b-a)/(1-p)}] \quad (2-62)$$

相似指数 λ_q の p 依存性を図 2.12 に示している。 p が $0(1)$ に近づくと λ_q は逆 L 字型になり、 $\lambda_{q=0} (= \langle u_j \rangle)$ は、図の様に連続した値を取りうるようになる。この時系列の場合、拡散係数 $D = (a - b p)^2 / [2 p (1-p)]$ 、3 次キュムラント係数 $\kappa_3 = (1-2p)(a - b p)^3 / [6 p^2 (1-p)^2]$ と計算できるので、 λ_q の収束半径 κ は $\kappa \equiv D / |\kappa_3| = 3 p (1-p) / |(1-2p)(a - b p)|$ ($p \neq 1/2$) と求まる。これより p が

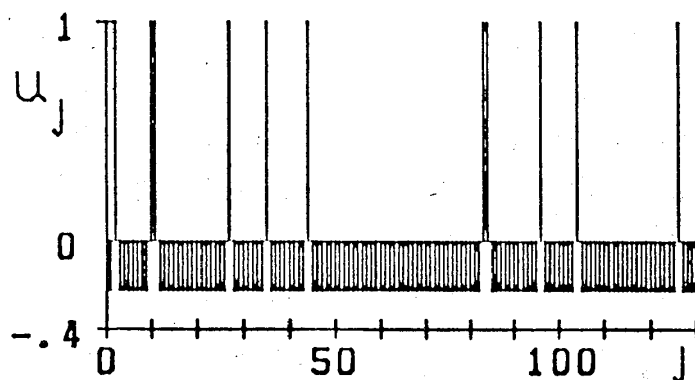


Fig.2.11. Time development of the intermittency chaos where parameters are taken as $a=0.1$ and $b=-0.1$ and $p=0.1$, and the initial condition is chosen as $x_0=0.1473$.

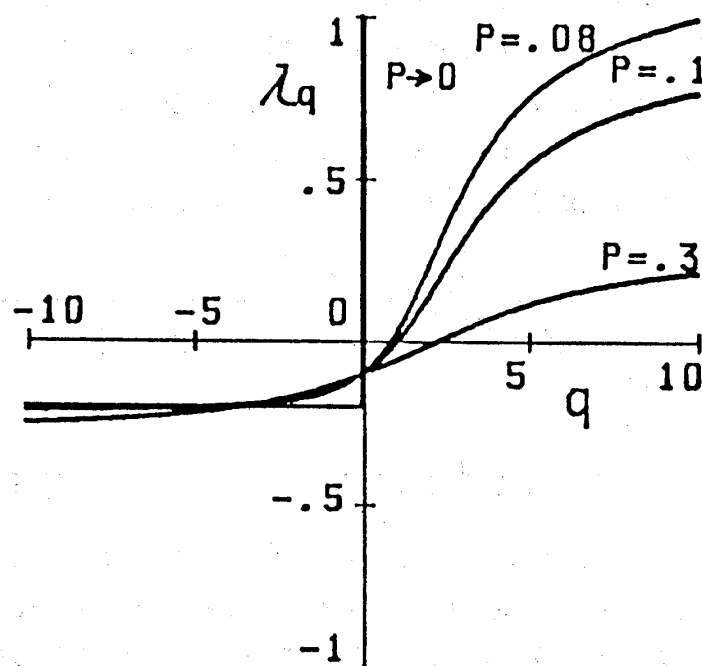


Fig.2.12. λ_q vs q for several values of p where parameters are given by $a=0.1$ and $b=-0.1$.

臨界値 $0(1)$ に近づくと、この時系列は純間欠的性質を示すことがわかる。この間欠カオスでは、ラミナー状態の平均持続時間 T は $T = 1/p$ ($1/(1-p)$) であり、バーストの強度 $u^{(1)}$ は $u^{(1)} = a/p$ ($u^{(2)} = (b-a)/(1-p)$) であるから、 p が臨界値 $0(1)$ に近づくと T も $u^{(1)}$ は大きくなり発散する。そして、大きな 1 つのバーストと 1 つの小さくて長いラミナーが統計的につりあい、平均値 $\langle u_j \rangle$ が一定値 b を持つようになっている。

このような間欠カオスでモデル表現できる自然現象の一つとして雷がある。雷の現象では、ゆっくりと集積した電荷が短時間の内に、放電を突然する。この例では、バーストが放電、ラミナー状態が電荷の集積に対応している。

式(2-62)を式(2-16)に代入すると次式を得る。

$$\alpha(q) = \frac{a e^{q(a/p)} + (b-a) e^{q(b-a)/(1-p)}}{p e^{q(a/p)} + (1-p) e^{q(b-a)/(1-p)}} \quad (2-63)$$

α の最大値 $\alpha_{\max}$ および最小値 $\alpha_{\min}$ は、それぞれ $\alpha_{\max} = \alpha(\infty) = u^{(1)} = a/p$ 、 $\alpha_{\min} = \alpha(-\infty) = u^{(2)} = (b-a)/(1-p)$ で与えられる、ただし $u^{(1)} > u^{(2)}$ を用いた。これより α_n の揺動の範囲は $\alpha(-\infty) \leq \alpha \leq \alpha(\infty)$ である。また平均値 $\langle \alpha_n \rangle = b$ は $\alpha(0)$ で与えられる。 $\alpha_n = \alpha$ の実現の確率は(2-14)式で与えられているように $\sigma(\alpha)$ から求まる。即ち、揺動スペクトルより、揺動量 α_n の平均値、揺動の範囲および、ある値の実現の確率がわかる。また揺動の分散は $d^2 \sigma(\alpha)/d\alpha^2|_{\alpha=\lambda}$ より求まる。

式(2-17)と(2-63)より、揺動スペクトルが次のように計算できる。

$$\sigma(\alpha) = \ln \frac{A(\alpha) \alpha dp(1-p)}{p A(\alpha)^{da(1-p)} + (1-p) A(\alpha)^{d(b-a)p}} \quad (2-64)$$

ここで

$$A(\alpha) \equiv \frac{a - \alpha p}{\alpha(1-p) - (b-a)}, \quad d \equiv \frac{1}{b p - a} \quad (2-65)$$

揺らぎの範囲より $\rho_n(\alpha) = 0$; $\alpha > \alpha(\infty)$ および $\alpha < \alpha(-\infty)$ であるから、 $\alpha > \alpha(\infty)$ と $\alpha < \alpha(-\infty)$ では $\sigma(\alpha) = \infty$ である。 $\alpha - \sigma(\alpha)$ 曲線で表現された $\sigma(\alpha)$ のスペクトル構造が図 2.13 に示されている。スペクトルは $\alpha = \langle \alpha_n \rangle = b$ で最小値 $\sigma(\alpha) = 0$ をとる。この最小値の近傍で $\sigma(\alpha)$ は漸近的に次のように展開できる。

$$\sigma(\alpha) = \frac{p(1-p)}{2(a-bp)^2} (\alpha-b)^2 + \dots \quad (2-66)$$

平均値 $\alpha = \langle \alpha_n \rangle = b$ の近くは放物曲線になっており、これが中央極限定理の結果に対応している。この放物曲線(2-66)式の展開の初項の第 1 項の係数)が純間欠カオス転移点 $p = 0(1)$ 消失するという重要な結果を(2-66)式は示している。

他方 $\alpha = \alpha_{\pm}$ ($\alpha_+ \equiv \alpha(+\infty)$, $\alpha_- \equiv \alpha(-\infty)$) の近傍では $\sigma(\alpha)$ は次の様に展開できる。

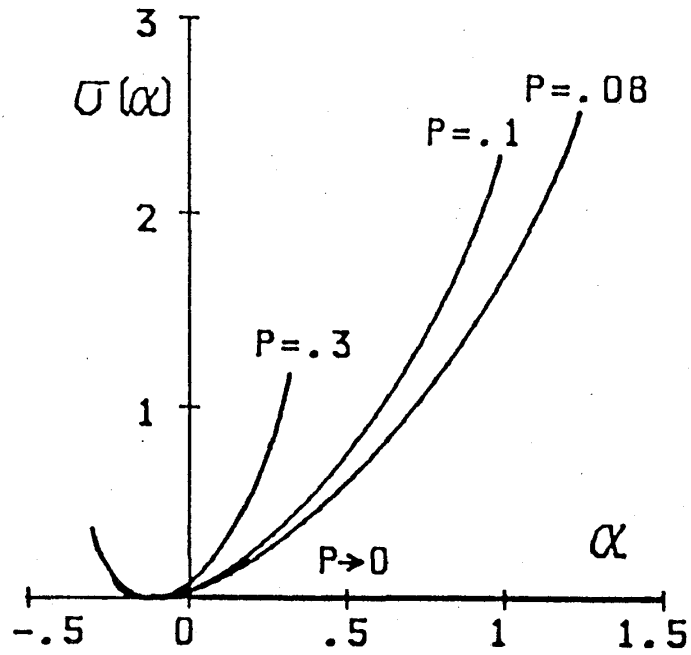


Fig.2.13. The $\sigma(\alpha)$ spectra for several values of p where parameters are chosen as $a=0.1$ and $b=-0.1$.

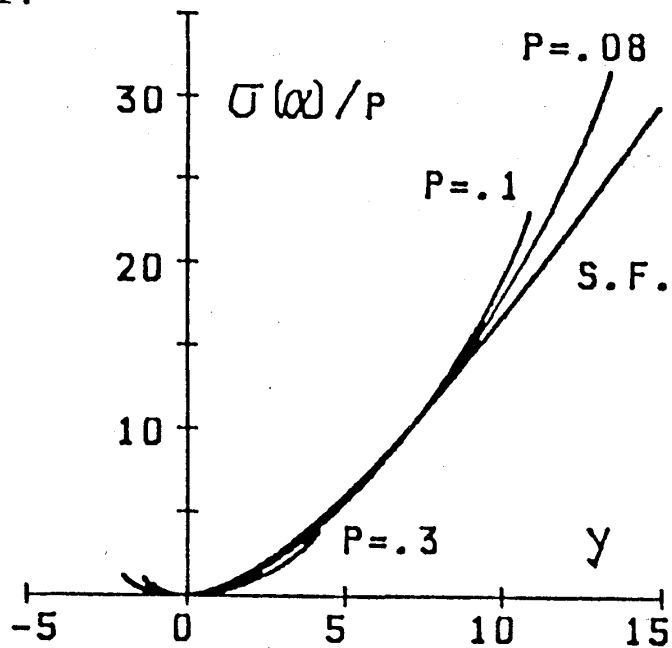


Fig.2.14. The scaled fluctuation spectra for several values of p where parameters are chosen as $a=0.1$ and $b=-0.1$ and y is defined as $y \equiv (\alpha - b)/a$. The curve denoted by S.F. is the scaling function of Eq.(2-69) for $p \rightarrow 0$.

$$\sigma(\alpha) = \frac{1}{\tau_{\pm}} - \frac{p(1-p)}{a-bp} |\alpha - \alpha_{\pm}| \ln |\alpha - \alpha_{\pm}|^{-1} \quad (2-67)$$

ここで $\tau_{+} (= 1/\ln(1/p))$ と $\tau_{-} (= 1/\ln[1/(1-p)])$ ラミナー状態のコヒーレンス時間である。上式は、 α_n が平均値より大きくずれて実現する確率を特徴づけている。

臨界点 $p=0(1)$ の近傍では、揺動スペクトル(2-62)式に対するスケーリング則を求めることができる。これは次の様に表せる。

$$\frac{\sigma(\alpha)}{p_{\varepsilon}} = S(y_{\varepsilon}) \quad (2-68)$$

ここで

$$S(y) = (1 + \varepsilon y) \ln(1 + \varepsilon y) - \varepsilon y \quad (2-69)$$

上式で、 $\varepsilon = +$ と $\varepsilon = -$ はそれぞれ $p \rightarrow 0$ と $p \rightarrow 1$ に対応しており、 $p_{+} \equiv p$, $p_{-} \equiv 1-p$, $y_{+} \equiv \alpha - b$, $y_{-} \equiv (\alpha - b)/(a - b)$ である。図2.14にスケーリング関数(2-69)式とスケールされた揺動スペクトルが比較されている。

パラメータ q を複素変数 z に拡張し、複素分配関数 $Z(z)$ を $Z(z) = \exp(z \lambda_q)$ で導入する。方程式 $Z(z) = 0$ の根を求めると、 λ_q が(2-62)の場合は、

$$z_n = \frac{p(1-p)}{a-bp} \left[\ln \frac{1-p}{p} + (2n+1)\pi i \right] \quad (2-70)$$

($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

この場合、 $Z(z)$ は超越整関数であるから、根は $Z(z)$ の1位の零点と一致している。コントロール・パラメータが $p \rightarrow 0(1)$ のとき根が原点に集積する。即ち、実根の出現が転移に対応している。

§ 3 一般相関関数の方法

3-1 一次元写像系 (固有関数展開の方法)

前節では時系列の長時間にわたる大局的な性質を揺動スペクトル理論を用いて調べた。この節では、時系列の時間的相関を調べる新しい方法について述べる。時系列の統計的性質はモーメント $M_q(n)$ より求まるが、 $M_q(n)$ は式(1-4)に見られるように λ_q と $Q_n^{(q)}$ より構成されている。時系列が純確率過程の場合は $Q_n^{(q)} = 1$ となり、時系列は λ_q によってのみ特徴づけられる。また、時系列が周期 T の周期過程の場合は、Floquet の定理より、 $Q_n^{(q)}$ は周期 T の関数となり、 λ_q は一定値 $\langle u_n \rangle = (1/T) \sum_{j=0}^{T-1} u_j$ を取る。一般の時系列の場合は、大局的性質は λ_q によって、時間相関は $Q_n^{(q)}$ より解析される。

一次元写像によって、発生される時系列の一般時間相関を調べることにする。関係式

$$\int_0^1 g_1(x) g_2(f(x)) dx = \int_0^1 [H g_1(x)] g_2(x) dx \quad (3-1)$$

を用いるとモーメント $M_q(n)$ は次式より計算できる。

$$M_q(n) = \int_0^1 [H_q]^n \rho(x) dx \quad (3-2)$$

ここで H_q は次式で定義される線型演算子である。

$$\begin{aligned} H_q F(x) &\equiv \int_0^1 \delta(f(y) - x) e^{qu(y)} F(y) dy \\ &= H [e^{qu(x)} F(x)] \end{aligned} \quad (3-3)$$

この H_q で $q=0$ にとると Frobenius - Perron 演算子になる。演算子 H_q の固有値方程式を次の様を書く。

$$\begin{aligned} H_q \Psi_q^{(\alpha)}(x) &= \exp[-\xi_q^{(\alpha)}] \Psi_q^{(\alpha)}(x) \\ (\alpha &= 0, 1, 2, \dots, M) \end{aligned} \quad (3-4)$$

不変測度 $\rho(x)$ が H_q の固有関数 $\Psi_q^{(\alpha)}(x)$ を用いて次の様に展開できると仮定する。

$$\rho(x) = \sum_{\alpha=0}^M k_q^{(\alpha)} \Psi_q^{(\alpha)}(x) \quad (3-5)$$

上式を(3-2)式に代入すると、

$$M_q(n) = \sum_{\alpha=0}^M J_q^{(\alpha)} \exp[-\xi_q^{(\alpha)} n] \quad (3-6)$$

ここで、

$$J_q^{(\alpha)} \equiv k_q^{(\alpha)} \int_0^1 \Psi_q^{(\alpha)}(x) dx \quad \left(\sum_{\alpha=0}^M J_q^{(\alpha)} = 1 \right) \quad (3-7)$$

実数部が最小の $\xi_q^{(\alpha)}$ を ξ_q で表す。即ち、

$$\xi_q = \min_{\alpha} \{ \operatorname{Re} \xi_q^{(\alpha)} \} \quad (3-8)$$

式(3-5)を(1-6)式に代入することにより、次式を得る。

$$\lambda_q = -\frac{1}{q} \xi_q \quad (3-9)$$

即ち、時系列の大局的性質を特徴づけている λ_q は H_q の最大固有値により表される。 ξ_q には縮退はなく、 $\xi_q = \xi_q^{(0)}$ と表すことにする。

式(3-6)と式(1-4)を比較することにより、 $Q_n^{(q)}$ は次の様に表されることがわかる。

$$Q_n^{(q)} = Q_{\infty}^{(q)} + \sum'_{\alpha} J_q^{(\alpha)} \exp[- \{ i \omega_q^{(\alpha)} + \gamma_q^{(\alpha)} \} n] \quad (3-10)$$

ここで

$$Q_{\infty}^{(q)} \equiv J_q^{(0)} \quad (> 0) \quad (3-11a)$$

$$\omega_q^{(\alpha)} \equiv \operatorname{Im} \xi_q^{(\alpha)} \quad (| \omega_q^{(\alpha)} | \leq \pi) \quad (3-11b)$$

$$\gamma_q^{(\alpha)} \equiv \operatorname{Re} \xi_q^{(\alpha)} - \xi_q \quad (> 0) \quad (3-11c)$$

上式の $\sum'$ は $\alpha=0$ を除く和を意味している。また、 $Q_n^{(q)}$ のフーリエ変換より

$$\begin{aligned} \Xi_q(\omega) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} [Q_n^{(q)} - Q_{\infty}^{(q)}] e^{i \omega n} \\ &= \sum'_{\alpha} J_q^{(\alpha)} g(i (\omega - \omega_q^{(\alpha)}) - \gamma_q^{(\alpha)}) \end{aligned} \quad (3-12)$$

ここで $g(\phi) \equiv (1 - e^{\phi})^{-1}$ 。時系列に含まれている相関は特性振動数 $\{ \omega_q^{(\alpha)} \}$ と減衰定数 $\{ \gamma_q^{(\alpha)} \}$ で特徴づけられることが解った。

上に述べた一般相関関数の方法と従来の相関関数の方法(パワー・スペクトルの方法)の違いは、フィルタリング・パラメーター q が一般相関関数の方法には導入されていることである。この q を零にとると従来の相関関数の方法が得られる。この意味で一般相関関数の方法は、従来の相関関数の方法を含む一般的方法になっている。この新しい方法よりみると、従来の相関関数の方法は $|q| \ll \kappa$ の領域、即ち拡散的領域、の相関しか取り扱っていないことがわかる。時系列のもつ間欠的領域($|q| \gg \kappa$)の相関は従来の方法では全く取り扱えていなかったことになる。次に例で示す様に、間欠的領域の相関を調べることにより、時系列の中に潜む振動モードを裸の姿にして取り出すことができる。従来のパワー・スペクトルの方法では、衣を着たモードを捉えていたのでピークがマップに存在するサイクルの振動数からずれたところに出ていた。一般相関関数の方法では、振動数が $\omega_q^{(\alpha)}$ と表される。この振動数に対応するモードを (α, q) モードと呼ぶことにする。

前節の揺動スペクトル理論の場合と同様に一般相関関数の方法の場合も、 q に関して

二つの領域に分けて物理的描像を描くことができる。

(1) $|q| \ll \kappa$; 拡散的領域

この場合、モーメント $M_q(n)$ は次のように表せる。

$$M_q(n) \doteq \exp [q \langle U_n \rangle + \sigma_n q^2 / 2] \quad (3-13a)$$

ここで

$$\langle U_n \rangle \equiv \lambda_0 n \quad (\lambda_0 = \langle u_j \rangle) \quad (3-13b)$$

$$\sigma_n \equiv \langle (U_n - \langle U_n \rangle)^2 \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} C_{|j-l|} \quad (3-13c)$$

上式の C_n は次の二時間相関関数である。

$$C_n = \langle \delta u_j \delta u_0 \rangle \quad (\delta u \equiv u - \lambda_0) \quad (3-14)$$

この相関は $n \rightarrow \infty$ のとき n^{-1} より早く減衰すると仮定する。式(3-13a)を(1-6)に代入すると、 $\lambda_q = \lambda_0 + Dq$ が得られ、この時、次の関係式が成立している。

$$\sigma_n \doteq 2Dn \quad \text{for } n \rightarrow \infty \quad (3-15)$$

式(3-13c)を用いると、

$$D = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \quad (3-16)$$

式(3-12)で定義された $Q_n^{(q)}$ のフーリエ変換 $\Xi_q(\omega)$ は(3-13a)を用いると $q \rightarrow 0$ の時、

$$\Xi_q(\omega) \doteq \frac{q^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{\sigma}_n - \hat{\sigma}_\infty) e^{i\omega n} \quad (3-17)$$

ここで $\hat{\sigma}_n \equiv \sigma_n - 2Dn$ 。上式を(3-12)と比較することにより

$$j^{(\alpha)} \equiv \lim_{q \rightarrow 0} q^{-2} J_q^{(\alpha)} \quad (\alpha \neq 0) \quad (3-18)$$

は有限にとどまることがわかる。また $\alpha = 0$ の場合は $j^{(0)} \equiv \lim_{q \rightarrow 0} (J_q^{(0)} - 1)/q^2 = - \sum_{\alpha} j^{(\alpha)}$ 。以上より次式を得る。

$$\lim_{q \rightarrow 0} q^{-2} \Xi_q(\omega) = \sum_{\alpha} j^{(\alpha)} g(i(\omega - \omega_0^{(\alpha)}) - \gamma_0^{(\alpha)}) \quad (3-19)$$

ところでMori等の二時間相関関数の理論によると、 C_n は次の様に展開できる。

$$C_n = \sum_{\alpha} K_{\alpha} \exp [-\xi_0^{(\alpha)} n] \quad (3-20)$$

ここで $\exp [-\xi_0^{(\alpha)}]$ は Frobenius - Perron 演算子の α 番目の固有値であり、 K_{α} は展開係数である。この $\xi_0^{(\alpha)}$ については、 $\xi_0^{(\alpha)} = \lim_{q \rightarrow 0} \xi_q^{(\alpha)}$ 、 $\xi_0^{(0)} = 0$ かつ $\text{Re } \xi_0^{(\alpha)} > 0$ ($\alpha \neq 0$) が成立する。上式を(3-13c)に代入すると、

$$\hat{\sigma}_n = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} K_{\alpha} \operatorname{sech}^2 [\zeta_0^{(\alpha)} / 2] \{1 - \exp[-\zeta_0^{(\alpha)} n]\} \quad (3-21)$$

ここで $\hat{\sigma}_n = \sigma_n - 2Dn$ と

$$D = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} K_{\alpha} \coth [\zeta_0^{(\alpha)} / 2] \quad (3-22)$$

を用いた。式(3-21)を(3-17)に代入し(3-19)と比較すると、次式を得る。

$$K_{\alpha} = 4j^{(\alpha)} \sinh^2 [\zeta_0^{(\alpha)} / 2] \quad (3-23)$$

上式は従来の二時間相関関数の方法と一般相関関数の方法の $q \rightarrow 0$ の場合の関係を表したものである。

(2) $|q| \gg \kappa$; 間欠的領域

この領域の λ_q は(2-6)のように展開できる。式(3-9)より、 $\lambda_{\pm}$ は有限であるから、 $|q| \rightarrow \infty$ のとき $|\zeta_q|$ は発散することがわかる。これより(3-11c)の左辺第2項は大きくなることがわかる。次に二つの特別な場合を考える。(a) $\gamma_q^{(\alpha)} \rightarrow \infty$ と (b) $\gamma_q^{(\beta)} \rightarrow 0$ ここで $q \rightarrow \varepsilon \infty$ (ε は+あるいは-) とする。

$$(a) \gamma_q^{(\alpha)} \rightarrow \infty \quad \text{as} \quad q \rightarrow \varepsilon \infty$$

式(3-12)より、この成分の $\Xi_q(\omega)$ への寄与は約 $J_q^{(\alpha)}$ 。これは ω に依存していないので、このモードの $\Xi_q(\omega)$ への寄与はホワイト・スペクトルである。もし、あるペア α について $\gamma_q^{(\alpha)} \rightarrow \infty$ であれば、この成分からの $\Xi_q(\omega)$ への寄与は、

$$2 \operatorname{Re} J_q^{(\alpha)} + 2 e^{i\omega} \exp(-\gamma_q^{(\alpha)}) \operatorname{Re} [J_q^{(\alpha)} \exp(-i\omega_q^{(\alpha)})] \quad (3-24)$$

$$(b) \gamma_q^{(\alpha)} \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad q \rightarrow \varepsilon \infty$$

この場合、モードの寿命が無限大になる。このようなモードを β モードと呼ぶことにする。振動数 $\omega_q^{(\beta)}$ の近傍において、この β モードからの $\Xi_q(\omega)$ への寄与は

$$J_q^{(\beta)} g(i(\omega - \omega_q^{(\beta)}) - \gamma_q^{(\beta)}) \doteq \frac{J_q^{(\beta)}}{\gamma_q^{(\beta)}} L\left(-\frac{\omega - \omega_q^{(\beta)}}{\gamma_q^{(\beta)}}\right) \quad (3-25)$$

ここで

$$L(y) \equiv \frac{1}{1+iy} = \frac{1-iy}{1+y^2} \quad (3-26)$$

は複素 Lorentzian である。

β モードのピーク巾は狭いので、このモードは時系列に内在している周期成分を表し

ている。

次に具体的な応用例を示すことにする。用いる写像は β 変換、すなわち $f(x) = \beta x$ ($0 \leq x < \beta^{-1}$) かつ $f(x) = \beta x - 1$ ($\beta^{-1} \leq x < 1$)。時系列 $\{u_j\}$ は次式のルールで発生されたとする。

$$u_j = \begin{cases} 0 & (0 \leq x_j < \beta^{-1}) \\ 1 & (\beta^{-1} \leq x_j < 1) \end{cases} \quad (3-27)$$

写像の領域 $[0, 1)$ が N 個にマルコフ分割できる場合は以下に示すように厳密に解くことができる。その結果のみを示すことにする。

[A] $N = 1$

この場合の β は $\beta = 2 \equiv \beta_1$ 。相似指数 λ_q は

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \ln \left(\frac{1 + e^q}{2} \right). \quad (3-28)$$

相関については $Q_n^{(q)} = 1$ であるから $\Xi_q(\omega) = 0$ 。時列系はコイン投げと同様な純確率過程である。図3.1に λ_q を示してある。

[B] $N = 2$

この場合の β は $\beta = \beta^2 - 1 = (5^{1/2} + 1) / 2 = 1.618 \dots \equiv \beta_2$ 。写像は周期2の不安定軌道をもっている。結果は

$$\xi_q = -q \lambda_q = -\ln \frac{(1 + 4e^q)^{1/2} + 1}{5^{1/2} + 1}, \quad (3-29)$$

$$\xi_q^{(1)} = \xi_q + i\pi + \gamma_q, \quad (3-30)$$

$$\gamma_q = \ln \frac{(1 + 4e^q)^{1/2} + 1}{(1 + 4e^q)^{1/2} - 1}, \quad (3-31)$$

$$J_q^{(\alpha)} = \frac{\beta [1 - \nu_q^{(\alpha')}]^2}{(2\beta - 1) [\nu_q^{(\alpha)} - \nu_q^{(\alpha')}]}, \quad (3-32)$$

$$\nu_q^{(\alpha)} \equiv \exp [-\xi_q^{(\alpha)}] \quad (3-33)$$

ここで $(\alpha, \alpha') = (0, 1)$ あるいは $(1, 0)$ である。上記の結果より

$$Q_n^{(q)} = Q_\infty^{(q)} + J_q^{(1)} (-1)^n \exp (-\gamma_q n), \quad (3-34)$$

$$\Xi_q(\omega) = \frac{J_q^{(1)}}{1 + \exp (i\omega - \gamma_q)}. \quad (3-35)$$

λ_q は図3.1に ω_q と γ_q は図3.2に示してある。 $J_q^{(1)}$ と γ_q の q -依存性は表3.1にまとめている。この場合、 $\text{Re}(\Xi_q(\omega))$ のピークは q に依存せず $\omega = \pi$ のところに

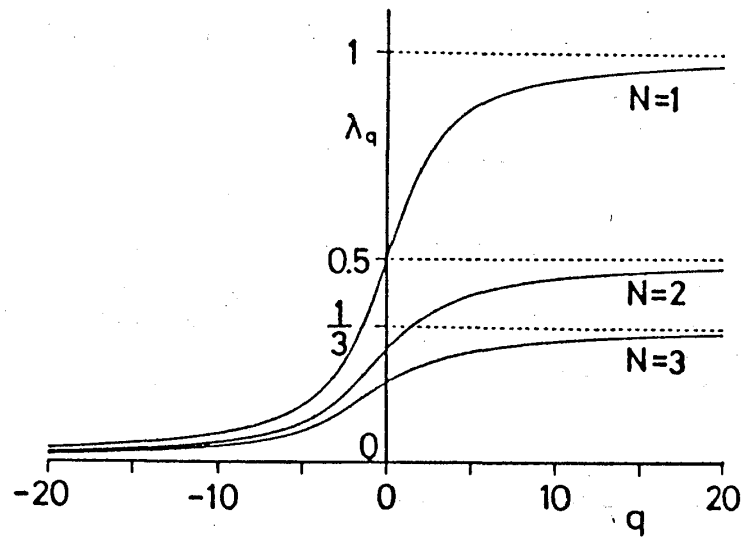


Fig.3.1. The q -dependences of λ_q . Characteristic quantities are $\lambda_{-\infty}=0$, $\lambda_{\infty}=N^{-1}$ and $\tau_{\pm}=(\ln\beta_N)^{-1}$ for $\beta=\beta_N$ ($N=1,2,3$). Furthermore λ_0 and $(\lambda_0, D)=(1/2, 1/8)$ for $N=1$, $((\sqrt{5}\beta_2)^{-1}, (10\sqrt{5})^{-1})$ for $N=2$ and $\approx(0.194, 0.0261)$ for $N=3$.

	$J_q^{(1)}$	r_q	Γ_q
$q \ll -1$	$-\frac{3\sqrt{5}-5}{10} \approx -0.17082$	$-q(\gg 1)$	$e^{-q}(\gg \pi)$
$ q \ll 1$	$-\frac{q^2}{25}$	$\ln \beta^2 \approx 0.96242$	$\beta^2 - 1 \approx 0.51504\pi$
$q \gg 1$	$-\frac{\sqrt{5}e^{q/2}}{10}$	$e^{-q/2}(\ll 1)$	$e^{-q/2}(\ll \pi)$

Table 3.1. Asymptotic q -dependences of relevant quantities in characteristic q -regions for the $N=2$ case (see Eqs.(3-33) and (3-35)), where $\beta=\beta_2$. $\Gamma_q(\equiv e^{\gamma q}-1)$ estimates the width of $\text{Re}\Xi_q(\omega)$.

ある。

$\Xi_q(\omega)$ の漸近型を三つの領域 ($q \ll -1$, $|q| \ll 1$ と $q \gg 1$) について調べる。

(a) $q \ll -1$

この場合、 $\gamma_q \gg 1$ であるから

$$\Xi_q(\omega) \doteq -J_{-\infty}^{(1)} (1 - i e^q \sin \omega) \quad (3-36)$$

ここで $J_{-\infty}^{(1)} = -(3 \cdot 5^{1/2} - 5) / 10 = -0.17082 \dots$ 。

(b) $|q| \ll 1$

$$\Xi_q(\omega) \doteq - \frac{q^2}{25} \cdot \frac{1}{1 + e^{i\omega} / \beta_2^2}, \quad (3-37)$$

これは従来の二時間相関関数の方法から得られる結果と本質的に同じである。

(c) $q \gg 1$

この場合、 γ_q は極めて小さく、 $\text{Re}(\Xi_q(\omega))$ のピークの高さは大きい。ピーク $\omega = \pi$ の近傍で $\text{Re}(\Xi_q(\omega))$ は次のようにスケーリング型に表すことができる。

$$\Xi_q(\omega) \doteq - \frac{5^{1/2} e^q}{10} L\left(\frac{\Delta\omega}{e^{-q/2}}\right), \quad (3-38)$$

ここで $\omega = \pi - \Delta\omega$ ($0 < \Delta\omega \ll 1$)。これは β モードの一例である。

[C] $N=3$

この場合の β は $\beta = 1 + \beta^{-2} = 1.46557 \dots \equiv \beta_3$ 。写像は周期3の不安定軌道をもっている。結果は

$$\xi_q = -q \lambda_q = -\ln \left[\frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{3} + v_q^+ + v_q^- \right) \right], \quad (3-39)$$

$$\xi_q^{(1)} = \xi_q + \gamma_q + i\omega_q, \quad \xi_q^{(2)} = \xi_q^{(1)*} \quad (3-40)$$

ここで

$$v_q^\varepsilon = \left[\frac{1}{27} + \frac{e^q}{2} + \varepsilon e^{q/2} \left(\frac{1}{27} + \frac{e^q}{4} \right)^{1/2} \right]^{1/3}, \quad (\varepsilon = \pm) \quad (3-41)$$

$$\omega_q = \cos^{-1} \left[-\frac{1}{2} \{1 - \beta^{-1} \exp(\xi_q)\}^{1/2} \right], \quad \left(\frac{\pi}{2} < \omega_q < \pi \right) \quad (3-42)$$

$$\gamma_q = -\frac{1}{2} \ln[1 - \beta^{-1} \exp(\xi_q)]. \quad (3-43)$$

また、 $\beta_3 = 1/3 + v_0^+ + v_0^-$ なる関係がある。さらに次の結果を得る。

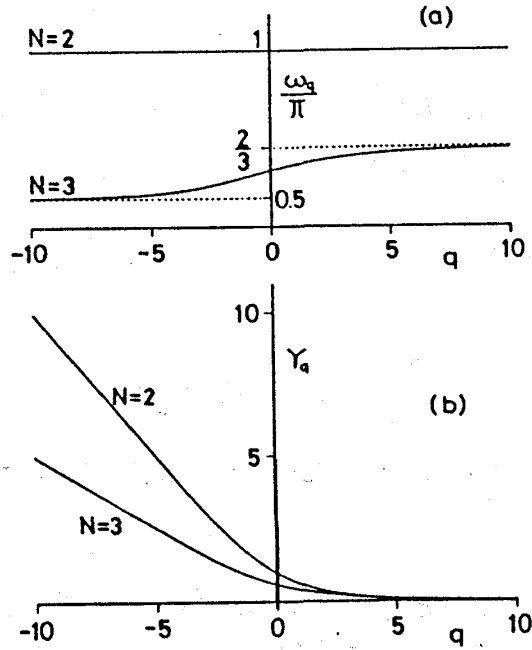


Fig.3.2. The q -dependences of the characteristic frequency ω_q (a) and the damping rate γ_q (b) for cases $N=2$ and 3 . For $N=2$, $\omega_q = \pi$ (see Eq.(3-35)). Here $\omega_0 = \cos^{-1}(-\beta_3^{-3/2}/2) \approx 0.591\pi$. Asymptotic forms of ω_q and γ_q for characteristic q -regions are given in Table 3.1 and 3.2.

	$J_q^{(1)}$	ω_q	γ_q	Γ_q
$q \ll -1$	$-\frac{1}{2\beta^3(3\beta-2)}\left(1 + \frac{2}{\beta} + ie^{-q/2}\right)$	$\frac{\pi}{2} + \frac{e^{q/2}}{2}$	$-\frac{q}{2} (\gg 1)$	$e^{-q/2} (\gg \pi)$
$ q \ll 1$	cq^2 ($c \approx -0.0264 - 0.00704 \times i$)	$\cos^{-1}(-\beta^{-3/2}/2)$ $\approx 0.591\pi$	$\frac{3}{2} \ln \beta$ ≈ 0.57336	$\beta^{3/2} - 1$ $\approx 0.24645\pi$
$q \gg 1$	$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{6\beta(3\beta-2)} e^{2q/3}$	$\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}e^{-q/3}}{6}$	$\frac{e^{-q/3}}{2} (\ll 1)$	$\frac{e^{-q/3}}{2} (\ll \pi)$

Table 3.2. Asymptotic q -dependences of relevant quantities in characteristic q -regions for $N=3$ case. Here $\beta = \beta_3$ and $\Gamma_q \equiv e^{\gamma_q} - 1$.

$$J_q^{(\alpha)} = \{ [\nu_q^{(\alpha)}]^2 + [1 + \nu_q^{(\alpha)}] \beta^{-3} \} h_q^{(\alpha)}, \quad (3-44)$$

ここで $\nu_q^{(\alpha)} \equiv \exp[-\xi_q^{(\alpha)}]$ であり $h_q^{(\alpha)}$ は

$$h_q^{(\alpha)} = \frac{\beta}{3\beta-2} \cdot \frac{[1 - \nu_q^{(\alpha')}][1 - \nu_q^{(\alpha'')}]}{[\nu_q^{(\alpha)} - \nu_q^{(\alpha')}][\nu_q^{(\alpha)} - \nu_q^{(\alpha'')}]}, \quad (3-45)$$

上式で $(\alpha, \alpha', \alpha'') = (0, 1, 2), (1, 2, 0)$ または $(2, 0, 1)$ であり $J_q^{(2)} = J_q^{(1)*}$ 。以上より

$$Q_n^{(q)} - Q_\infty^{(q)} = J_q^{(1)} \exp[-(i\omega_q + \gamma_q)n] + \text{c.c.} \quad (3-46)$$

$$\begin{aligned} \Xi_q(\omega) = & \frac{J_q^{(1)}}{1 - \exp[i(\omega - \omega_q) - \gamma_q]} \\ & + \frac{J_q^{(1)*}}{1 - \exp[i(\omega + \omega_q) - \gamma_q]}, \end{aligned} \quad (3-47)$$

λ_q は図3.1に、 ω_q と γ_q は図3.2に示してある。この場合、図3.2からわかるように $2\pi/4 < \omega < 2\pi/3$ の間にある無限の振動モードがある。フィルタリング・パラメータ q を動かすことにより、それぞれが裸の姿で抜き出される。 $J_q^{(1)}$, ω_q と γ_q の q 依存性が表3.2に示されている。

$N=2$ の場合と同様にして次の三つの領域に分けることができる。

(a) $q \ll -1$

$$\Xi_q(\omega) \doteq \frac{-1}{\beta^3(3\beta-2)} \left(1 + \frac{2}{\beta} + e^{i\omega} \right), \quad (3-48)$$

これは q に依存していない。

(b) $|q| \ll 1$

$$\begin{aligned} \Xi_q(\omega) \doteq q^2 \{ & \frac{c}{1 - \exp[i(\omega - \omega_0) - \gamma_0]} \\ & + \frac{c^*}{1 - \exp[i(\omega + \omega_0) - \gamma_0]} \}. \end{aligned} \quad (3-49)$$

ここで $c \doteq 0.0264 - 0.00704i$, $\omega_0 = \cos^{-1}(-\beta^{-3/2}/2) \doteq 0.591\pi$ そして $\gamma_0 = (3/2) \ln \beta \doteq 0.573$ 、これは従来の相関関数の方法 (パワー・スペクトルの方法) から得られる結果に一致している。系に内在する不安定3周期の振動数 $\omega_0 = 2\pi/3 \doteq 0.667\pi$ と上記の ω_0 は異なっていることに注意する必要がある。すなわち、従来の方法で解析すると衣を着た振動数が表れることになる。

(c) $q \gg 1$

$\omega = \omega_q \doteq 2\pi/3 - 3^{1/2} e^{-q/3}/6$ のところに $\text{Re}(\Xi_q(\omega))$ の鋭いピークが表れる。
 $\omega = 2\pi/3$ の近傍で

$$\Xi_q(\omega) = \frac{(-1 + i 3^{1/2}) e^q}{3\beta(3\beta - 2)} L\left(\frac{-\Delta\omega}{e^{-q/3}/2} - \frac{1}{3^{1/2}}\right), \quad (3-50)$$

ここで $\omega = 2\pi/3 + \Delta\omega$ ($|\Delta\omega| \ll 1$)。このピークも β モードによるものである。
 特性振動数 $\omega_\infty = 2\pi/3$ は不安定 3 周期に対応している。これが裸の振動数である。

3-2 一変数時系列 (連分数展開の方法)

前節で述べたように、一時元写像系の場合は、 H_q の固有値方程式を解くことによって λ_q と $Q_n^{(q)}$ を求めることができる。しかしこれを実行することは一般に難しい。そこで近似的に取り扱う方法を開発する必要がある。その一つの方法として連分数展開を用いる方法について述べることにする。この方法では時系列を発生させる写像関数は必要なく、ただ定常な時系列が与えられているとすればよい。

まず $M_q^{(0)}(n) \equiv M_q(n)$ とする。Mori の射影演算子の方法と同様にして、次式を仮定する。

$$M_q^{(0)}(n+1) = \frac{M_q^{(0)}(1)}{M_q^{(0)}(0)} M_q^{(0)}(n) + \sum_{j=0}^{n-1} M_q^{(1)}(n-1-j) M_q^{(0)}(j) \quad (3-51)$$

($M_q^{(0)}(0) = 1$)。 $M_q^{(1)}(n)$ は memory kernel であり、上式は新しい関数 $M_q^{(1)}(0)$, $M_q^{(1)}(1)$, $\dots$ の定義を表しているとしてよい。次に $M_q^{(2)}(n)$ を新しい memory kernel だとすると、

$$M_q^{(1)}(n+1) = \frac{M_q^{(1)}(1)}{M_q^{(1)}(0)} M_q^{(1)}(n) + \sum_{j=0}^{n-1} M_q^{(2)}(n-1-j) M_q^{(1)}(j) \quad (3-52)$$

新しい memory kernel $M_q^{(3)}(n)$ を導入して $M_q^{(2)}(n)$ の運動方程式をつくると (3-50) と (3-51) と同様な式が得られる。これを繰り返すと、関数のセット $\{M_q^{(k)}(n), k=0, 1, 2, 3, \dots\}$ を得る。 $M_q^{(k)}(n)$ に対する運動方程式は次のように書ける。

$$(n+1)_k = (\hat{1})_k(n)_k + \sum_{j=0}^{n-1} (n-1-j)_{k+1}(j)_k, \quad (3-53)$$

ここで次の簡略記号 $(n)_k = M_q^{(k)}(n)$ と $(\hat{1})_k \equiv (1)_k / (0)_k$ を用いた。

ラプラス変換 ($[\mu]_k \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n)_k \mu^n$) を導入することにより、上式は次のように

解ける。

$$[\mu]_k = \frac{(0)_k}{1 - (\hat{1})_k \mu - [\mu]_{k+1} \mu^2} \quad (3-54)$$

上式より、 $[\mu]_0 = M_q[\mu] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} M_q(n) \mu^n$ の連分数展開を得る。

$$[\mu]_0 = \frac{1}{1 - (\hat{1})_0 \mu - \frac{(0)_1 \mu^2}{1 - (\hat{1})_1 \mu - \frac{(0)_2 \mu^2}{1 - \dots}}} \quad (3-55)$$

k番目のモーメント $(n)_k$ は一つ前のモーメントより与えられる。

$$(0)_{k+1} = (\hat{2})_k - (\hat{1})_k^2, \quad (3-56a)$$

$$(1)_{k+1} = (\hat{3})_k - 2(\hat{2})_k(\hat{1})_k + (\hat{1})_k^3, \quad (3-56b)$$

$$(2)_{k+1} = (\hat{4})_k - 2(\hat{3})_k(\hat{1})_k - (\hat{2})_k^2 + 3(\hat{2})_k(\hat{1})_k^2 - (\hat{1})_k^4, \quad (3-56c)$$

モーメント $(n)_k$ は $(0)_0 (=1), (1)_0, (2)_0, \dots, (n+2k)_0$ によって表される。時系列が与えられると“静的モーメント” $\{(0)_k, (1)_k; k=0, 1, 2, \dots\}$ は数値的に計算できるのでこの方法は数値解法として適している。

式(3-55)の極のセットを $\{\mu_q^{(1)}\}$ とし、これらが全て1次の極と仮定する。 $M_q[\mu] (= [\mu]_0)$ のラプラス逆変換より

$$M_q(n) = \sum_l J_q^{(1)} [\mu_q^{(1)}]^{-n}, \quad (3-57)$$

ここで

$$J_q^{(1)} = \frac{i}{2\pi \mu_q^{(1)}} \oint_{C(\mu_q^{(1)})} M_q[\mu] d\mu \quad (3-58)$$

積分路は時計と逆まわりに円 $|\mu - \mu_q^{(1)}| = r, r = +0$, にそって行く。

極の最小値 $\min[|\mu_q^{(1)}|] = |\mu_q^{(0)}|$ は縮退してないので、

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \ln[\mu_q^{(0)}]^{-1} \quad (3-59)$$

モーメント $M_q(n)$ はつねに正であるから $\mu_q^{(0)} > 0$ である。 $Q_n^{(q)}$ は次のように展開できる。

$$Q_n^{(q)} = J_q^{(0)} + \sum_l' J_q^{(1)} \exp[-\beta_q^{(1)} n], \quad (3-60)$$

$(J_q^{(0)} > 0)$ 、ここで $\sum_l'$ は $l=0$ を除く和であり、定義 $\exp[-\beta_q^{(1)}] \equiv \mu_q^{(0)} / \mu_q^{(1)}$, $(\operatorname{Re}(\beta_q^{(1)}) > 0)$, を用いた。

もっとも簡単な時系列、すなわちメモリー効果がないときは $\lambda_q = q^{-1} \ln M_q(1)$ となる。メモリー効果があると、

$$\lambda_q = \lambda_q^0 + \nu_q \quad (3-61)$$

ここで

$$\lambda_q^0 \equiv \frac{1}{q} \ln M_q(1) \quad (3-62)$$

式(3-61)の ν_q を相関によるくりこみ(correlation renormalization)と名づける。

この具体的な近似方法について述べる。

[1] 2極近似

$(0)_2 = 0$ と仮定すると、 $[\mu]_0$ の極は

$$[\mu_q^{(\pm)}]^{-1} = \exp(q \lambda_q^0) [a_q \pm (a_q^2 - 4b_q)^{1/2}] / 2 \quad (3-63)$$

ここで

$$a_q = 1 + (\hat{1})_1 / (\hat{1})_0, \quad (3-64)$$

$$b_q = [(\hat{1})_0 (\hat{1})_1 - (\hat{0})_1] / (\hat{1})_0^2. \quad (3-65)$$

この近似は $a_q^2 > 4b_q$ かつ $\mu_q^{(+)} > 0$ の時に有効である。相関によるくりこみは

$$\nu_q = \frac{1}{q} \ln \left[\frac{a_q + (a_q^2 - 4b_q)^{1/2}}{2} \right]. \quad (3-66)$$

一般相関関数 $Q_n^{(q)}$ は

$$Q_n^{(q)} = J_q^{(+)} + J_q^{(-)} \exp(-\gamma_q n), \quad (b_q > 0) \quad (3-67)$$

$$= J_q^{(+)} + J_q^{(-)} (-1)^n \exp(-\gamma_q n), \quad (b_q < 0) \quad (3-68)$$

ここで

$$J_q^{(+)} = [(\hat{1})_1 - \frac{1}{\mu_q^{(+)}}] / \left[\frac{1}{\mu_q^{(-)}} - \frac{1}{\mu_q^{(+)}} \right], \quad (3-69)$$

$$J_q^{(-)} = 1 - J_q^{(+)} \quad (3-70)$$

$$\gamma_q = \ln \left| \frac{a_q + (a_q^2 - 4b_q)^{1/2}}{a_q - (a_q^2 - 4b_q)^{1/2}} \right|, \quad (>0). \quad (3-71)$$

上式の γ_q は q で特徴づけられるモードの減衰定数である。特に $\gamma_0 (\equiv \lim_{q \rightarrow 0} \gamma_q)$ は二時間相関関数 C_n の減衰定数に一致している。実際、もし $|C_n| = C_0 e^{-\gamma n}$ とおくと

(3-71) より

$$\gamma_0 = \ln \left| \frac{C_1}{C_2} \right| = \gamma. \quad (3-72)$$

2極近似の場合は、可能な特性振動数は π となり、 q に依存しない。

[II] 3極近似

この近似は $(0)_3 = 0$ とおくことに対応している。極は $[\mu]_0^{-1} = 0$ から導かれる3次方程式の根である。次の二つのタイプがある。

(a) 3つの実根

原点に最も近い極は縮退していなくて正である。これより(3-59)によって λ_q が求まる。一般相関関数は(3-60)より求まる。

(b) 複素共役根と一つの実根

複素共役根を $\mu_q^{(1)}$, $\mu_q^{(2)} (= \mu_q^{(1)*})$ とする。もう一つの実根 $\mu_q^{(0)}$ は $0 < \mu_q^{(0)} < |\mu_q^{(1)}|$ をみたす。 λ_q は $\mu_q^{(0)}$ を用いて(3-53)より求まる。根の比より

$$\mu_q^{(0)} / \mu_q^{(1)} = \exp(-i\omega_q - \gamma_q), \quad (3-73)$$

ここで、 ω_q は実数で $\gamma_q > 0$ である。一般相関関数は次式で与えられる。

$$Q_n^{(q)} = J_q^{(0)} + 2 \operatorname{Re} [J_q^{(1)} \exp \{-(i\omega_q + \gamma_q)n\}], \quad (3-74)$$

($J_q^{(2)} = J_q^{(1)*}$), ここで $J_q^{(1)}$ は(3-58)より決まる。2極近似と異なるところは、この場合、 ω_q は q に依存している。 ω_0 は2時間相関関数 C_n の振動数と一致し、また γ_0 は C_n の減衰定数と一致している。

以下、同様にして、極の数を増すことにより、高次の相関効果を取り入れることができる。N極近似は、

$$(0)_N = 0 \quad (3-75)$$

とおくことに対応している。我々は長時間($n \rightarrow \text{large}$)のダイナミクスに興味があるから、小さい n の $M_q^{(1)}(n)$ が $M_q(n)$ に大きな寄与をする。多モードによるcritical slowing downをともしう相転移点近傍を除いて、上の方法は有効である。ある場合には $(0)_m = 0$ となることがある。この場合は m 極近似が厳密解と一致する。また q の大きさで、近似の度合が一般に異なる。

§ 4 揺動スペクトル理論の他の分野への応用

4-1 マルチ・フラクタル集合と乱流

この節では、我々の「揺動スペクトル理論」において、注目する変数を適当に選ぶことにより、Procaccia - Halsey等のマルチ・フラクタル集合の特異点スペクトル理論およびFrisch - Parisiの乱流の構造関数理論が得られることを示す。

カオス運動によって生じるストレンジ・アトラクターは一般にマルチ・フラクタル構造をもつ。このような集合を解析する理論として、以下のような特異点スペクトル理論が提起されている。実験から得られるストレンジ・アトラクターの代表点の総数を N とする。状態空間を体積 $\sim \varepsilon^d$ のボックスに分割する、ここで

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-n}, \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (4-1)$$

であり、 ε_0 は最初の分割のスケール、 d はストレンジ・アトラクターが含まれている状態空間の位相次元である。確率 $P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} (N_i / N)$ を導入する、ここで N_i は i 番目のボックスに含まれる代表点の数である。この確率を用いてRenyi次元 D_q を次式で導入する。

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1-q} \frac{\ln \chi(q)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad (4-2)$$

ここで

$$\chi(q) = \sum_i P_i^q. \quad (4-3)$$

上式の和は $P_i \neq 0$ のボックスについて行う。分割が $\varepsilon_0 e^{-(n+1)} = \varepsilon / e$ のときの、 j 番目のボックスの確率を $\tilde{P}_j$ とする。いま、 P_i^{-1} と $\tilde{P}_j^{-1}$ を A_n と A_{n+1} で、それぞれ表す。もし比 A_{n+1}/A_n が n に統計的に依存しないならば、揺動スペクトル理論を適用することができる。実際、 $\chi(q)$ はモーメントと同一である。すなわち

$$\begin{aligned} \chi(q) &= \sum_i P_i \cdot (P_i^{-1})^{1-q} \equiv \langle A_n^{1-q} \rangle, \\ &= M_{1-q}(n). \end{aligned} \quad (4-4)$$

式(4-2)より $\chi(q) \sim \varepsilon^{-(1-q)D_q} \sim \exp[(1-q)D_q n]$ 。これと(1-4)、(1-6)より D_q は λ_{1-q} にほかならないことがわかる。

ところで、特異点スペクトル理論ではスケーリング指数 α_i は次式で導入されている。

$$P_i(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\alpha_i}; \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (4-5)$$

ここで $P_i(\varepsilon)$ はボックスのサイズが ε のときの P_i を表している。この指数 α_i は場所によって異なるが、その値が α であるボックスの個数を $N_\alpha(\varepsilon)$ と表すとき、

$$N_{\alpha}(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-f(\alpha)} \quad (4-6)$$

とおけると仮定する。指数 $f(\alpha)$ は、 α_i の値が α である特異点 ($\varepsilon \rightarrow 0$ のボックス) の集合のフラクタル次元を表している。ここに導入された特異点スペクトル $f(\alpha)$ と我々の揺動スペクトル $\sigma(\alpha)$ の関係などを表 4.1 に示してある。結局、自己相似変数 A_n として $P_1(\varepsilon)^{-1}$ を採用すると我々の揺動スペクトル理論の一つの応用例として特異点スペクトル理論が導けることがわかった。ただし、 D および $f(\alpha)$ の解釈にはそれ独自のものがある。

次に乱流理論との関係を調べる。十分に発達した乱流については、間欠性効果による K 4 1 理論の補正が問題となる。この間欠性効果は次式で導入される指数 ζ_p より観測される。

$$\langle [\Delta V(r)]^p \rangle \sim r^{\zeta_p} \quad (4-7)$$

ここで $\Delta V(r) (> 0)$ は、距離が r だけ離れている 2 点間の従速度の差である。この問題に対して、対数正規分布理論がある。もう一つの理論として黒・白モデルを用いる理論がある。Frisch と Parisi が展開した、この問題へのアプローチを我々の言葉で述べる。まず、 r_0 をエネルギーを外部から投入するときのスケールとする。Navier-Stokes 方程式の非線形相互作用を通して、より小さな活性領域がつぎつぎに生成されていく。この場合の自己相似性の起源は、この生成の機構によっている。次のスケールを導入する。

$$r_n = r_0 e^{-n}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (4-8)$$

次の比

$$\frac{\Delta V(r_{n+1})}{\Delta V(r_n)} = e^{u_n}, \quad (4-9)$$

が n に統計的に依存しないと仮定する。上式を解くことにより、

$$\Delta V(r_n) \sim \exp(-n h') \sim r_n^{h'}, \quad (4-10)$$

ここで $h' \equiv -n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ は確率変数である。上式は Frisch-Prisi の結果と本質的に同一である。彼等によると、 $d(h')$ は (4-10) をみたす点の集合のハウスドルフ次元と解釈できる。指数 ζ_p は

$$\zeta_p = \min_n [p h' + 3 - d(h')], \quad (4-11)$$

より得られる。 ζ_p は熱力学の Massieu 関数に対応している。乱流の場合は自己相似変数として $\Delta V(r)$ を採用すればよい。他の理論との対応関係を表 4.1 に示してある。

equilibrium statistical mechanics	strange sets	time series	velocity structure functions in turbulence
N particle number	$\ln(1/l)$	n	$\ln(1/r)$
e^{-E} E : total energy	p_i^{-1}	e^{X_n} ($X_n \equiv \sum_{j=0}^{n-1} u_j$)	$\Delta V(r)$
$\beta (=1/k_B T)$ inverse temperature	$1-q$	q	p
$\int \Omega_N(E) e^{-\beta E} dE$ partition function	$\sum_i p_i^q$ ($\equiv \langle (p_i^{-1})^{1-q} \rangle$)	$\langle [e^{X_n}]^q \rangle$	$\langle [\Delta V(r)]^p \rangle$
f Helmholtz free energy	D_q	λ_q	$-\frac{\zeta_p}{p}$
$\frac{d}{d\beta}(\beta f) \equiv u$ internal energy	$\frac{d}{d(1-q)}[(1-q)D_q]$ ($\equiv \alpha$)	$\frac{d}{dq}(q\lambda_q)$ ($\equiv \alpha$)	$\frac{d}{dp}\left(p \cdot \frac{-\zeta_p}{p}\right)$ ($\equiv -h$)
$-\frac{df}{d\beta^{-1}} \equiv s(u) \geq 0$ entropy/ k_B	$-\frac{dD_q}{d(1-q)^{-1}}$ ($\equiv \alpha - f(\alpha) \geq 0$)	$-\frac{d\lambda_q}{dq^{-1}}$ ($\equiv \sigma(\alpha) \geq 0$)	$-\frac{d}{dp^{-1}}\left(\frac{-\zeta_p}{p}\right)$ ($\equiv 3 - d(h) \geq 0$)
$\frac{ds(u)}{du} = \beta$	$\frac{d(\alpha - f(\alpha))}{d\alpha} = 1 - q$	$\frac{d\sigma(\alpha)}{d\alpha} = q$	$\frac{d(3 - d(h))}{d(-h)} = p$
$f = u - \frac{s(u)}{\beta}$	$D_q = \alpha - \frac{\alpha - f(\alpha)}{1 - q}$	$\lambda_q = \alpha - \frac{\sigma(\alpha)}{q}$	$\frac{-\zeta_p}{p} = -h - \frac{3 - d(h)}{p}$
$\frac{du}{d\beta^{-1}} > 0$	$\frac{d\alpha}{d(1-q)^{-1}} < 0$	$\frac{d\alpha}{dq^{-1}} < 0$	$\frac{d(-h)}{dp^{-1}} < 0$
$\frac{d^2 s(u)}{du^2} < 0$	$\frac{d^2(\alpha - f(\alpha))}{d\alpha^2} > 0$	$\frac{d^2 \sigma(\alpha)}{d\alpha^2} > 0$	$\frac{d^2(3 - d(h))}{d(-h)^2} > 0$

Table 4.1. Correspondence of thermodynamic relations among the statistical-mechanics formalism and others in different systems. The minor differences are the sign of the heat capacity correspondence and the convexity of the entropy correspondence. $\Omega_N(E)$ is the state density function. The quantity $\exp(-E)$ should be read as the use of the total energy E appropriately made dimensionless.

4-2 局所次元の揺らぎ

フラクタル集合は一般に均一ではないので、平均次元、次元の揺らぎの中、揺らぎのスペクトルなどが得られる特性量の導入が望まれる。そのような特性量として $D(\beta)$ を提案する。ところで、前節で紹介したRenyi次元 D_q は不均一性の一つの側面を捉えている。しかし、上記の観点からみると、いくつかの問題点がある。まずこの D_q を批判的に検討する。(1) $D_{q=0}$ は容量次元を表しているが、 $D_{q \neq 0}$ は次元というよりもボックス・サイズを小さくしていくときのRenyiエントロピー $I_q = [1/(1-q)] \ln \sum P_i^q$ の生成速度である。(2) $D_{q=-\infty}$ (最も測度の小さいところより決まる) を実測値より求めるのは困難であり、 $D_{q=-\infty}$ は一般に集合を含むユークリッド空間の次元よりも大きくなる。(3) $D_{q=0}$ は最も測度が大きいセミ・マクロな領域の寄与で決定され、集合が不均一な場合は集合の大局的な性質を表す量になっていない。次に述べる局所容量次元の最大値に $D_{q=0}$ は一致しており、局所次元の平均値になっていない。

我々が提案する $D(\beta)$ は次のように定義される。まず集合を M 個のセミ・マクロなセルに分割し、 k 番目のセルの容量次元を d_k とする。 β 次フラクタル次元 $D(\beta)$ を次式で定義する。

$$D(\beta) = \frac{1}{\beta} \ln \langle \exp(\beta d_k) \rangle_{\text{cell}} \quad (4-12)$$

ここで $\langle \dots \rangle_{\text{cell}}$ は次式で定義されるセル平均である。

$$\langle \exp(\beta d_k) \rangle_{\text{cell}} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \exp(\beta d_k). \quad (4-13)$$

M -値 $\{d_k; k=1 \sim M\}$ 確率モデルを考える。確率過程に相関がなく、どの値の出現確率も同一であると仮定する。このモデルに相似指数 λ_q を適用すると λ_q は(4-12)の $D(\beta)$ に一致する、ただし q は β に対応している。 λ_q の方法で得られた解釈を $D(\beta)$ に適用する事により、次の結果を得る。

$$D(0) = \text{セル平均次元}, \quad (4-14)$$

$$D(\infty) = \text{Max } \{d_k\}, \quad D(-\infty) = \text{Min } \{d_k\}, \quad (4-15)$$

$$\langle (d_k - \langle d_k \rangle_{\text{cell}})^2 \rangle_{\text{cell}} = 2 \left[\frac{dD(\beta)}{d\beta} \right]_{\beta=0}. \quad (4-16)$$

ところで、従来の容量次元 D_0 あるいは $q=0$ とおいたRenyi次元は $D_0 = D_{q=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln N(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon)$ と表される、ここで $N(\varepsilon)$ はボックスのサイズが ε のときの空でないボックスの個数である。 $N_k(\varepsilon)$ を k 番目のセルの中にある空でないボックスの数であるとすると、 $\ln N(\varepsilon) = \ln \sum_{k=1}^M N_k(\varepsilon)$ と表すことができる。 $N_k(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-d_k}$ であらから、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $\ln \sum_{k=1}^M N_k(\varepsilon)$ に主要に寄与するのは最も大きい d_k をもつセルのみである。これより $D_0 = D(\infty) = \text{Max } \{d_k\}$ が得られる。すな

わち、 $D_c (= D_{q=0})$ は局所フラクタル次元の集合全体にわたる平均になっていない。

$D(\beta)$ は λ_q と同一であることがわかったが、 λ_q の場合と同様に、次の量を導入する。

$$\alpha = \frac{d}{d\beta} [\beta D(\beta)], \quad (4-17)$$

$$\sigma(\alpha) = \beta^2 \frac{dD(\beta)}{d\beta}. \quad (4-18)$$

この $\sigma(\alpha)$ は局所次元の揺動スペクトルである。

4-3 イジング・スピン型パターン

定常な 2 値記号時系列のランダム性を解析する新しい方法を提案し、それを一次元マップより生成される時系列に適用する。この方法は 2 次元、3 次元に拡張できるので、統計的に均一なイジング・スピン型パターンに応用することができる。

まず与えられた一次元時系列に適当な規則を適用して 2 値記号時系列に変換する。記号は上スピン $\uparrow$ と下スピン $\downarrow$ から成るとし、時系列を n (奇数) 個のスピンからなるブロックに分ける。このとき、ブロックの数は H (整数) 個だとする。

各ブロックにおいて、 $\uparrow$ が $\downarrow$ より多いときは $\uparrow$ で置き替え、 $\downarrow$ が $\uparrow$ より多いときは $\downarrow$ で置き替えるという“くりこみ”をほどこす。このくりこみによって生まれた新しい時系列は、 n^{H-1} 個のスピンからできているのでヒエラルキー序数 ($H-1$) の系と呼ぶことにする。ヒエラルキーの序数 h が $h=0$ になるまで、このくりこみを順次ほどこす。

注目する変数として、序数 h の系の中にあるクラスターの数 N_h を採用する。クラスターとは、同一方向を向いた一連のスピン集団である。最初に非常に長い時系列を用意しておき、これを長さ n^h に分割して多くのアンサンブルのメンバーをつくっておく。平均 $\langle \dots \rangle$ はこのアンサンブル平均をとることにする。フラクタル次元の考えと同様にし、 $\langle N_h \rangle = n^{hd(h)}$ と表したときの $d(h)$ を序数 h の系を特徴づける指数とみなす。この $d(h)$ を序数 h の“特性指数”と呼ぶことにする。これをあらわに表すと、

$$d(h) = \frac{1}{h} \log_n \langle N_h \rangle \quad (4-19)$$

上式で $\langle N_h \rangle$ を分割の数、 n^{-h} を相似比とみなせば $d(h)$ は相似次元に対応している。

具体的な時系列の解析を行うまえに、範例となる 3 つの型を調べることにする。範例となるのは、(1) F 型これは完全強磁性型 (2) AF 型これは完全反強磁性型 (3) PR 型これは相関が全くない純確率的 (pure random) な場合である。以上の 3 つである。このうち F 型と AF 型 ($h > 1$) はくりこみをほどこしても全く同一の型が得られるから、完全自己相似型である。他方 PR 型は $h \gg 1$ のとき、 h に依らずランダムであるから統計的自己相似型である。いずれの場合も N_h を自己相似変数とみなせる。

容易に次の結果を得る。

$$d(h) = 0 \quad \text{for } F \text{ 型}, \quad (4-20)$$

$$d(h) = 1 \quad \text{for } AF \text{ 型}, \quad (4-21)$$

$$d(h) = \frac{1}{h} \log_n \frac{n^h + 1}{2} \quad \text{for } PR \text{ 型}. \quad (4-22)$$

ここで、 $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\cdots$ という完全自己相似型の $d(h)$ はPR型の $d(h)$ と同一になる。完全自己相似型の場合、アンサンブル・メンバーのどれかが互いに全く同一である。ところが、PR型の場合は、一般にアンサンブルのメンバーによって N_n の値が異なっている。この揺らぎを表現するために、相似指数 λ_q と同一の考えにもとづき、次の q -次特性指数 $d_q(h)$ を次式で導入する。

$$d_q(h) = \frac{1}{q \cdot h} \log_n \langle N_n^q \rangle. \quad (4-23)$$

この場合、 $h \rightarrow \infty$ の極限はとらずに、 h を一つのパラメータとしておく。

完全自己相似型の場合、 $d_q(h)$ の q 依存性はなく、

$$d_q(h) = d(h) \quad \text{for 完全自己相似型} \quad (4-24)$$

となる。ところが、アンサンブル・メンバーに揺らぎがある場合は、上式が成立しない。PR型については次の結果を得る。

$$d_q(h) = \frac{1}{q \cdot h} \log_n \left\{ \sum_{r=1}^n p_r \cdot r^q \right\} \quad (4-25)$$

ここで

$$p_r = n^{-1} C_{r-1} / 2^{n-1} \quad (4-26)$$

上式の $d_q(h)$ は $q=1$ のとき(4-22)式と一致する。

このようにして、 $d(h)$ では区別がつかなかったPR型と $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\cdots$ 型は $d_q(h)$ より区別がつけられることがわかった。 λ_q の場合と同様にして揺動スペクトル $\sigma(\alpha, h)$ は次の式より求まる。

$$\alpha = \frac{d}{dq} [q \cdot d_q(h)], \quad (4-27)$$

$$\sigma(\alpha, h) = q^2 \frac{d}{dq} [d_q(h)]. \quad (4-28)$$

完全自己相似型の場合、ある α の値のところで σ は零となり、他の α に対しては無限大となる。例えば

$$\sigma(\alpha, h) = \begin{cases} 0 & \text{for } \alpha = 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{F 型} \quad (4-29)$$

$$\sigma(\alpha, h) = \begin{cases} 0 & \text{for } \alpha = 1 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{AF型} \quad (4-30)$$

$$\sigma(\alpha, h) = \begin{cases} 0 & \text{for } \alpha = \frac{1}{h} \log_n \left(\frac{n^h + 1}{2} \right) \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad \uparrow \uparrow \downarrow \downarrow \text{型} \quad (4-31)$$

PR型の $d_q(h)$ と $\sigma(\alpha, h)$ については図4.1に示してある。

q -次特性指数 $d_q(h)$ を用いることにより揺らぎをとりこむことができた。しかし、この場合 h を大きくしていくと、PR型の $d_q(h)$ はAF型の $d_q(h)$ に近づいていき、PR型の揺らぎが表現し難くなってくる。そこで前節で導入された局所フラクタル次元の考えをいま問題にしている時系列に適用してみる。

ヒエラルキー序数 h の局所特性指数 $D(\beta, h)$ を次式で定義する。

$$D(\beta, h) = \frac{1}{\beta} \ln \langle \exp[\beta \cdot d_k(h)] \rangle, \quad (4-32)$$

ここで $d_k(h)$ は k 番目のセルの局所特性指数であり、次式で定義される。

$$d_k(h) = \frac{\ln N_k(m, h)}{\ln m}. \quad (4-33)$$

上式の m はセルの中にあるスピンの個数であり、 $N_k(m, h)$ は k 番目のセルの中にあるクラスターの個数である。範例については容易に $D(\beta, h)$ を求めることができる。結果を示すと

$$D(\beta, h) = 0, \text{ for F型} \quad (4-34)$$

$$D(\beta, h) = 1, \text{ for AF型} \quad (4-35)$$

$$D(\beta, h) = \frac{1}{\beta} \ln \left| \sum_{r=1}^j \frac{j-1}{2^{r-1}} \exp\left(\beta \frac{\ln r}{\ln j}\right) \right|, \text{ for PR型} \quad (4-36)$$

式(4-36)における j はセルの中のスピンの個数である。 j として、くりこみの単位 n と同一の値をとると $D(\beta, h)$ の β, h 依存性について、単純な結果を得る。これは表4.2に示してある。

局所特性指数 $D(\beta, h)$ は λ_q に対応しているので、(2-16), (2-17)と同様にして、この場合の揺動スペクトルを求めることができる。

次にマップによって発生させた時系列に上の方法を適用してみる。これにより新しいタイプのカオス・カオス転移を得る。用いるマップは

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[\sin \left\{ a \pi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right\} + 1 \right]; \quad (0 \leq x < 1) \quad (4-37)$$

ここで a はコントロール・パラメーターであり、その変域は $0 \leq a \leq 3$ としている、ま

PR

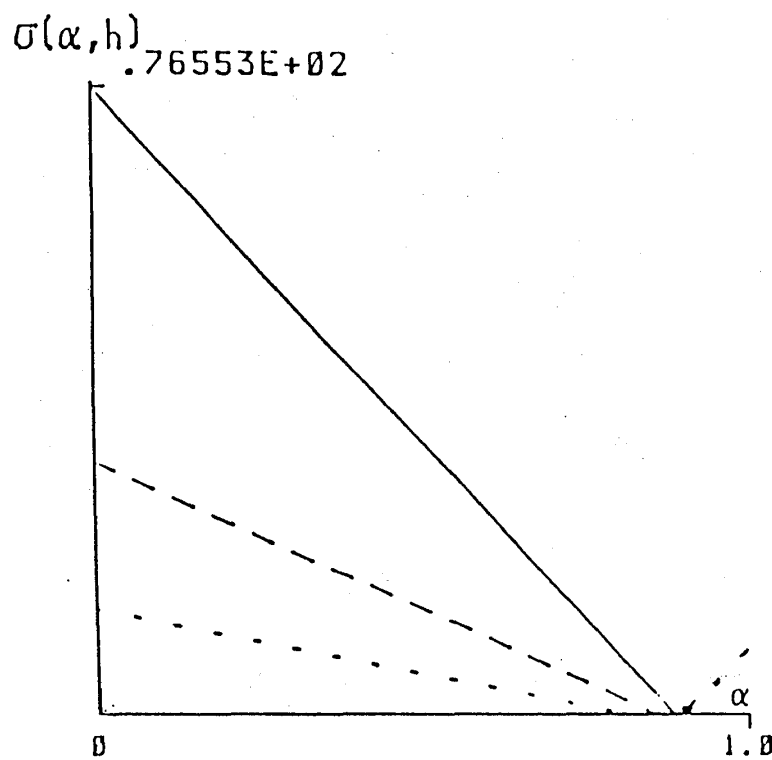
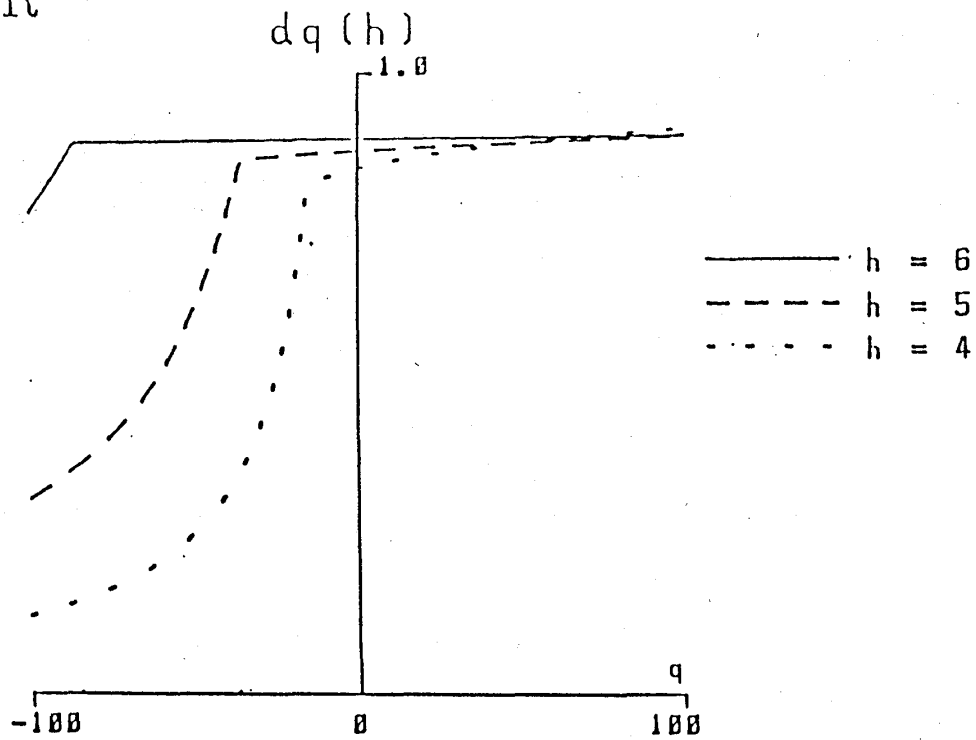


Fig.4.1. $d_q(h)$ and $\sigma(\alpha, h)$ for PR-type.

タイプ	パラメーター	β	h
完全自己相似	F , AF	indep.	indep.
統計的自己相似	PR , SS	dep.	indep.
その他	Para	dep.	dep.

β ; 局所的な揺らぎの情報を表現する

h ; 見るスケールによる揺らぎの情報を表現する

Table 4.2. β and h dependences of $D(\beta, h)$.

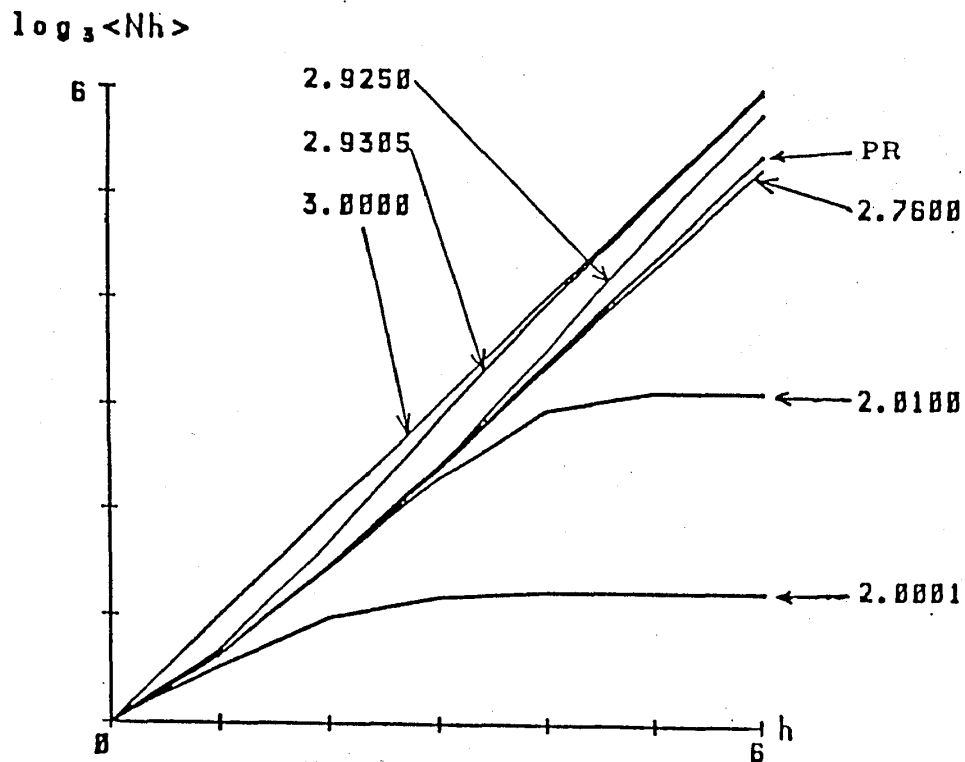


Fig.4.2. h versus $\log_3 \langle N_h \rangle$ for various values of a and PR-type.

た $f(x)$ は $f(x) = 1 - f(1 - x)$ なる対称性をもっている。記号化の規則は

$$\begin{aligned} 0 \leq x_j < \frac{1}{2} & \quad ; \uparrow \\ \frac{1}{2} \leq x_j < 1 & \quad ; \downarrow \end{aligned} \quad (4-38)$$

を用いることにする。

コントロール・パラメータ a の値が $a < a_F$ ($a_F = 2$) のとき、F 型時系列を得る。また AF 型は $\cos \{(a^2 \pi^2 - 4)^{1/2} / 2\} = -2 / (a \pi)$ をみたす a を a_{AF} ($= 2.930576 \dots$) としたとき、 $a > a_{AF}$ なる a の値の場合に得られる。 a の値を変域 $a_F < a < a_{AF}$ の間で変化させると、無限に多様なタイプの時系列を得る。その中には周期的なものと非周期的なものがある。以下、くりこみの単位 n は $n = 3$ とする。いろいろな a の値に対するドメインの平均個数の対数 $\log_3 \langle N_h \rangle$ のヒエラルキー序数 h 依存性を図 4.2 に示す。F 型と AF 型は直線となりその傾きが (4-19) の $d(h)$ を与える。 h の小さいところを除くと、 $a = a_{ss}$ (≈ 2.76) のところで図のように直線を得る。この図において直線であるということは比 $\langle N_{h+1} \rangle / \langle N_h \rangle$ が一定であることであるから、この場合の N_h は自己相似変数になっている。

a の値が a_F より少し大きいと、 h の小さいところでは $a = a_{ss}$ の場合の線と重なっているが h が大きくなると、図のように水平となり、その傾きは F 型と同一となる。また a の値が a_{AF} より少し小さいと、 h の小さいときは $a = a_{ss}$ の場合の線と重なっているが h が大きくなると AF 型の直線にすい込まれていく。ところが $a = a_{ss}$ の場合は傾きが F 型と同一にもならず、また AF 型の直線にもすい込まれない、境目の場合となっている。この場合の曲線は (4-22) から得られる PR 型の曲線と殆ど一致する。 h が大きいところでは CT 型の傾きは 1 であり、 $a = a_{ss}$ の時の数値的結果は 0.9 であった。この 1 からのずれが時系列に内在しているある種の相関によるものと思われる。 $a = a_{ss}$ のときのマップには極めて多くの不安定周期がある。これより記号化された時系列のスピンの配置は極めて乱雑になっている。 a の値が周期解を与える特殊な場合以外は一般にパラ型の乱雑なスピン配列を得る。一見しただけではその乱雑さを区別できないが、 $d(h)$ の h 依存性より、乱雑さのある側面が区別できる。特に $a = a_{ss}$ の場合は F 型的でもなく AF 型的でもない、極めて乱雑なスピン配列をしているが、それ故に逆に h の大きいところで直線になるという単純な規則をもっている。最も乱雑なものは、それ故に単純であるという一例になっている。

一般にスピン配列のようすは場所によってことになっている。そこで局所特性指数 $D(\beta, h)$ を求めてみる。PR 型の $D(\beta, h)$ とそれから得られる $\sigma(\alpha, h)$ を図 4.3 に示してある。 $a = a_{ss}$ の場合の同様な図は図 4.4 に示した。 $a = a_{ss}$ の場合は PR 型と同様に $D(\beta, h)$ は β に依存しており、 h には殆ど依存しない。F 型に近いパラと AF 型に近いパラの場合は図 4.5 と 4.6 に示してある。この場合、これらのパラ型は h に依

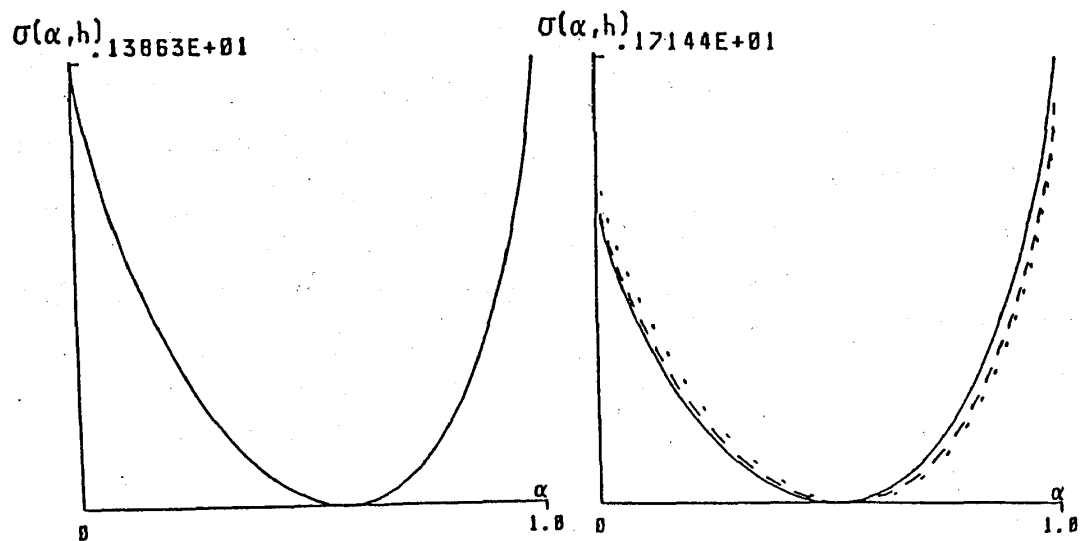
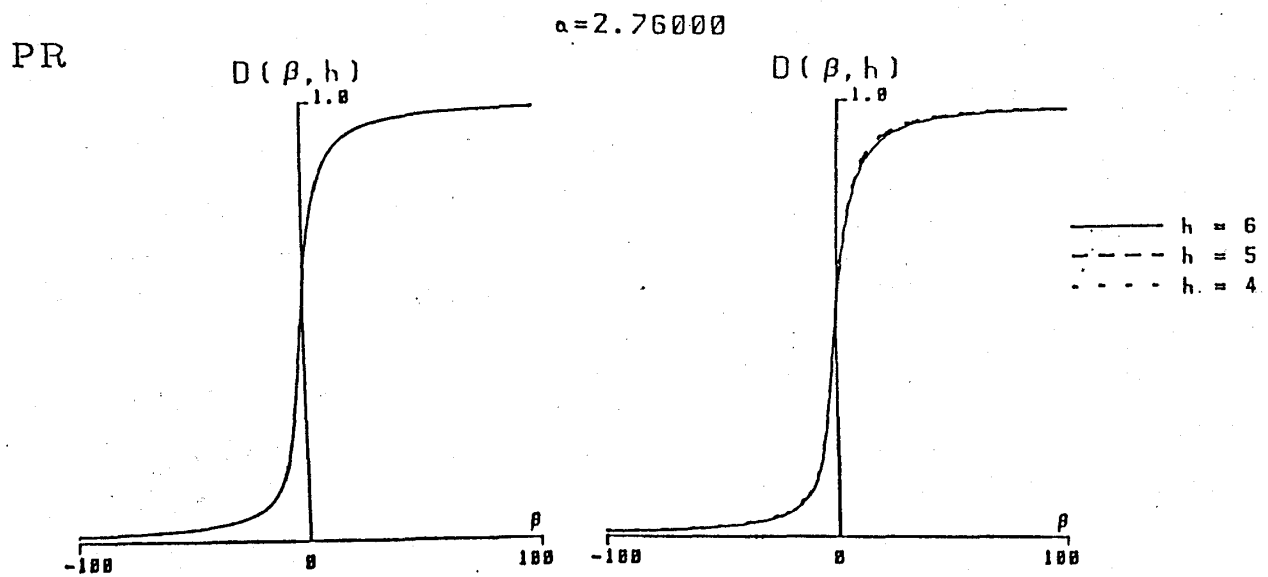
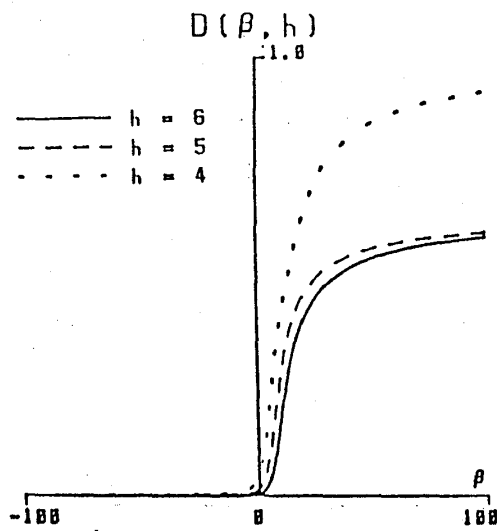


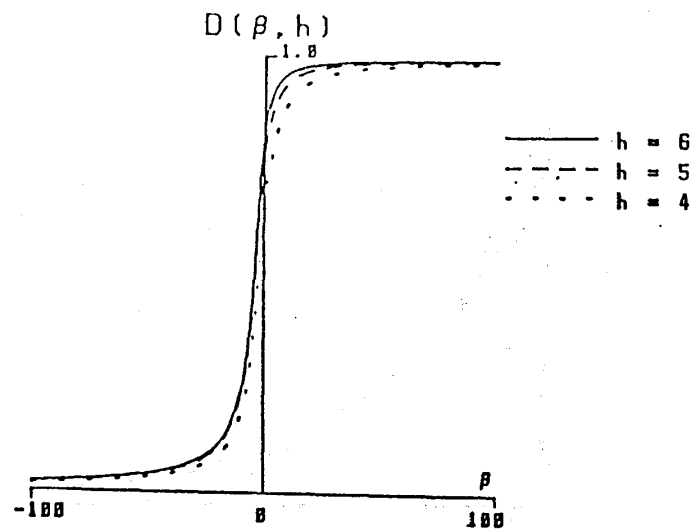
Fig.4.3. $D(\beta, h)$ and $\sigma(\alpha, h)$ for PR-type.

Fig.4.4. $D(\beta, h)$ and $\sigma(\alpha, h)$ for $a=2.76$.

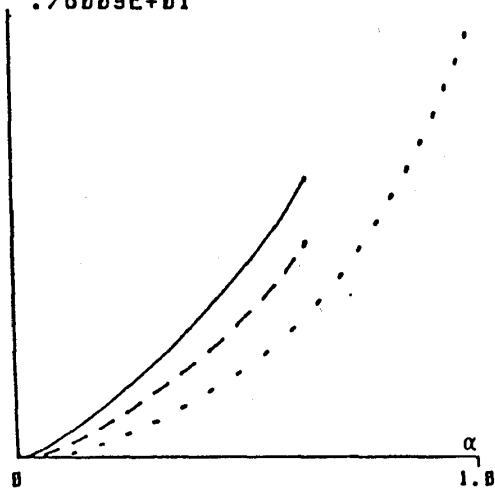
$a=2.00010$



$a=2.92500$



$\sigma(\alpha, h)$
76009E+01



$\sigma(\alpha, h)$
21796E+01

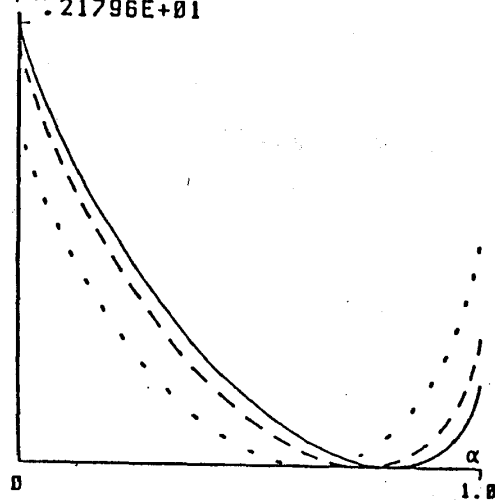


Fig.4.5. $D(\beta, h)$ and $\sigma(\alpha, h)$ for $a=2.0001$ (near F-type).

Fig.4.6. $D(\beta, h)$ and $\sigma(\alpha, h)$ for $a=2.925$ (near AF-type).

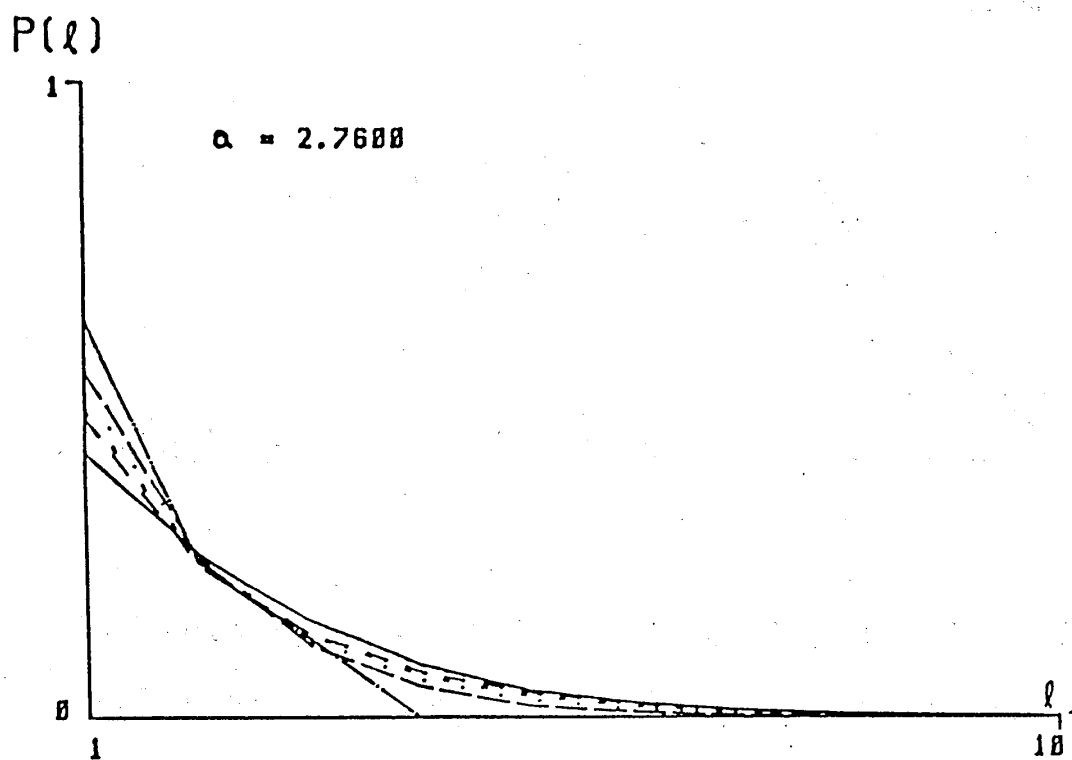
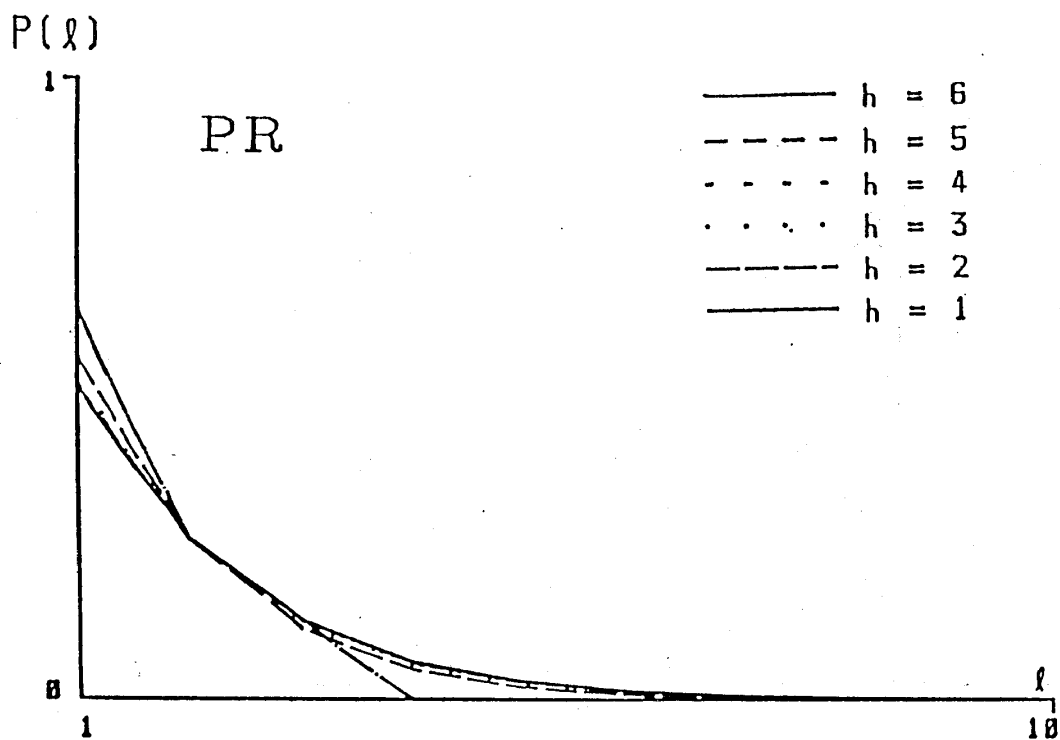


Fig.4.7. The distributions $P(l)$ for different values of h for PR-type and for $a=2.76$ ($=a_{ss}$).

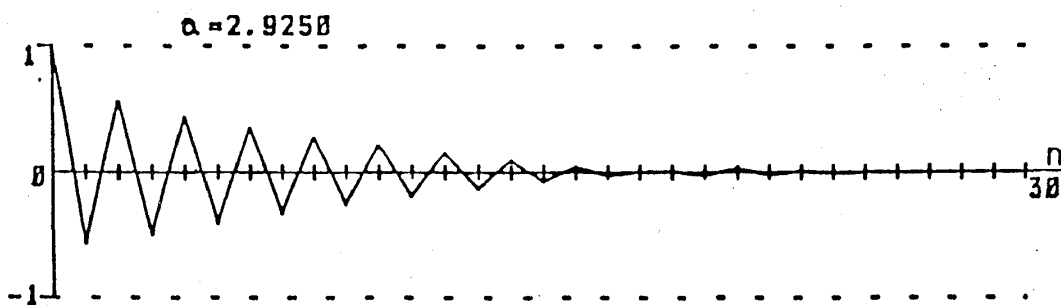
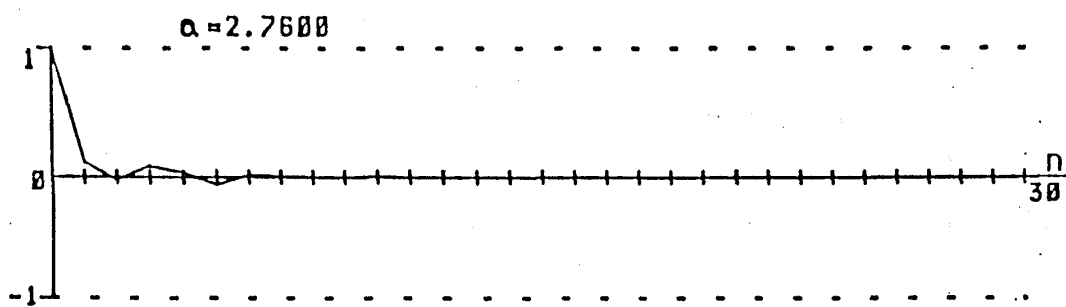
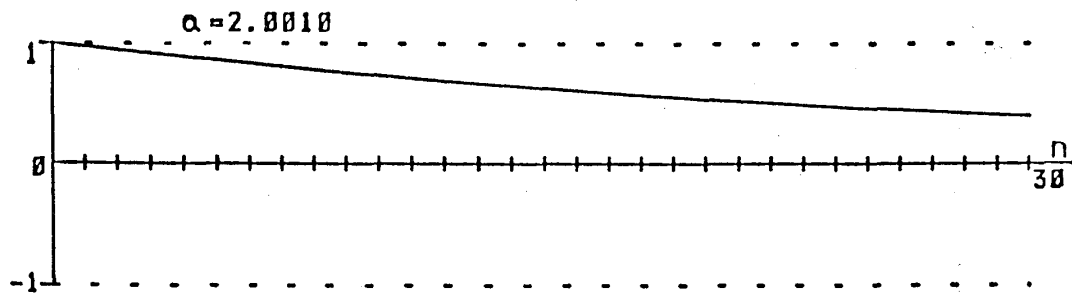


Fig.4.8. The double-time correlation function for $a=2.001$ (near F-type), $a=2.76$ ($=a_{ss}$) and $a=2.925$ (near AF-type).

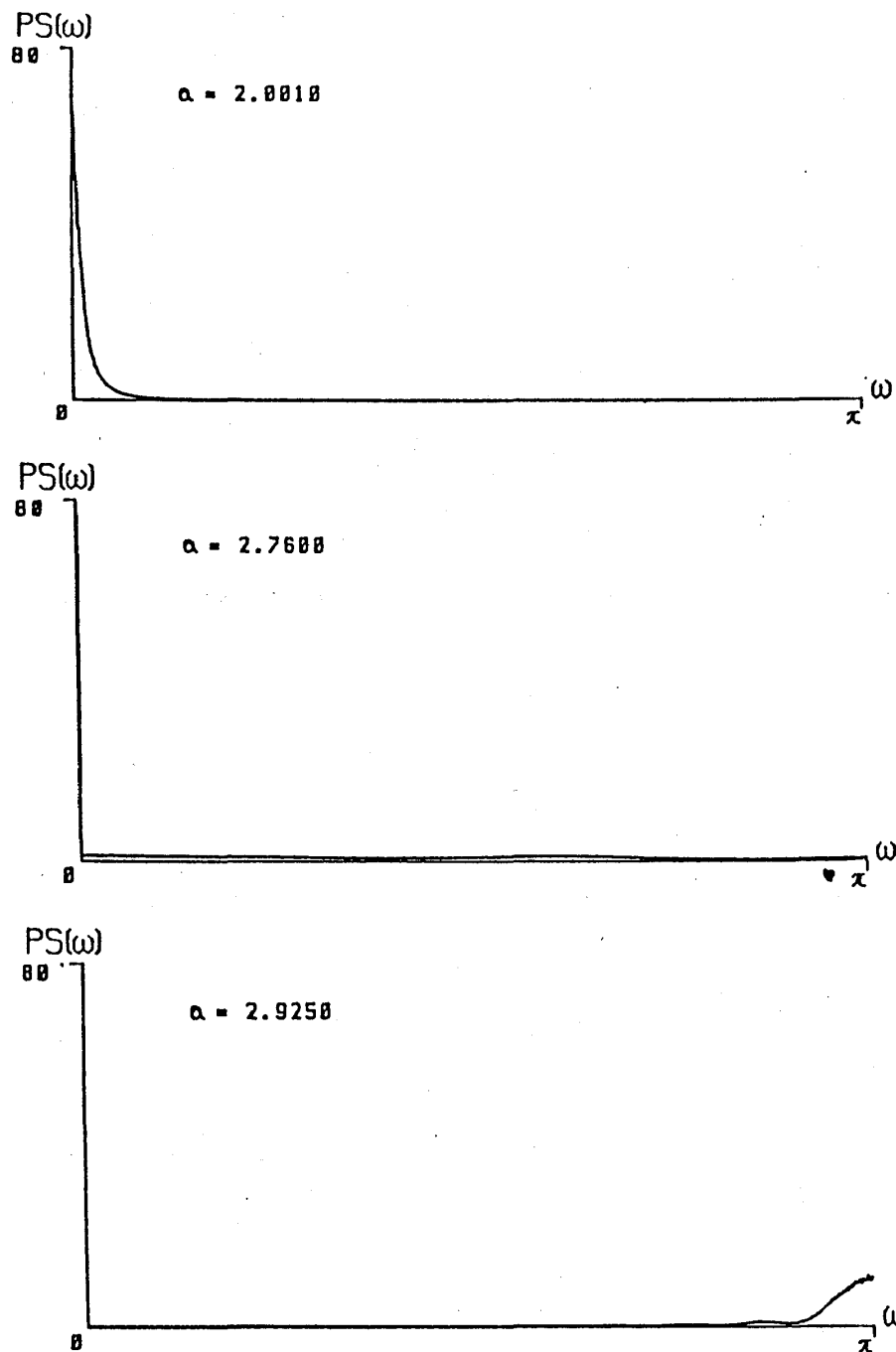


Fig.4.9. The power spectra for $a=2.001$ (near F-type), $a=2.76$ ($=a_{ss}$) and $a=2.925$ (near AF-type).

存するが $a = a_{ss}$ の場合は殆ど h に依存しない。 $D(\beta, h)$ の方法の良いところは n 個 (いまの場合は $n = 3$) のブロックが多数あれば計算できるので、比較的、短い時系列からでも高い精度の $D(\beta, h)$ を求めることができる。

$a = a_{ss}$ のところの時系列の中にはいろんなサイズのドメインが混在している。この様子を、クラスターの長さが l である確率分布 $P(l)$ で調べてみると図 4.7 に示してあるように $a = a_{ss}$ のときは PR 型とほぼ同じであり h に殆ど依存しない。つまり統計的自己相似であるときは、粗視化の程度を変えてもスピンの配列は同様に乱雑である。PR 型の場合はこの確率分布を厳密に計算することができる。長さ j のスピン時系列の中に長さ l のクラスターが出現する確率を $P_j(l)$ とすると、

$$P_j(l) = \frac{1}{(j+1)2^{j-2}} \quad \text{for } l = j \text{ (最大ドメイン)} \quad (4-39)$$

$$P_j(l) = \frac{(j+3-l)}{(j+1) \cdot 2^l} \quad \text{for } l \leq j-1. \quad (4-40)$$

このように短いクラスターほど出現確率が高い。ヒエラルキー序数 h が大きいとき、すなわち $j (=3^h)$ が大きいとき、無視できない大きさをもつ $P_j(l)$ を与える l は $j \gg l$ を満たす。このとき、 $P_j(l)$ は次の漸近形をもつ。

$$P_j(l) = \frac{1}{2^l} \quad (4-41)$$

上式の $P_j(l)$ は j に依存していない。すなわちくりこみを行っても確率分布は変化しないことを示している。 $a = a_{ss}$ の場合の $P(l)$ と (4-41) の $P_j(l)$ は殆ど一致している。

ちなみに、時系列の 2 体相関を図 4.8 にパワー・スペクトルを図 4.9 にしめしてある。 $a = a_{ss}$ の時は、相関が殆どなく、パワー・スペクトルは白色になっている。

以上、例として一次元の場合を調べたが、クラスターを最隣接同志のスピンが同方向の時にのみ結合しているとした時の結合体と定義すれば、容易に 2 次元、3 次元に上の取扱を拡張することができる。これにより、イジング型スピン・グラスの乱雑性を $D(\beta, h)$ より解析できる。

4-4 ハミルトニアン集合

統計熱力学においては、ハミルトニアン H で表される系のマクロな性質は自由エネルギー $F = -\beta^{-1} \ln Z$ より求まる。ここで分配関数 Z は、 $Z = \text{tr } e^{-\beta H}$ である。この場合、調べようとする系は一意的に一つのハミルトニアンで規定できるとしている。ところで調べようとする系を一意的に規定できず、あるハミルトニアンの集合で規定できる場合を考えることにする。例えば、スピン・グラスの問題の場合、相互作用の一つの

分布の仕方に対して一つのハミルトニアンを考えると、分布の仕方はいろいろあるので、それぞれに対するハミルトニアンを考えると、一つのハミルトニアンの集合をうる。一つのハミルトニアンから一つの自由エネルギーが得られるので、集合全体からは自由エネルギーの集合が得られる、この集合における分布（揺らぎ）を揺動スペクトル理論を用いて解析する。

ハミルトニアンの集合 $\{H_k, k=1, 2, 3, \dots, n(>1)\}$ が与えられたとし、どのメンバーの粒子の数も $N(>>1)$ とする。k-番目のハミルトニアンはパラメーターのセット（例えば、相互作用を表す） J_k で特徴づけられるとする。メンバーが異なると、 J_k の数値のみ異なるとする。この J_k に関する分布が k に依存しない、すなわち、メンバーは互いに統計的に同等であると仮定する。

ハミルトニアンの集合全体から成る系 S_n のハミルトニアンを $H(n)$ とする、すなわち $H(n) = \sum_{k=1}^n H_k$ 。メンバー間には相互作用はないので、系 S_n の分配関数は、

$$Z(n; \beta) = \text{tr} \exp[-\beta H(n)] = \prod_{k=1}^n Z_k(\beta) \quad (4-42)$$

ここで $Z_k(\beta) = \text{tr} \exp(-\beta H_k)$ ($\ln Z_k = O(N)$)、はメンバー k の分配関数である。一つのメンバー当りの自由エネルギーは

$$N\alpha_{\beta, n} \equiv -\frac{1}{n} \beta^{-1} \ln Z(n; \beta) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{\beta^{-1} \ln Z_k(\beta)\} \quad (4-43)$$

ここで $-\beta^{-1} \ln Z_k(\beta)$ はメンバー k の自由エネルギーである。 $\alpha_{\beta, n}$ は系 S_n 全体にわたって平均した一粒子当りの自由エネルギーである。

ところで、 $Z_k(\beta)$ はオーダーが $\exp[O(N)]$ のランダム変数であるから、 $Z(n; \beta)$ と $\alpha_{\beta, n}$ はそれぞれオーダーが $\exp[O(N)]$ と N^0 のランダム変数である。更に、比 $Z(n+1; \beta)/Z(n; \beta)$ は統計的に n に依存しないから、 $Z(n; \beta)$ は自己相似となる。このことは、この問題に揺動スペクトル理論を適用できることを示唆している。

n が大きくなると $\alpha_{\beta, n}$ の揺らぎが小さくなり、 $n \rightarrow \infty$ のとき、それは $\alpha_{\beta, n}$ に近づく。

この統計的性質を調べるために、次の1つのメンバー当りの q -次自由エネルギーを導入する。

$$F_q(\beta) = \frac{N}{q\beta} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \langle [Z(n; \beta)]^{-q/N} \rangle \quad (4-44)$$

$$= \frac{N}{q\beta} \ln \langle [Z(\beta)]^{-q/N} \rangle \quad (4-45)$$

ここで $Z(\beta)$ は $\{Z_k(\beta)\}$ の中の一つであり、平均 $\langle \dots \rangle$ は分布 $P(J)$ を用いて行う。 $\langle [Z(\beta)]^{-q/N} \rangle$ のオーダーは $|q| \sim O(N^0)$ のとき N^0 である。一粒子当りの q -次自由エネルギーは

$$f_q(\beta) = (1/N) F_q(\beta), \quad (4-46)$$

これは熱力学的極限 $N \rightarrow \infty$ をとると、 q の確定した関数となる。 $N \rightarrow \infty$ のとき、メンバーによる平均 (4-44) と分布 $P(J)$ を用いる平均は一致するので、

$$\alpha_{\beta, \infty} = f_0(\beta) = - \frac{1}{N\beta} \ln \langle [Z(\beta)] \rangle. \quad (4-47)$$

$\rho_n(\alpha'; \beta)$ を $\alpha_{\beta, n}$ が α' である確率密度だとすると $[Z_k(\beta)]$ の各メンバーは互いに独立であるから、 n が大きいとき

$$\rho_n(\alpha'; \beta) \sim \exp[-\beta \sigma_\beta(\alpha') n]. \quad (4-48)$$

$f_q(\beta)$ が λ_q に対応しているので、揺動スペクトル理論より、

$$\alpha_\beta(q) = \frac{\partial}{\partial q} [q f_q(\beta)], \quad (4-49)$$

$$\sigma_\beta(\alpha_\beta) = q^2 \frac{\partial f_q(\beta)}{\partial q}. \quad (4-50)$$

特殊な場合として、揺らぎがない場合、すなわちどのメンバーも全く同一なときは (4-45) の自由エネルギーは従来の自由エネルギー $-\beta^{-1} \ln Z(\beta)$ に一致し、 q に依存しない。このとき $\sigma_\beta(\alpha)$ にはスペクトル構造はなく、揺らぎがある場合はそれがスペクトル構造で特徴づけられる。

q が $q=0$ と $q=-N$ の場合を調べてみる。

$$F_0(\beta) = -\beta^{-1} \ln Z(\beta), \quad (4-51)$$

$$F_{-N}(\beta) = -\beta^{-1} \ln \langle Z(\beta) \rangle. \quad (4-52)$$

この $F_0(\beta)$ は従来の自由エネルギーに一致している。ところが、 $N \rightarrow \infty$ のとき (4-52) の平均に寄与するのは $-\beta^{-1} \ln Z_k(\beta)$ の最小値を与えるメンバーのみである。なぜなら $Z = (e^{-\beta'})^N$ であるから、 $N \rightarrow \infty$ のとき $e^{-\beta'}$ が大きいメンバーが $\langle Z(\beta) \rangle$ の値を主要に決めてしまうからである。極限 $N \rightarrow \infty$ のとき、 $F_{-N}(\beta)$ は最小自由エネルギー $\lim_{N \rightarrow \infty} F_{-N}(\beta)$ で決まることになる。これに対して、 $\max_k [-\beta^{-1} \ln Z_k(\beta)]$ を与えるメンバーは熱力学的極限において

$$F_N(\beta) = \beta^{-1} \ln \langle [Z(\beta)]^{-1} \rangle \quad (4-53)$$

より引き抜かれる。すなわち、 $N \rightarrow \infty$ のとき $F_N(\beta)$ は最大自由エネルギー $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(\beta)$ で決まる。このように q はフィルタリング・パラメーターになっている。 n が大きいとき、1粒子当りの自由エネルギー α は $\alpha_\beta(q=-\infty) (= f_{-\infty}(\beta)) < \alpha < \alpha_\beta(q=\infty) (= f_\infty(\beta))$ の間で揺らいでおり、その確率は揺動スペクトル $\sigma(\alpha)$ によって推定される。

いま、 $f_q(\beta)$ 次のように展開できたとする。

$$f_q(\beta) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j(\beta) q^{j-1} \quad (4-54)$$

ここで

$$C_j(\beta) = \frac{\beta^{-1}}{j!} \langle -[\frac{1}{N} \ln Z(\beta)]^j \rangle_c, \quad (4-55)$$

上式の $C_j(\beta)$ のオーダーは $O(N^0)$ である。低次のキュミラントについては、 $C_1(\beta) = f_0(\beta)$ であり

$$C_2 = \frac{1}{2\beta N^2} \langle [\ln Z(\beta) - \langle \ln Z(\beta) \rangle]^2 \rangle. \quad (4-56)$$

展開(4-54)の収束半径を $\kappa(\beta)$ とすると、この展開は $|q| > \kappa(\beta)$ の場合、収束しない。領域 $|q| < \kappa$ および $|q| > \kappa$ における $f_q(\beta)$ と $\sigma_p(\alpha)$ の漸近型はいつもと同様に得られる。

スピングラスはハミルトニアン集合で表される良い例である。この場合、揺らぎはスピン相互作用の乱雑な分布になっている。スピングラスの理論では $F_{-N}(\beta)$ はアンニール自由エネルギー、 $F_0(\beta)$ はクエンチ自由エネルギーと呼ばれている。上で調べた様にこれらの量は揺らぎの全く異なる側面を捉えている。我々の観点から考えると $F_N(\beta)$ はアンチ・アンニール自由エネルギーと呼ぶべき量であり、これは $F_{-N}(\beta)$ と $F_0(\beta)$ とは一般に全く異なっている。

§ 5 認識論的諸問題

5-1 カオスの一般的位置づけ

最近の物理学では、物質の究極的存在様式についての理論が進歩し基本的力の統一的理解が可能になりつつある。さらには宇宙の発生と進化の問題にこの理論と一般相対性対性理論が適用され、かつては形而上学的問題であった宇宙の存在に関する自然科学的認識が深まりつつある。

このように物質のミクロな存在様式と、宇宙という考える最大の物質系の存在様式との間に存在する内在的関係があばかれつつあるということは驚くべき事であり、簡潔な物理学理論の持つ強力な認識力に驚嘆を禁じ得ない。以上、述べてきた物理学は、いわば伝統的物理学であり、自然の普遍的かつ基本的な姿の理解を助けるものである。

ところで我々の接する自然はまことに多様であり、その際たるものは生命体であろう。この様な豊かな構造と多様な運動形態をもつ系を理解するためには、それにふさわしい認識方法が必要である。最近になって、二つの新しい概念が見い出され、それによって「新しい自然観」が探求されている。二つの概念とは、本研究のテーマである「フラクタル構造」と「カオスの運動」である。

現実存在する対象の幾何学的形状を直線や円などで理想化するという従来の方法とは、全く逆のいたるところ微分不可能な集合で理想化することによって、フラクタル集合は生まれる。この概念が有用であることは、その応用が広範な分野に及んできていることから明らかであろう。まるい形をした一つの島を円として理想化する事と、Koch島として理想化する事は、互いに相補的であり、この二つの理想化は必然性があると思われる。

さて、カオスの運動であるが、この運動の存在は従来の単純な力学的世界観、すなわち初期条件が与えられれば未来は一意的に決定できるという考えの破綻を意味している。カオスの運動においては初期における僅かな違いが指数関数的に増大する。初期条件を与える観測には必ず誤差があるので系の未来の長期にわたる予測は不可能となる。

一般に「不可能性」は学問の発展のシッコクになると感じられるが、実は「不可能性」の研究こそ、豊かな新しい学問の出発点になることは、高次代数方程式の解法、熱力学第2法則（カルノー・サイクル）やゲーデルの不完全性定理の例からも期待されることである。

太陽系を例にして規則的運動とカオスの運動を考えてみることにする。古代より星の運行は人間の想像力を刺激してきたが、とくに恒星の規則的運動は、古代人に自然を律する単純な法則の存在を示唆したと思われる。見かけ上は複雑な惑星の運動も太陽中心説によると規則的な運動に還元することができる。ケプラーはこれを三つの法則にまとめたが、これを決定論的法則より演エキ的に導くことにニュートンが成功して以来、太陽系は予測可能な力学系の典型例となってきた。ところで決定論はカオスの運動おも生

み出すのであるから、太陽系の持つ規則的側面のみでなくカオスの側面にも興味を持たれた。F. Franklinは土星の環の間隙の説明にKAM定理を用い、J. Wisdomは小惑星帯中の間隙を間欠カオスと関連づけた。最近では土星のいびつな衛星Hyperionのカオスの自転が問題にされている。我々は、太陽から諸惑星までの平均距離についてのボーデの経験則をKAM定理を用いて調べた。古くはカントとラプラスは渦運動（カオスの運動）をする星雲状ガスより太陽系が生成されるという説を提案している。

このように太陽系は予測可能系の典型例であるとともに、カオス理論をその構造と生成の解明に適用できる典型例でもある。ここで一つ注意しておきたいことは、惑星も厳密に言えばカオスの運動をしていることである。運動のどのような側面をどの程度の厳密さで知りたいかによって、取り扱い方が異なってくる。ケプラーが問題としている範囲内であれば、惑星は規則的運動をしているとしてよい。ケプラーの法則は2体近似という理想化をしてはじめて導くことができる。この場合も、現実存在する対象を理想化あるいは近似を行わないと法則が見えてこない。古典力学は相対論および量子論によって革命をうけたが、カオスの発見により新しい豊饒な世界が開けた。これはカオスによる革命と言えるだろう。

カオスは古典力学系のみならず、非常に広い分野における現象において観測され、その複雑な運動は、単純な力学系モデルを用いて研究されている。カオス発生のシナリオおよびカオスの中味の研究は大きく進展した。

運動におけるカオスは構造におけるフラクタルとともに現代人が手にした強力な概念装置であり、その威力はコンピューターを合わせ用いることによって飛躍的に増大する。この力はこれまでの人間の純粋な知的営為では到達できなかった世界に我々を導いてくれる。

自然の諸機構のカオス理論による解明、および工学へのカオスの積極的利用はこれからの重要な課題である。

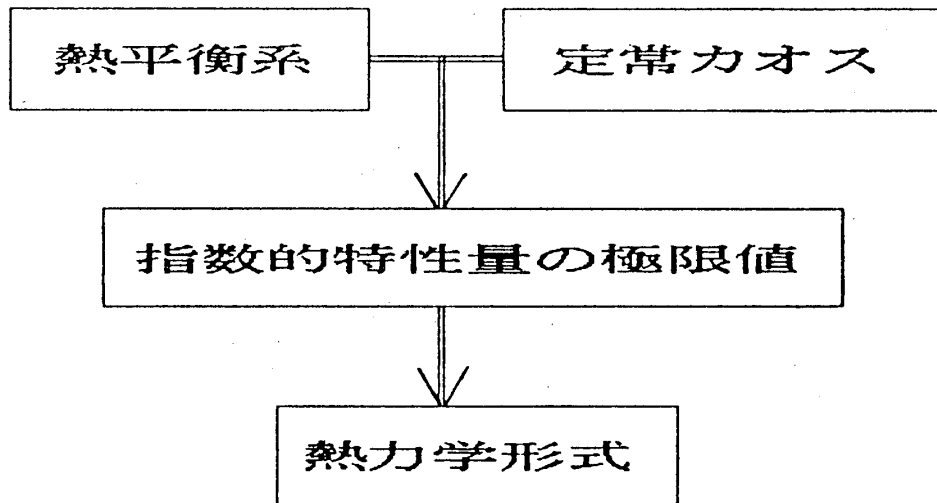
5-2 カオスの統計物理学的考察

統計力学の対象は熱平衡系と非平衡系に分類することができる。カオスは非線形非平衡現象の典型例として位置づけられてきた。カオスの見方として、カオスを非線形非平衡現象の単なる例ではなく、カオス自体を問題とする捉え方、すなわちカオスを主体とした見方もありうる。この見方によるとカオスを定常カオスと非定常カオス（過渡）に分類できる。これによれば、定常カオスは熱平衡系に、非定常カオスは非平衡系に対応させることができる。カオス研究の課題には「カオス発生のシナリオ」という独自のものがあるが、これは平衡系の相転移の問題に類似している。もちろん定常カオスの中にも転移現象があり、カオスにおける転移は平衡系の相転移よりも遥かに多様であり豊かな物理を秘めている。

非平衡現象の中に平衡系の物理と非平衡系の物理が見いだされるという、入れ子構造

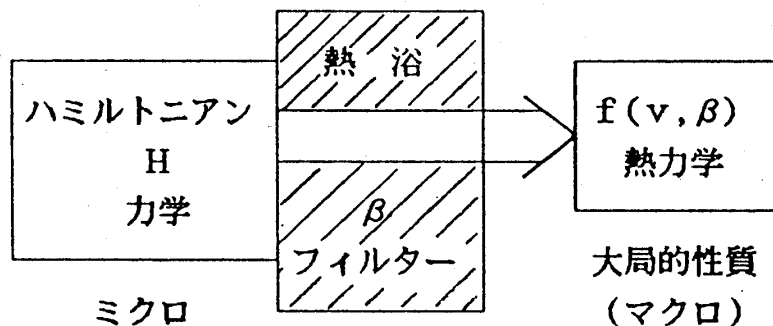
になっていることは興味深い。

定常カオス理論と統計熱力学のパラレリズムは、それらの基本的立脚点の共通性によって成立していることは § 2-2 においてすでに述べた。熱平衡系においても定常カオスにおいても、指数的特性量の極限值を考えると熱力学形式がえられる。これは下図のように表せる。



少数自由度系でもカオス状態では、非線形項によって無限個のモードが励起されている。モードの個数からみるとこの系は無限多体系と同様な性格をもっている。このことが熱力学形式を意味のあるものにしている。

§ 2-2 において β と q はフィルタリング・パラメーターとしての意味をもっていることを述べた。熱平衡系の場合、これは下図のように表せるだろう。

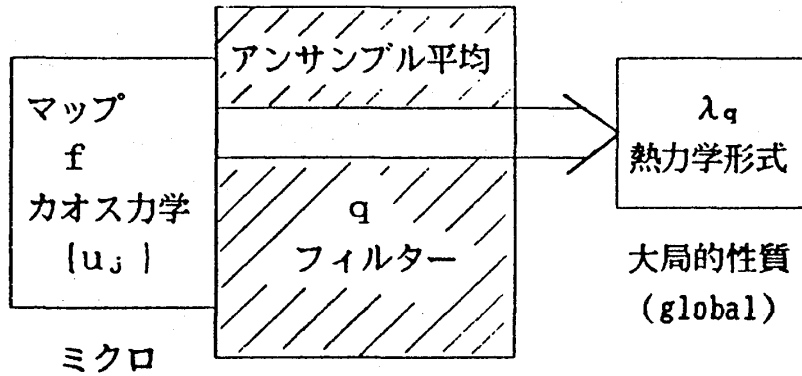


$\beta = \infty$ ($T=0$) : 基底状態のみ寄与 (通す)

$\beta = 0$ ($T=\infty$) : 全てのエネルギー状態が平等に寄与

$\beta = -\infty$ ($T=-0$) : 最高エネルギー状態のみ寄与

これに対して、定常カオスの場合は次図のように表せるだろう。



アンサンブルの例 (メンバー数はN個)

$$\begin{aligned}
 1) & \quad u_0^1 + u_1^1 + u_2^1 + \dots + u_j^1 = n_j^1 \\
 2) & \quad u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_j^2 = n_j^2 \\
 & \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\
 & \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\
 & \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\
 N) & \quad u_0^N + u_1^N + u_2^N + \dots + u_j^N = n_j^N
 \end{aligned}$$

$n_j^1 < n_j^2 < \dots < n_j^N$ の場合

$q = \infty$: 最大値 n_j^N をもつメンバーのみ寄与 : $\lambda_\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} n_j^N / j$

$q = 0$: 全てのメンバーが平等に寄与 : $\lambda_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle n_j \rangle / j = \langle u_j \rangle$

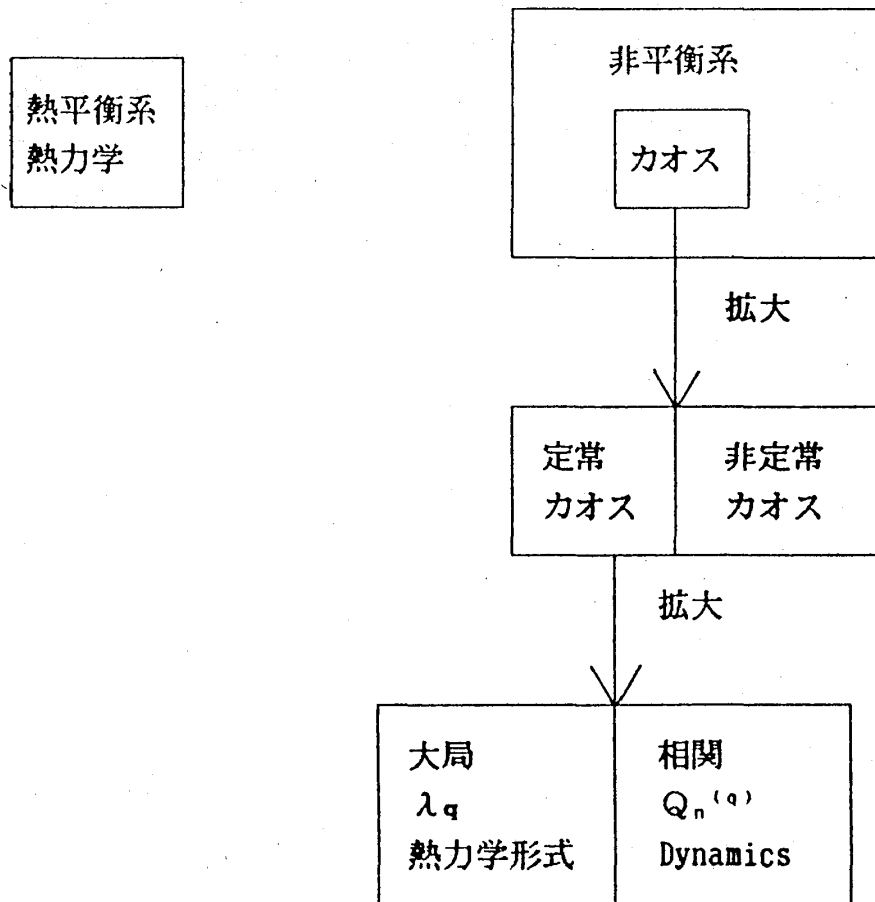
$q = -\infty$: 最小値 n_j^1 を持つメンバーのみ寄与 : $\lambda_{-\infty} = \lim_{j \rightarrow \infty} n_j^1 / j$

統計熱力学は単なる多体系力学とは異なっている。すなわち、力学においてはハミルトン運動方程式を解いて解を得るが、統計熱力学においては長時間平均値の量のみが必要であるからハミルトニアン運動方程式を解く必要はなくハミルトニアン H の構造 (エネルギー固有値) のみから自由エネルギー $f(v, \beta)$ は求まる。

カオスの場合は § 3-1 で示したように、マップ f からえられる演算子 H_q の最大固有値から λ_q は求まる。しかし f から時系列 $\{u_j\}$ をコンピューター等で求めて (これが運動方程式を解くことに対応) これから λ_q を求めることも容易である。これは統計熱力学における molecular dynamics study に対応している。そこでは、熱力学系を多体力学系で近似し、その熱力学量を求めるのに、わざわざ運動方程式を解いている。これができるのは高速コンピューターがあるからである。

非平衡系を取り扱うのに相関関数の方法がある。カオスでこれに対応するのが我々の $Q_n^{(q)}$ を用いる一般相関関数の方法といえるだろう。定常カオスといえども λ_q 等で特徴づけられる大局的性質と $Q_n^{(q)}$ でとらえられる相関が存在する。すなわち定常カオスは統

計熱力学的側面と非平衡統計力学的側面を合わせ持っている。ここでも、入れ子構造を見いだすことができる。これは下図のように表せる。



統計力学にとって揺らぎは平均値とともに重要であり、統計熱力学には揺動定理 $C_v = (\partial E / \partial T)_v = \{ \overline{E_d^2} - (\overline{E_d})^2 \} / k T^2$ がある。我々のカオス理論でこれに対応するものが(2-5)式で与えられている。そこでは拡散係数が時系列の揺らぎで表現されている。統計力学における揺動散逸定理および熱力学におけるカルノー・サイクルに対応するものをカオスの中から見いだすのは興味ある問題である。カルノー・サイクルは熱力学第2法則と深く結び付いており、熱機関の効率の限界を与える。これは深い示唆を与えているものと思える。すなわち、カオス系の予測可能性の限界は系の最大リャプノフ指数で決まると予想される。このとき「予測」という概念の有効な拡張が重要な結果をもたらすであろう。

ミクロとマクロという観点からカオスをみると、ミクロカオスは統計熱力学の成立条件であるエルゴート性をささえているし、マクロカオスは乱流などのモデルになっている。ところで、相転移をもたらす最も簡単な統計熱力学モデルとして二次元イジングモデルがある。この様な簡単な系において自由エネルギーの厳密解を求めるのは数学的に極めて難しい。ところがカオス理論の場合はカオス転移をもたらす系の厳密解は§2で示してあるように簡単に求めることが出来る。転移という現象の本質を調べる系として

はイジングモデルはまだ余分なものを持っていたといえる。

さいごに、統計熱力学と揺動スペクトル理論の基礎づけについて考えてみる。統計熱力学はKhinchinによって中央極限定理によって数学的に基礎づけられた。一般に、新しい物理学には新しい数学がともなう場合が多い。最近、確率論において、large deviations theoryが発展されている。揺動スペクトル理論はこの理論によって数学的に基礎づけられるだろう。なお、保存系カオス、量子系カオス、多自由度系カオスおよび時空カオスにはそれぞれ特有な問題があるがここでは触れなかった。ただしカオスの本質の多くは我々が問題にしている少数自由度系カオスに内在している。

5-3 カオスにおける相補性

一つのカオス時系列 $\{u_j\}$ は一般に拡散的側面と間欠的側面を合わせ持っていることについてはすでに § 2 において述べた。純ガウス過程と純間欠過程が両極端の例であり、この場合はそれぞれ拡散的側面と間欠的側面しか持っていない。一つの対象を認識するとき、その認識の仕方で表れる側面がことなる。これを統計熱力学の例で説明すると、 β は q に対応しているのであるから、 $\beta = 0$ 近傍すなわち高温において対象を観測すればその対象の拡散的側面が表れる。また、 $\beta = \infty$ 近傍すなわち絶対零度近くに冷やして対象を観測して得られる性質が間欠的側面を表している。このように、特定の温度のみではなく、あらゆる温度において対象を調べることにより、我々は対象のトータルな認識を得ることができる。時系列においても、あらゆる q の値について λ_q を調べることにより、その大局的(global)性質の全貌を知ることができる。

量子論においては、電子などは粒子的側面と波動的側面を持っており、観測の仕方によってどちらかの側面が表に現れてくる。この波動性と粒子性は相補的であるとして理解されている。このときのパラメーターはド・ブROI波長 $\lambda = h/p$ であり、観測のスケール ℓ が、 $(1/\ell) \gg (1/\lambda)$ のときは波動性が現れ、 $(1/\ell) \ll (1/\lambda)$ のときは粒子性が現れる。時系列の場合、 λ に対応するのが (2-2) 式の下で与えられている λ_q の収束半径 κ である。すなわち、 $|q| \ll \kappa$ のときは拡散性が、 $|q| \gg \kappa$ のときは間欠性が λ_q によって表現されている。このように一つの時系列の中にも拡散的側面と間欠的側面をもっておりそれは互いに相補的關係にあるということが出来る。従来は拡散的側面しか取り扱われていなかったのも、この領域は古典的領域と名づけてもよい。間欠的側面は我々によって初めて明確に認識された側面であり、とくに § 2-5 に述べたような純間欠カオスの場合はこれによってのみ特徴づけられる。

5-4 自然認識における抽象化とリアリティー

カオス理論は伝統的物理学に較べて抽象的であるから、自然科学としてのカオス理論を発展させていく場合、抽象化の意味と役割を考察しておく必要がある。この問題を考

えるとき、最も良い例となるのが E.N Lorenzの記念碑的論文「Deterministic Nonperiodic Flow」である。これを例にして考察を進めることにする。

研究の対象は地球の大気である。すなわち研究対象の素朴存在として大気がある。研究の目的は気象の長期予報の可能性を明らかにすることにある。素朴存在としての大気そのものを我々は科学的（数学的）に取り扱うことはできない。そこで対象をモデル化しなければいけない。物理学者が行うモデル化のガイド・プリシプルは、注目した性質を損なわない数学的取扱が最も簡単な系を作ることである。これによれば太陽光線にて昇温した大地によって暖められている大気は、上面と下面がそれぞれ一様な温度を持つ強制散逸力学系によってモデル化される。この様にモデル化された系は常微分方程式によってその運動が記述される。このモデル化は惑星のケプラー運動を問題にするときは惑星と太陽を質点にモデル化することに対応しており、伝統的物理学においてよく用いられる抽象化である。この様な抽象化を「古典的抽象化」と呼ぶことにする。Lorenzの場合、この様に抽象化したモデルにおいてもそれは連続体を表しているので変数は連続無限個あり、極めて複雑である。目的は予報の可能性の可・否にあるから、Lorenzは自由表面の条件下で、フーリエ級数解を仮定し、さらに熱対流発生に重要な3つのフーリエ成分のみを取り、その振幅に関してモード・結合方程式をつくった。ここまできると、この新しいモデルは3元連立非線形微分方程式で表せる。この抽象化によって変数が連続無限個から3個に減じた。これによって数学的取扱が極めて容易になり、その運動は当時（1962年）のコンピューターによって計算することができた。この計算から当初の目的であった気象の長期予報の可能性を明らかにすることができた。結果は長期予報の実際的な実行可能性はないということである。

カオス研究の歴史からみて重要なことは、この研究によって、少数自由度の決定論系でもある条件さえみれば非周期的運動が生じ、この場合は、散逸系になっているので、その運動における軌道はストレンジ・アトラクターに吸いこまれ、その上の運動は不安定であり、初期の誤差が指数関数的に増大することなどが見いだされたことである。

Lorenzはさらなる抽象化を行った。この抽象化こそ「現代的抽象化」といえるだろう。それは1つの変数の時間変化のみを取り出し、それは振動しているのであるが、その振動のピークにのみ注目し時刻 $t = t_n$ でのピークの値を z_n としたとき、 x 軸に z_n を y 軸に z_{n+1} をとるというLorenzプロットを作り、それが1つの曲線を構成することを発見した。この抽象化により、連続時間が離散時間になり変数は1個になり、運動が1次元写像（マップ）によって表されることになった。そしてこの1次元写像によって、長期予報の不可能性が本質的に極めて明セキに理解できる。

惑星のケプラー運動程度の問題であれば古典的抽象化によるモデルで十分に、我々は本質を理解することができる。しかし運動が極めて複雑なカオスの場合は、古典的抽象化の上に更に現代的抽象化をほどこすことによって初めてその本質を明セキな姿で捉えることができるのである。古典的抽象化のみに慣れ親しんできた物理学者にとっては、このような現代的抽象化は、余りにも抽象的に感じ、そのリアリティーの欠如すなわち

素朴存在対象と抽象的モデルの隔たりに不安を覚える。しかし人間の知性でカオスを明セキに理解するためには、現代的抽象化は必要である。これは絵画の場合と似た事情がある。画家が絵をかくとき、まず写実的に書くことが考えられる。このばあいも、物理学者が実験を行うとき、純粋なある結晶を選ぶように、画家もまず描く対象を選択し、それを表現するときに、写真とは異なり抽象がなされる。この場合の抽象が「古典的抽象」に対応している。絵画の場合、いわゆる抽象画がある、これは写実的に表現された山水や人物に共通するある美的パターンを抽象して描いているともいえるだろう。この時の抽象が「現代的抽象」に対応している。抽象画は具体的に何を描いているのか分かり難いので、初めてそれを見る人に不安を与える。しかし、そこには写実を越えたある美的本質が描き出されていると思われる。

物理学者は力学と言え、連続時間で表現されるハミルトン力学系のみを取り扱ってきた。数学者は、ハミルトン力学系を抽象化した力学系という概念をつくり、これを研究してきた。カオス理論が対象とする系はこの力学系である。この力学系の立場にたつと、虫の個体数、化学反応、電気回路、経済モデル、……などの時間変化が研究の対象となる。現代的抽象化の例として、Lorenzプロットを説明したが、それよりも以前にPoincaréはPoincaré mapをつくっていた。これも現代的抽象化といえるだろう。そのほか、強制散逸系では、ストロボ表示によっても一次元写像が得られることがある。

Lorenzはさらに、Lorenzプロットから得られた一次元写像を二つの直線からなるテント写像に理想化した。古典的抽象化によって得られるハミルトニアンによって物理学的対象の性質が調べられるように、現代的抽象化によって得られる写像によって力学系の運動は調べられる。一次元写像にまで抽象化すれば、化学反応系、生態系、経済系などを同一の土俵で取り扱うことができる。

写像の変数を§2で行ったように(例：(2-46)、(2-47)、その他)粗視化(coarse grain)、記号化(encode)、意味づけ(semanticize)などを行うと2値記号力学系が得られる。これが究極の抽象化である。2値記号力学系よりも単純な意味のある力学系は存在しない。またモールス信号の例からもわかるように、あらゆる情報(連続無限個の情報を必要とするパターン情報は除く)は2値記号力学系によって表現される。それゆえに、2値記号力学系の研究はとりわけ重要である。

最後に、抽象化の長所と短所をまとめておく。

長所：普遍性、一般性の獲得。本質が浮きでる。

短所：リアリティーの欠落。個別性、特異性が落ちる。

科学者が物事を議論する場合、抽象化によって得られるモデルを用いる。これによる結果が一般生活者の常識に一致しない場合がある。このとき、科学の客観的真理性に信をおきがちであるが、モデルをつくる時に無視されたことが結果に重要な影響を及ぼすことがあるので十分な注意が必要である。

先に述べたように力学系の範チュウは広くて、物理学でいう力学すなわちハミルトン力学系は力学系の中の一つの例として含まれている。数学の立場からみるとハミルトン力学系は単なる力学系の一つの例にすぎないということである。力学系にはその力学状態を発展させる法則がある。この法則が力学系を特徴づけている。その法則が自然法則である場合は、その力学系は自然科学にとって格別の重要性を持つ。ハミルトン力学系はその法則として自然の基本的法則、すなわち力学の第一法則（慣性の法則）、第二法則（ $\vec{F} = m\vec{a}$ ）および第三法則（作用・反作用の法則）を採用している。このことから、物理学にとってハミルトニアン力学系は力学系のなかでも最も基本的であり最も重要である。すなわち、ハミルトニアン力学系は「自然法則としての力学」といえることができる。

法則としては、基本的自然法則、現象論的自然法則、経済学的法則その他、人工的な法則などがある。現象法則は基本法則から導かれるものであり、これにより法則のヒエラルキーが構成される。一般に、力学系の運動の解析より、その系の新しい法則が発見される場合がある。この新しい法則からみれば、力学系の法則は基本法則と見なせる（法則の多重構造）。熱力学の法則は力学系の法則ではないが、これは熱力学の範囲内であればそれは基本的法則である。ところが統計熱力学の立場からは、その第2法則は導かれるべき現象法則になっている。ところで理想気体の状態方程式即ちボイル・シャルルの法則 $PV = NkT$ は熱力学から導くことができない。このときの熱力学の役割はボイル・シャルルの法則を表現する概念体系（記述言語体系）の提供である。熱力学は法則を公理とした公理体系の見本として良く例にあげられるが、公理から演エキ的に導かれる命題のみによる体系としての熱力学はあまり豊かでない。熱力学は熱現象を表現する言語として有用であり、この言語の基本的文法が熱力学法則にたとえられる。ボイル・シャルルの法則は熱力学の言語で表現されているが、熱力学の法則からは導けないことを述べた。ところで理想気体に統計熱力学を適用するとボイル・シャルルの法則を得る。この意味でボイル・シャルルの法則は現象法則である。現象的自然法則としてはその他に、ケプラーの法則やフックの法則などがある。このうち、ケプラーの法則は力学法則と万有引力の法則より導かれることは良く知られている。

ニュートン力学（ハミルトン力学系）はその偉大な成功によりその体系は諸学の範例となった。ニュートン力学はその学問方法としてみた場合、それは問題としている対象を我々がいかにして認識していくかの方法を我々に教えている。近代経済学は古典力学を模倣して形成されたといわれる。この近代経済学では力学系モデルを用いて経済現象が認識される。この力学系モデルの法則は自然法則ではないから、この力学系は「認識方法としての力学系」といえることができるだろう。

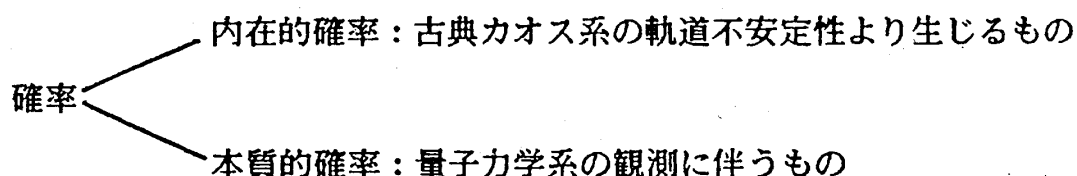
この節では、力学系のうちハミルトン力学系（古典力学）がとりわけ重要であることを述べた。そこで用いられる法則はいわば神が与えた法則（基本的自然法則）である。

これと対極にあるのがゲーム力学系である、これに用いられている法則は人間がシ意的につくったものである。

力学の役割をまとめてみると、(1)形式的構造の見本、(2)記述言語(概念体系)の提供である。また時間発展する系としての力学系は、その力学状態の未来予測が現実と一致した場合、我々に感銘を与える。カオスは新しい現象であるから、カオス力学系の役割を考えるのは新しい問題である。

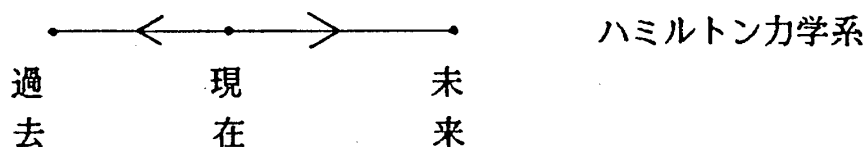
5-6 統計性と不可逆性および偶然性と必然性

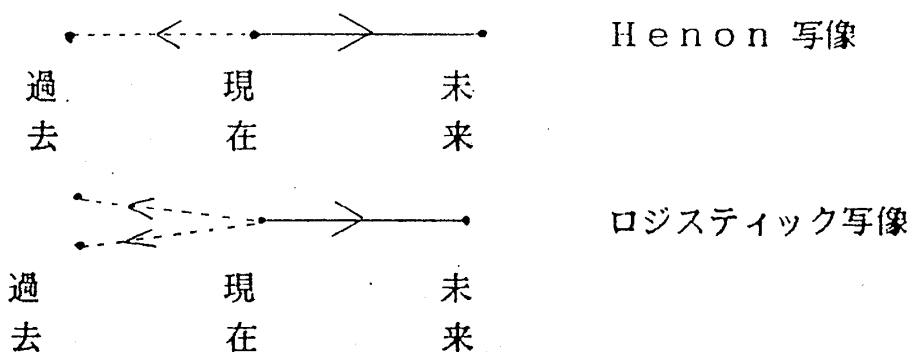
ここではカオス力学系を中心にしてごく簡単な考察をすることにする。まず確率の由来を考える。古典力学と量子力学は自然における運動を表現する基本的な力学であり、その力学法則は決定論的法則である。すなわちこれらの力学系は確定系である。これらの力学からどのようにして確率が生じてくるかは次図のように表せる。



上図の上の例は確率論は決定論に内在していることを示している。賭博用具(ルーレット、パチンコ...)はこの確率を用いている。下の例は量子力学の二重構造すなわち、状態は決定論に従って変化し、それを観測するとき確率が入ってくることを示している。乱数を発生させる装置として放射性物質の自然崩壊を用いるものがあるが、この場合の乱雑性はこの本質的確率によっている。

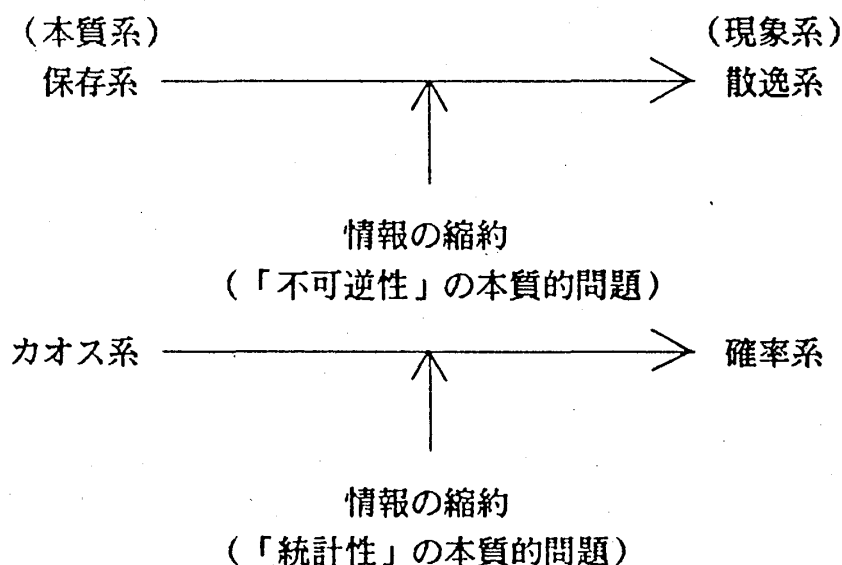
次に可逆性の問題を考える。ハミルトン力学系は保存系であり「time reversible」である。ここでいうtime reversibleとは運動を撮影した映画を逆回転させて観た運動も全く同一の力学法則に従っているということである。この系では、現在の状態がわかると原理的に未来および過去の状態が同一の法則を用いて確定できる。ところでカオス理論で用いられるHenon写像は「invertible」であるがtime reversibleではない。ここでいうinvertibleとは過去の状態が現在の状態から確定されるということである。Henon写像の場合は、現在の状態から過去の状態も未来の状態も確定されるが、そのときの法則が過去の方と未来の方とで異なっている。また一次元写像として良く例にあげられるロジスティック写像やベルヌーイ変換((2-27)式)は現在の状態より未来は一意的に確定されるが、過去の状態は二つ考えられ、一つに確定することができない。これらは下図のようにまとめられる。





ハミルトン力学系は保存系であるが、Henon写像とロジスティック写像は散逸系であり、位相空間の領域が時間の発展につれて縮んでいく。散逸系の力学法則は基本的自然法則ではない。基本的な自然法則を持つ保存力学系の情報を適当に縮約することにより散逸系が得られる。この意味では散逸系よりも保存系の方がより基本的であるが、散逸系から出発した方が、実りが多い場合が多い。すなわち力学一元論だけでは多様な自然を適切に理解していくことができない。なお、time reversibleでありながら散逸的挙動を示す系としてNose系がある。この系を用いて不可逆性に関するロシュミットのパラドックスを解明する説が提起されているが、これによって本当にパラドックスが解けたかどうかはこれからの問題だと思う。

本質的な系から現象的な系を導くとき、情報の縮約が重要である。これにより不可逆性と統計性が生じてくる。これは下図のように表せる。



おわりに、散逸系における必然性と偶然性について簡単なコメントを付け加える。散逸系は一般に複数のbasinを持っている。このmulti-basinの構造は力学法則より「必然的」に決定されている。ところでどのbasinに落ちこむかは初期条件のとりかたからくる「偶然性」によっている。ここに法則からくる必然性と初期条件の任意性からくる偶然性がある。また法則（運動方程式）のコントロール・パラメータの値を変えるとmulti-basinの構造は多様に変化する。これは進化や発生の問題を考えるとき参考になるかも

知れない。

5-7 意味づけの多様性と価値付与によるその選択

我々は§2-4において、与えられた一つの時系列を二つの立場から解析した。そのうちの一つでは、変数の対称性のみに注目し、他方ではバーストにのみ注目してそれぞれ元の時系列よりも簡単な時系列に縮約した。この新しい時系列を用いて元の時系列のそれぞれの側面を調べることができた。このことは従来の統計熱力学にはない新しい観点を含んでいる。統計熱力学では与えられた一つのハミルトニアンから、その系の熱力学量が一意的に導かれる。ひとたびハミルトニアンが与えられてしまえば結論は一意的であり、熱力学量を導出する過程において意味づけによる多様性は生じてこない。この意味で統計熱力学は極めて簡単な構造をしている。ところが先の例では一つの写像から異なった二つの結果が得られる。これは写像から発生される時系列に二つの意味づけがなされ、それぞれについて結果が得られたことによる。他の例として、刺激の時間変化が考えられる。このときイキ値以下の刺激の詳細な時間変化は刺激を受けるものにとって必要のない情報である。この立場からはこのような時間変化の情報は縮約すべきである。またボイラーの安全弁にとって問題なのは時々刻々と変化する圧力の詳細な情報ではなく、ある時刻の圧力が設定されている圧力よりも大きいかなどだけである。このように与えられた時系列を粗視化したり、意味づけしたり、記号化したりする必要がある場合がある。このように意味づけ（粗視化、記号化）した時系列を解析して、初めて意味のある結果を導くことができる。

ところで§2-4の例からもわかるように、この意味づけが一意的でない場合がある。時系列を見る観点が複数ある場合は、複数個の新しい時系列が得られる。このとき、ある主体からみて、これらの意味づけのそれぞれに価値を付与し、価値の高い意味づけを採用するという、価値付与による選択が行われる場合が考えられる。生物系や工学系ではこのような例が多いと思う。例えば遺伝を担っているDNAには核酸が配列（時系列に対応）されており、地球の生物では配列についてのある意味づけ（暗号化）が採用されている。多くある暗号化のうち、あるものが選択されている。この選択が全くの偶然であるかも知れないが、選択されたものが有用（価値がある）である可能性があるだろう。工学においては、価値付与による選択がつねに行われているのであろう。

従来の物理学の体系には価値という概念はなく、それがもつ一意性が簡潔さと強大さを演出していた。

ところがカオス理論のように取り扱う対象が広がってくると、意味づけ、価値、選択という従来の物理学において用いられなかった概念が必要になってくる。これは新しい物理学にとって、その新しさの根源になっており、その重要性は強調しておいてもよいだろう。物理学に、意味づけ、価値、選択を明確に意識的に導入し計算を実行したのは我々が初めてであると思う。

5-8 認識様式のプロト・タイプとしての時系列型認識とパターン型認識

人間は外界を五感によって感じ認識している。五感には視聴嗅味触があり、この五感のあり方が認識の始原的形態を決めているので、これが高度な認識様式にも深い影響を与えているであろう。このうち触味臭は動物的な感覚であり、これは人に動物的な快あるいは不快を与え、それ故に生命体としての人間に真に満足のいく喜びをもたらしたり、ある場合は苦痛を与えたりしている。ここでは高度な感覚である聴覚と視覚について考える。

聴覚による認識は音の時系列を解析することからなっている。この意味で聴覚による認識は直接的には「時系列型認識」であるといえよう。他方、視覚による認識は直接的には「パターン型認識である」。人間の高度な認識様式のプロト・タイプとして「時系列型認識」と「パターン型認識」があり、それは聴覚と視覚にそれぞれが基づいているというわけである。人間の真の認識はこの二つのプロト・タイプおよび触味臭からくるものによる総体を高次の段階で統一したものであろう。例えばフッサールの「キネステーズ」はこのような高次総体的認識の一例であると思われる。ここでは高次総体的認識はひとまずおき、プロト・タイプとしての「時系列型認識」と「パターン型認識」についてごく簡単に考察することにする。

多くの人間の経験から生まれ、古くから人々に言いならわされた言葉である諺や格言にはいろいろな真理が隠されている。このうち、二つのプロト・タイプを考えるとときに深い示唆を与える言葉を探してみると、不思議と思えるほどぴったりの言葉を発見することができる。それをタイプ別に書くと下のようになる。

聴覚（時系列型認識）： 耳学問

視覚（パターン型認識）： 見る事は信じる事

これを逆にしてみるとその本質が益々よくわかってくる。すなわち、見るだけでは学問にならず、聴くだけでは信じる事ができない。視覚によるパターン型認識は直観的理解であり、それによる直接的納得感が信をもたらす。他方、伝えるべき情報の言語表現という時系列化を通して理解することが学問である。テレビ（パターン）が伝える情報量は莫大でありそれはラジオ（時系列）の比ではない。昔、テレビの持つ莫大な情報量のみで目をうばわれ、テレビによる子供の教育の楽観的な有効性を解く教育評論家が出たが、大宅壮一氏のテレビによる一億総白痴化の方が正しかったことはテレビの歴史の教えるところである。テレビによる教育は現代でも行われているが、学問からみると、それは学問が学問としてあるところの最も本質的でないところでテレビが本質的な役割をはたしているといえよう。学問の本質は、情報の言語表現による時系列化にある。学問の内容は本として出されるが、本は文字の列すなわち、記号力学系よりなっている。人間の真の認識は先にも述べたように高次総体的認識であるから、上に述べたことは物事を単純化、理想化したものである。このような単純な立場から思いつくままに種々の

ものを二つのタイプに分けると、下のようなものが得られた。

時系列型	パターン型
運動	構造
弁証法	構造主義
分析	直感
音楽	絵
ダーウィン	リンネ
カオス	フラクタル

実はパターン型認識は時系列型認識を生みだし、サポートしている場合が多い。数学における図や記号のパターンの配列は、これなくして人間はその内容を理解しえないだろう。ただ面白いことに、解析幾何のように、数学からの図の追放という流れもある。単なる直観的（パターン型）理解は危険であるということだろう。

我々は§4-3においてイジング・スピン型パターンを解析した。この場合はパターンといっても、スピンによる熱力学系のように統計的に均一なパターンである。このような場合はパターンといえども物理的に取り扱う事ができる。均一ではなく、その特異な不均一性に意味がある場合は物理的に取り扱えない。パターンの物理学としてはまず分類学がある。これは結晶学において見事に成功しており、最近ではペンローズ図形が発見された。しかし分類学は学問のレベルからいえば低いものである。パターンのパターンたる本質はその時系列化ができないところにある。学問が情報の時系列化にあるのであるから、パターンの物理学がいかに困難であるかが分かる。パターンのパターンたる本質である特異的意味性は物理学の手の届かない遥かかなたにあるといってもよいだろう。またテレビなどで用いられるパターンの走査線による時系列化は単純な問題である。注目すべきことは簡単な写像からきわめて複雑なジュリア集合やフラクタル集合が得られることである。逆に、与えられたジュリア集合（フラクタル集合）からそれを生成した写像を導出できたとすれば、この場合は、パターン（ジュリア集合、フラクタル集合）の本質が抜き出されたことになり、パターンの学問的解析が成功したといえるだろう。我々は与えられたハミルトニアンからそれが示す巨視的性質すなわち熱力学的性質を導く方法を持っている。この方法とはとりもおさず統計熱力学である。ところで与えられたDNAの核酸配列（記号力学系）の情報（ハミルトニアンに対応）からそのDNAを持つ生物の構造、性質（熱力学的性質に対応）を導く方法を我々はまだ持っていない。もしこの方法が完成すれば、DNAの核酸配列の情報およびその他の副次的情報から、ある境界条件（環境）のもとでどのような生物が生成されるかがわかるだろう。これは個体発生の問題の究極的理解に導くものである。しかしこの理論を完成させるのは当然の事として極めて困難であろう。ただ出来あがった生物個体の構造の情報をテレビの走査線のような情報としてDNAの中に貯えられてはいないであろう。もっと要領よく、例

えばジュリア集合の情報はそれを生成させる写像の情報として表現できるが、この様なやり方で情報がDNAの中に貯えられている可能性がある。このとき境界条件（環境）の役割は非常に重要であると思われる。