

非線型振動の摂動論

堀 源一郎 東大・理 天文学教室

1. 正準変換を利用した一般摂動論¹⁾ は非正準系にも適用できるように一般化されたが、²⁾ それをさらに改良した摂動論に基づいて Duffing の問題を論ずる. Duffing の微分方程式

$$\ddot{x} + x + \alpha x^3 + \gamma \dot{x} = \beta \cos \omega t, \quad (\omega \neq 1) \quad (1)$$

は, $x, \dot{x}, t$ をそれぞれ z_1, z_2, z_3 で表わすと

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_j &= Z_j^{(0)}(z) + Z_j^{(1)}(z), \quad (j=1, 2) \\ \dot{z}_3 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに

$$Z_1^{(0)}(z) = z_2, \quad Z_2^{(0)}(z) = -z_1, \quad Z_1^{(1)}(z) = 0, \quad Z_2^{(1)}(z) = -\alpha z_1^3 - \gamma z_2 + \beta \cos \omega z_3, \quad (3)$$

と書かれる. α, β, γ は 1 次の微小量である. $\omega \approx 1$ のレゾナンスは後に論じ, まず $\omega \neq 1$ とする.

2. 変換 $z_1, z_2, z_3 \rightarrow \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ と

$$\left. \begin{aligned} z_j &= \zeta_j + T_j^{(1)}(\zeta) + T_j^{(2)}(\zeta) + \dots, \quad (j=1, 2) \\ z_3 &= \zeta_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

とし, 新変数 ζ によって (2) が

$$\left. \begin{aligned} \dot{\zeta}_j &= Z_j^{*(0)}(\zeta) + Z_j^{*(1)}(\zeta) + Z_j^{*(2)}(\zeta) + \dots, \quad (j=1, 2) \\ \dot{\zeta}_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

と書き換えられたとしよう。 $T_j^{(1)}$, $T_j^{(2)}$, ... を適当に選んで (5) を解ける形にもってゆく。以後諸関数の引数は τ なので明記しない。

3. 0 次の $Z_1^{*(0)}$, $Z_2^{*(0)}$ は次によって決められる:

$$Z_1^{*(0)} = Z_1^{(0)} = \zeta_2, \quad Z_2^{*(0)} = Z_2^{(0)} = -\zeta_1. \quad (6)$$

4. 1 次以降に進む前に次の補助方程式によってパラメータ τ を導入する:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\zeta_j}{d\tau} &= Z_j^{*(0)}, \quad (j=1, 2) \\ \frac{d\zeta_3}{d\tau} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

その一般解は, $c > 0$, c' を τ に関して定数として,

$$\zeta_1 = c \cos \tau, \quad \zeta_2 = -c \sin \tau, \quad \zeta_3 = \tau + c' \quad (8)$$

と与えられる。ただし τ は附加定数, c' を含むと考える。

5. このとき 1 次の諸量 $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$, $Z_1^{*(1)}$, $Z_2^{*(1)}$ は一般論によって次の 4 式を満たすように決められる:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dT_1^{(1)}}{d\tau} + T_2^{(1)} &= Z_1^{*(1)}, \\ -\frac{dT_2^{(1)}}{d\tau} - T_1^{(1)} + Z_2^{*(1)} &= Z_2^{*(1)}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\frac{dZ_1^{*(1)}}{d\tau} = Z_2^{*(1)}, \quad \frac{dZ_2^{*(1)}}{d\tau} = -Z_1^{*(1)} \quad (10)$$

ここに (10) は $Z_1^{*(n)}$, $Z_2^{*(n)}$ が ζ_1, ζ_2 の線型結合であること
を示す。これは *Averaging Principle* (平均原理) の帰結で
ある。実際 (9) のオ1式を τ で微分してオ2式と (10) を
使えば

$$\frac{d^2 T_1^{(n)}}{d\tau^2} + T_1^{(n)} = Z_2^{(n)} - 2 Z_2^{*(n)} \quad (11)$$

を得る。ここに (3) のオ4式から

$$Z_2^{(n)} = -\alpha \zeta_1^3 - \gamma \zeta_2 + \beta \cos \omega \zeta_3 \quad (12)$$

である。(8) によって $Z_2^{(n)}$ を τ で表わしたとき, $\cos \tau$, $\sin \tau$
の項を集めてそれを $\langle Z_2^{(n)} \rangle$ と記せば, (10) によって

$$Z_2^{*(n)} = \frac{1}{2} \langle Z_2^{(n)} \rangle = -\frac{3\alpha}{8} c^2 \zeta_1 - \frac{\gamma}{2} \zeta_2 \quad (13)$$

と選ぶことになるが, この選択が平均原理に通っている。
このとき (11) は

$$\frac{d^2 T_1^{(n)}}{d\tau^2} + T_1^{(n)} = Z_2^{(n)} - \langle Z_2^{(n)} \rangle \quad (14)$$

となり, 今や安心して積分できて

$$T_1^{(n)} = \frac{\alpha}{32} (\zeta_1^3 - 3\zeta_1 \zeta_2^2) + \frac{\beta}{1-\omega^2} \cos \omega \zeta_3 \quad (15)$$

を得る。この辺の具体的計算には, $\zeta_1^n \zeta_2^m$ ($n, m = 0, 1, 2, \dots$) に
対して $\langle \zeta_1^n \zeta_2^m \rangle$ の値と

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + X = \zeta_1^n \zeta_2^m - \langle \zeta_1^n \zeta_2^m \rangle$$

を満たす X の値とを一度求めておけば何度でも利用できる。²⁾

$T_1^{(n)}$ と $Z_2^{*(n)}$ とが求まれば, (9), (10) から $T_2^{(n)}$, $Z_1^{*(n)}$ も
求まって

$$T_2^{(1)} = \frac{3\alpha}{32} (7\zeta_1^2 \zeta_2 + 3\zeta_2^3) - \frac{\gamma}{2} \zeta_1 - \frac{\beta\omega}{1-\omega^2} \sin \omega \zeta_3, \quad (16)$$

$$Z_1^{*(1)} = \frac{3\alpha}{8} c^2 \zeta_2 - \frac{\gamma}{2} \zeta_1. \quad (17)$$

とける。

6. 2 次の諸量 $T_2^{(1)}$, $T_2^{(2)}$, $Z_1^{*(2)}$, $Z_2^{*(2)}$ は次の諸式を満たすように決められる：

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dT_1^{(2)}}{d\tau} + T_2^{(2)} + \Phi_1^{(2)} &= Z_1^{*(2)}, \\ -\frac{dT_2^{(2)}}{d\tau} - T_1^{(2)} + \Phi_2^{(2)} &= Z_2^{*(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\frac{dZ_1^{*(2)}}{d\tau} = Z_2^{*(1)}, \quad \frac{dZ_2^{*(2)}}{d\tau} = -Z_1^{*(2)}, \quad (19)$$

ここに $\Phi_1^{(2)}$, $\Phi_2^{(2)}$ は 1 次の諸量から計算されるもので

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^{(2)} &= -\sum_{j=1}^2 Z_j^{*(1)} \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial \zeta_j}, \\ \Phi_2^{(2)} &= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial Z_2^{(1)}}{\partial \zeta_j} \cdot T_j^{(1)} - Z_j^{*(1)} \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial \zeta_j} \right) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

と与えられる。具体的には

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^{(2)} &= \frac{9\alpha^2}{256} c^2 (-3\zeta_1^2 \zeta_2 + \zeta_2^3) + \frac{3\alpha\gamma}{64} (\zeta_1^3 - 3\zeta_1 \zeta_2^2), \\ \Phi_2^{(2)} &= \frac{3\alpha^2}{256} (-8\zeta_1^5 + 9\zeta_1^3 \zeta_2^2 - 15\zeta_1 \zeta_2^4) + \frac{3\alpha\gamma}{64} (4\zeta_1^2 \zeta_2 + 7\zeta_2^3) \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{4} \zeta_1 - \frac{3\alpha\beta}{1-\omega^2} \zeta_1^2 \cos \omega \zeta_3 + \frac{\beta\gamma\omega}{1-\omega^2} \sin \omega \zeta_3 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

である。

(19) は (10) と同じ形で平均原理の要請であるから、2 次の諸量は 1 次の場合と同様の過程で決められる。つまり

まず (13) に対応して

$$Z_2^{*(2)} = \frac{1}{2} \left\langle \Phi_2^{(2)} + \frac{d\Phi_1^{(1)}}{d\tau} \right\rangle = -\frac{69\alpha^2}{2048} c^4 \zeta_1 + \frac{75\alpha\gamma}{512} c^2 \zeta_2 + \frac{\gamma^2}{8} \zeta_1, \quad (22)$$

が得られ、次いで

$$\begin{aligned} T_1^{(2)} = & \frac{3\alpha^2}{24576} (-97 \zeta_1^5 + 130 \zeta_1^3 \zeta_2^2 + 103 \zeta_1 \zeta_2^4) + \frac{3\alpha\gamma}{2048} (-35 \zeta_1^2 \zeta_2 \\ & + 9 \zeta_2^3) - \frac{3\alpha\beta}{4(1-\omega^2)} \left[\frac{2c^2}{1-\omega^2} \cos \omega \zeta_3 - \frac{2(3+\omega^2)}{9-10\omega^2+\omega^4} (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) \cos \omega \zeta_3 \right. \\ & \left. + \frac{16\omega}{9-10\omega^2+\omega^4} \zeta_1 \zeta_2 \sin \omega \zeta_3 \right] + \frac{\beta\gamma\omega}{(1-\omega^2)^2} \sin \omega \zeta_3, \end{aligned} \quad (23)$$

$$Z_1^{*(2)} = \frac{69\alpha^2}{2048} c^4 \zeta_2 + \frac{75\alpha\gamma}{512} c^2 \zeta_1 - \frac{\gamma^2}{8} \zeta_2 \quad (24)$$

を得る ($T_2^{(2)}$ は省略)。

7. 新運動方程式 (5) は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 + \frac{3\alpha}{8} c^2 \zeta_2 - \frac{\gamma}{2} \zeta_1 + \left(\frac{69\alpha^2}{2048} c^4 - \frac{\gamma}{8} \right) \zeta_2 + \frac{75\alpha\gamma}{512} c^2 \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_2 &= -\zeta_1 - \frac{3\alpha}{8} c^2 \zeta_1 - \frac{\gamma}{2} \zeta_2 - \left(\frac{69\alpha^2}{2048} c^4 - \frac{\gamma}{8} \right) \zeta_1 + \frac{75\alpha\gamma}{512} c^2 \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_3 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

となり、ここに、

$$c^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 \quad (26)$$

である。(25) は前期の通り積分できる形となっている。実際、

(25) の 1, 2 式から

$$\frac{dc^2}{dt} = -\gamma c^2 + \frac{75\alpha\gamma}{256} c^4 \quad (27)$$

および

$$\frac{d}{dt} \tan^{-1}(\zeta_1/\zeta_2) = \frac{d\gamma}{dt} = 1 + \frac{3\alpha}{8}c^2 + \frac{69\alpha^2}{2048}c^4 - \frac{\gamma^2}{8} \quad (28)$$

を得るが、これらの解は求積 (quadrature) に帰着される。

すなわち (27) を積分すれば

$$\left| \frac{75\alpha}{256} - \frac{1}{c^2} \right| = \left| \frac{75\alpha}{256} - \frac{1}{c_0^2} \right| e^{\gamma(t-t_0)} \quad (29)$$

となり、 c は t の既知関数となるので (28) より

$$\gamma = \gamma_0 + \int_{t_0}^t \left(1 + \frac{3\alpha}{8}c^2 + \frac{69\alpha^2}{2048}c^4 - \frac{\gamma^2}{8} \right) dt \quad (30)$$

と γ が求められる。されば (8) から ζ_1, ζ_2 が t で表わされる (積分定数は c_0, γ_0)。

このとき $x (=z_1)$ は、 $\zeta_3 = t$, (15), (23) から

$$\begin{aligned} x &= \zeta_1 + T_1^{(1)} + T_1^{(2)} \\ &= \zeta_1 + \frac{\alpha}{32} (\zeta_1^3 - 3\zeta_1\zeta_2^2) + \frac{\beta}{1-\omega^2} \cos \omega t \\ &\quad + \frac{3\alpha^2}{24576} (-97\zeta_1^5 + 130\zeta_1^3\zeta_2^2 + 103\zeta_1\zeta_2^4) + \frac{3\alpha\gamma}{2048} \times \\ &\quad \times (-35\zeta_1^2\zeta_2 + 9\zeta_2^3) - \frac{3\alpha\beta}{4(1-\omega^2)} \left[\frac{2c^2}{1-\omega^2} \cos \omega t \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(3+\omega^2)}{9-10\omega^2+\omega^4} (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) \cos \omega t + \frac{16\omega}{9-10\omega^2+\omega^4} \zeta_1\zeta_2 \sin \omega t \right] \\ &\quad + \frac{\beta\gamma\omega}{(1-\omega^2)^2} \sin \omega t \end{aligned} \quad (31)$$

と求められる。(31) は Duffing 方程式 (1) の一般解 (2 次までの) である。

8. (1) で γx が抵抗を表わすなら $\gamma > 0$ で、このとき c_0 の大小にかかわらず (29) によって $t \nearrow \infty$ で $c \searrow 0$. ゆえに $\zeta_1, \zeta_2 \rightarrow 0$ で、(31) は最終的に

$$x = \frac{\beta}{1-\omega^2} \cos \omega t + \frac{\beta \gamma \omega}{(1-\omega^2)^2} \sin \omega t \quad (32)$$

と強制項のみになる. (32) は 2 次の近似で (1) を満足する特別解であり、いわゆる“最終運動”を与えている. 抵抗の効果は (32) 右辺第 2 項の存在として現れ、 x と強制振動との位相のずれをもたらしことはよく知られている.

次に $\gamma < 0$ の場合 (負の抵抗), (29) より $t \nearrow \infty$ で何はともあれ

$$\left| \frac{75\alpha}{256} - \frac{1}{c^2} \right| \searrow 0 \quad (33)$$

である. ゆえに $\alpha < 0$ (バネが soft) とすると $c \nearrow \infty$ ということになる. 自由振動の振巾がいくらでも大きくなるというのだから、高次の振動がより大きな効果をもつことになるので、2 次の理論で結論することなどできない. また他方で $\alpha > 0$ (バネが hard) とすると (33) は

$$c \rightarrow (256/75\alpha)^{1/2} \quad (34)$$

を示すことになるが、 c はオーダー 0 の量と暗々裡に仮定して論を進めてきたので、この場合も (34) を鵜呑みにするわけにはいかない. 問題提起に留めておく.

9. 以下 $\omega \approx 1$ のレゾナンスを論ずる. $Z_1^{*(0)}$, $Z_2^{*(0)}$ は先と同様に (6) で与えられる. 次に 1 次に進むに, 今や (12) の $\beta \cos \omega \zeta_3$ は $\omega \approx 1$ のために ζ_1 , ζ_2 と同じく critical term となるので $Z_1^{*(0)}$, $Z_2^{*(0)}$ に取り込まなければならぬ. その際, $\omega \approx 1$ だが $\omega = 1$ とは限りないので (10) を要請することはできない. したがって (11) も使えず, もとに戻って (9) から得られる

$$\frac{d^2 T_1^{(1)}}{d\tau^2} + T_1^{(1)} = Z_2^{(1)} - Z_2^{*(1)} - \frac{dZ_1^{*(1)}}{d\tau} \quad (35)$$

に基づいて考えると, 平均原理から

$$Z_2^{*(1)} + \frac{dZ_1^{*(1)}}{d\tau} = \langle Z_2^{(1)} \rangle \quad (36)$$

が要請される. (12) を考慮すると

$$\begin{aligned} Z_2^{*(1)} &= \frac{1}{2} \langle -\alpha \zeta_1^3 - \gamma \zeta_2 \rangle + \frac{\beta}{1+\omega} \cos \omega \zeta_3 \\ &= -\frac{3\alpha}{8} c^2 \zeta_1 - \frac{\gamma}{2} \zeta_2 + \frac{\beta}{1+\omega} \cos \omega \zeta_3, \end{aligned} \quad (37)$$

$$Z_1^{*(1)} = \frac{3\alpha}{8} c^2 \zeta_2 - \frac{\gamma}{2} \zeta_1 + \frac{\beta}{1+\omega} \sin \omega \zeta_3 \quad (38)$$

でよい. もし $\omega = 1$ ならば (37) の右辺は $\frac{1}{2} \langle Z_2^{(1)} \rangle$ で (10) が満足されることに注意しよう. つまり (37), (38) は (10) の一般化となっている. (36) によって (35) は安心して積分できて

$$T_1^{(1)} = \frac{\alpha}{32} (\zeta_1^3 - 3\zeta_1 \zeta_2^2) \quad (39)$$

また

$$T_2^{(1)} = \frac{3\alpha}{32} (\gamma \zeta_1^2 \zeta_2 + 3\zeta_2^3) - \frac{\gamma}{2} \zeta_1 + \frac{\beta}{1+\omega} \sin \omega \zeta_3 \quad (40)$$

となる.

10. 2次に進むと, (18)で $\Phi_1^{(2)}, \Phi_2^{(2)}$ は

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(2)} &= \frac{9\alpha^2}{256} c^2 (-3\zeta_1^2 \zeta_2 + \zeta_2^3) + \frac{3\alpha\gamma}{64} (\zeta_1^3 - 3\zeta_1 \zeta_2^2) \\ &\quad + \frac{3\alpha\beta}{32(1+\omega)} [2\zeta_1 \zeta_2 \cos \omega \zeta_3 - (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) \sin \omega \zeta_3], \\ \Phi_2^{(2)} &= \frac{3\alpha^2}{256} (-8\zeta_1^5 + 9\zeta_1^3 \zeta_2^2 - 15\zeta_1 \zeta_2^4) + \frac{3\alpha\gamma}{64} (4\zeta_1^2 \zeta_2 + 7\zeta_2^3) \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{4} \zeta_1 - \frac{27\alpha\beta}{32(1+\omega)} \zeta_2^2 \cos \omega \zeta_3 - \frac{\beta}{16(1+\omega)} (21\alpha\zeta_1 \zeta_2 + 8\gamma) \sin \omega \zeta_3\end{aligned}\quad (41)$$

で与えられる. 1次と同じ過程で

$$Z_2^{*(2)} + \frac{dZ_1^{*(2)}}{d\tau} = \left\langle \Phi_2^{(2)} + \frac{d\Phi_1^{(2)}}{d\tau} \right\rangle \quad (42)$$

から, 途中の計算は省略するが, 次の結果を得る ($T_2^{(2)}$ は省く):

$$\begin{aligned}Z_2^{*(2)} &= -\frac{69\alpha^2}{2048} c^4 \zeta_1 + \frac{75\alpha\gamma}{512} c^2 \zeta_2 + \frac{\gamma^2}{8} \zeta_1 + \frac{\beta}{1+\omega} \left[-\frac{\gamma}{2(1+\omega)} \sin \omega \zeta_3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{27\alpha}{64(1+\omega)} c^2 \cos \omega \zeta_3 + \frac{69\alpha}{128(3-\omega)} \{ (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) \cos \omega \zeta_3 \right. \\ &\quad \left. - 2\zeta_1 \zeta_2 \sin \omega \zeta_3 \} \right],\end{aligned}\quad (43)$$

$$\begin{aligned}Z_1^{*(2)} &= \frac{69\alpha^2}{2048} c^4 \zeta_2 + \frac{75\alpha\gamma}{512} c^2 \zeta_1 - \frac{\gamma^2}{8} \zeta_2 + \frac{\beta}{1+\omega} \left[\frac{\gamma}{2(1+\omega)} \cos \omega \zeta_3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{27\alpha}{64(1+\omega)} c^2 \sin \omega \zeta_3 + \frac{69\alpha}{128(3-\omega)} \{ -2\zeta_1 \zeta_2 \cos \omega \zeta_3 \right. \\ &\quad \left. - (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) \sin \omega \zeta_3 \} \right],\end{aligned}\quad (44)$$

$$\begin{aligned}T_1^{(2)} &= \frac{3\alpha^2}{24576} (-97\zeta_1^5 + 130\zeta_1^3 \zeta_2^2 + 103\zeta_1 \zeta_2^4) + \frac{3\alpha\gamma}{2048} (-35\zeta_1^2 \zeta_2 + 9\zeta_2^3) \\ &\quad + \frac{3\alpha\beta}{128} \cdot \frac{13+4\omega}{(1+\omega)(3+4\omega+\omega^2)} [(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) \cos \omega \zeta_3 + 2\zeta_1 \zeta_2 \sin \omega \zeta_3].\end{aligned}\quad (45)$$

11. 新運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 + \frac{3\alpha}{8} c^2 \zeta_2 - \frac{\gamma}{2} \zeta_1 + \frac{\beta}{1+\omega} \sin \omega \zeta_3 + Z_1^{*(2)} \\ \dot{\zeta}_2 &= -\zeta_1 - \frac{3\alpha}{8} c^2 \zeta_1 - \frac{\gamma}{2} \zeta_2 + \frac{\beta}{1+\omega} \cos \omega \zeta_3 + Z_2^{*(2)} \\ \dot{\zeta}_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

と書かれる。(8)を省みて ζ_1, ζ_2 の代りに c, τ を使えば

$$\begin{aligned} \dot{c} &= -\frac{\gamma}{2} c - \frac{\beta}{1+\omega} \sin(\tau - \omega \zeta_3) + \frac{75\alpha\gamma}{512} c^3 \\ &+ \frac{\beta}{1+\omega} \left[\frac{\gamma}{2(1+\omega)} \cos(\tau - \omega \zeta_3) + \frac{3(77+5\omega)\alpha}{128(1+\omega)(3-\omega)} c^2 \sin(\tau - \omega \zeta_3) \right] \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= 1 + \frac{3\alpha}{8} c^2 - \frac{\beta}{(1+\omega)c} \cos(\tau - \omega \zeta_3) + \frac{69\alpha^2}{2048} c^4 - \frac{\gamma^2}{8} + \frac{\beta}{1+\omega} \times \\ &\times \left[-\frac{\gamma}{2(1+\omega)c} \sin(\tau - \omega \zeta_3) + \frac{3(31-4/\omega)\alpha}{128(1+\omega)(3-\omega)} c \cos(\tau - \omega \zeta_3) \right] \end{aligned} \quad (48)$$

となる。 τ と ζ_3 が今や $\tau - \omega \zeta_3$ の組合せでのみ現われることに注意しよう。そこで

$$\theta = \tau - \omega \zeta_3 = \tau - \omega t \quad (49)$$

と置き、2次の項では $\omega = 1$ と近似して

$$\dot{c} = -\frac{\gamma}{2} c - \frac{\beta}{1+\omega} \sin \theta + \frac{75\alpha\gamma}{512} c^3 + \frac{\beta\gamma}{8} \cos \theta + \frac{123\alpha\beta}{512} c^2 \sin \theta, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 1 - \omega + \frac{3\alpha}{8} c^2 - \frac{\beta}{(1+\omega)c} \cos \theta + \frac{69\alpha^2}{2048} c^4 - \frac{\gamma^2}{8} \\ &- \frac{\beta\gamma}{8c} \sin \theta - \frac{15\alpha\beta}{512} c \cos \theta. \end{aligned} \quad (51)$$

が得られる。非レゾナンスの場合と異なって (50), (51) を累積で解くことは難かしいが、原方程式 (1) が非自律系であっ

たのに対し (50), (51) は自律系であって 1 階遞減されている。

12. (50), (51) の平衡解を

$$c = c_0, \quad \theta = \theta_0. \quad (52)$$

とすなわち, これから (49) によって

$$\zeta_1 = c_0 \cos(\omega t + \theta_0), \quad \zeta_2 = -c_0 \sin(\omega t + \theta_0) \quad (53)$$

となり, したがって (39), (45) から, 2 次項では $\omega = 1$ とし,

$$\begin{aligned} x = \zeta_1 + \frac{\alpha}{32} (\zeta_1^3 - 3\zeta_1\zeta_2^2) + \frac{3\alpha^2}{24576} (-97\zeta_1^5 + 130\zeta_1^3\zeta_2^2 + 103\zeta_1\zeta_2^4) \\ + \frac{3\alpha\gamma}{2048} (-35\zeta_1^2\zeta_2 + 9\zeta_2^3) + \frac{51\alpha\beta}{2048} [(\zeta_1^2 - \zeta_2^2) \cos \omega t \\ + 2\zeta_1\zeta_2 \sin \omega t] \end{aligned} \quad (54)$$

が得られる。これは $2\pi/\omega$ を周期とする周期解であり, 特別解である。

平衡解の条件は

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma}{2} c_0 - \frac{\beta}{1+\omega} \sin \theta_0 + \frac{75\alpha\gamma}{512} c_0^3 + \frac{\beta\gamma}{8} \cos \theta_0 + \frac{123\alpha\beta}{512} c_0^2 \sin \theta_0 = 0, \\ 1 - \omega + \frac{3\alpha}{8} c_0^2 - \frac{\beta}{(1+\omega)c_0} \cos \theta_0 + \frac{69\alpha^2}{2048} c_0^4 - \frac{\gamma^2}{8} \\ - \frac{\beta\gamma}{8c_0} \sin \theta_0 - \frac{15\alpha\beta}{512} c_0 \cos \theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

で与えられる。まず大勢を見るために 2 次項を省略すると

$$\frac{\gamma}{2} c_0 + \frac{\beta}{2} \sin \theta_0 = 0, \quad 1 - \omega + \frac{3\alpha}{8} c_0^2 - \frac{\beta}{2c_0} \cos \theta_0 = 0. \quad (56)$$

したがってオ1式から

$$\sin \theta_0 = -\frac{\gamma}{\beta} c_0, \quad \cos \theta_0 = \pm \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\beta^2} c_0^2} \quad (57)$$

これをオ2式に代入すれば

$$\omega = 1 + \frac{3\alpha}{8} c_0^2 \mp \sqrt{\frac{\beta^2}{4c_0^2} - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (\text{符号は } \theta_0, \pi - \theta_0 \text{ に対応}) \quad (58)$$

を得る。(58)は“レスポンス式”とよばれている。これを図示したものが“レスポンス曲線”である。

図 1

$\alpha > 0$

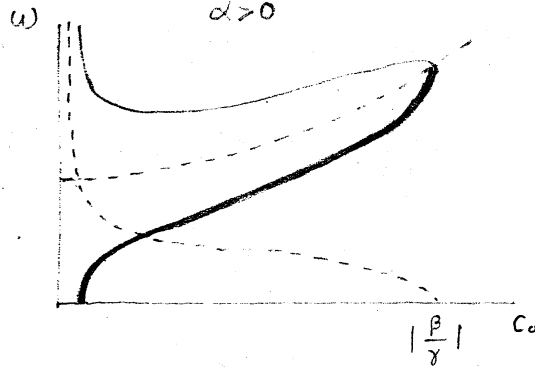
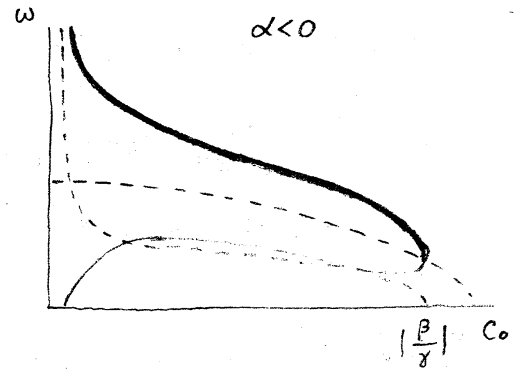


図 2

$\alpha < 0$



13. 平衡解の安定性を論じよう。1次で論ずるとして

$$\dot{c} = -\frac{\gamma}{2} c - \frac{\beta}{2} \sin \theta, \quad \dot{\theta} = 1 - \omega + \frac{3\alpha}{8} c^2 - \frac{\beta}{2c} \cos \theta, \quad (59)$$

に

$$c = c_0 + \xi, \quad \theta = \theta_0 + \eta \quad (60)$$

を代入すれば, (57)を省みて

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{\gamma}{2} \xi - \frac{\beta}{2} \cos \theta_0 \cdot \eta \\ \dot{\eta} &= \left(\frac{3\alpha}{4} c_0 + \frac{\beta}{2c_0^2} \cos \theta_0 \right) \xi - \frac{\gamma}{2} \eta \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

を得る。(61)の解が $\xi, \eta \propto e^{\lambda t}$ とすると, λ に対する特性方程式は

$$(\lambda + \frac{\gamma}{2})^2 + \frac{\beta}{2} \cos \theta_0 (\frac{3\alpha}{4} c_0 + \frac{\beta}{2c_0} \cos \theta_0) = 0 \quad (62)$$

で与えられる。

$\alpha > 0$ (バネ hard, 図1) で $\beta \cos \theta_0 > 0$ とすると, c_0 は約束で正で $\lambda = -(\gamma/2) + (\text{純虚数})$ となり, $\gamma > 0$ (抵抗) なら安定はもちろんだ. $\gamma \rightarrow 0$ となって平衡解に漸近する.

$\alpha < 0$ (バネ soft, 図2) で $\beta \cos \theta_0 < 0$ でも同じことになる. 二通りの場合, 平衡解はいわゆる "最終運動" に通じるもので, その意義は単なる特別解に留まらない.

$\beta > 0$ と定めると上記の $\beta \cos \theta_0$ の正負は $\cos \theta_0$ のそれと同じであるから, 安定平衡解は $\alpha > 0$ なら $\cos \theta_0 > 0$ で (57) の 2 式の複号は +, (58) 右辺の複号は - で, 図1では下側の太線に対応する. 同様に考えて $\alpha < 0$ なら図2の上側太線が安定平衡解である.

以上は (59) による 1 次の理論だが, その本質は (50), (51) に基づく 2 次の理論にも受けつがれる. (56) の代りに (55) を使って レスポンス式, レンボンス曲線が改良される. 大勢はすでに把握されているので, パラメーター α, β, γ が数値的に与えられたとき, レスポンス曲線を図示するのは容易である.

1) Hori, G. 1966, Publ. Astro. Soc. Japan, 18, 287

2) Hori, G. 1971, Publ. Astro. Soc. Japan, 23, 567