

Brauer 群の一般化について

名大 理 竹本 夫夫

Grothendieck の Brauer 群 II, III [4] の中から, 1. Kummer の完全列から容易に出る結果, 2. Scheme の Brauer 群の一般化, 及び 3. Weil 予想と Tate 予想との関係について紹介します。

1. 以下 1, 2, 3. を通じて Topology は, すべて étale topology とし, 又, 簡単の為に, X を体 k 上の prescheme とする。 ($\text{ch. } k = p$) X 上 multiplicative group $\text{Spec}(\mathcal{O}_X[t, t^{-1}])$ によって represent される sheaf を $G_{m, X}$ で表わす。 $\mu_{n, X}$ を完全列 $0 \rightarrow \mu_{n, X} \rightarrow G_{m, X} \xrightarrow{x \mapsto x^n} G_{m, X} \xrightarrow{x \mapsto x^n} G_{m, X}$ で定義すると, $(n, p) = 1$ の時, $u \in G_m(U)$ $U \rightarrow X$ étale に対し, $U' = \text{Spec } \mathcal{O}_U[t]/t^n - u$ は U 上 étale covering だから, 次の Kummer の完全列が成立する。

$$(1) \quad \text{定理} \quad 0 \rightarrow \mu_{n, X} \rightarrow G_{m, X} \xrightarrow{n} G_{m, X} \rightarrow 0 \quad (n, p) = 1$$

注. $\mu_{n, X}$ は, (étale topology で) 局所的に constant sheaf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に同型である。

以下の話において, l は素数 $(l, p) = 1$ とする。(1) の完全列より,

$$(1)' \quad 0 \rightarrow H^i(X, G_m)_{\ell^v} \rightarrow H^i(X, \mu_{\ell^v}) \rightarrow_{\ell^v} H^i(X, G_m) \rightarrow 0$$

1.

(ここで, $M: P \rightarrow V$ 有限群, $M_n = \text{Coker}(M \xrightarrow{n} M)$, $nM = \text{Ker}(M \xrightarrow{n} M)$)

$$\mu_{\mathbb{G}_m}^{\otimes n} = \varinjlim \mu_{\mathbb{G}_m}^{\otimes n}, \quad Z_\ell[1] = \varprojlim \mu_{\mathbb{G}_m}^{\otimes n} \text{ とおく.}$$

$$(2) \quad 0 \rightarrow H^1(X, G_m) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^1(X, \mu_{\mathbb{G}_m}) \rightarrow H^1(X, G_m)(\ell) \rightarrow 0$$

(exact)

(ここで, $M(\ell) = \{ m \in M \mid \ell^n m = 0 \}$)

X : regular noeth. とすれば, $H^1(X, G_m)$ は torsion group ($q \geq 2$)
だから (小崎氏の証), 次の系を得る.

$$(3) \text{ 系 } X: \text{regular noeth.} \Rightarrow H^1(X, G_m)(\ell) \cong H^1(X, \mu_{\mathbb{G}_m}) \quad i \geq 3$$

今後, $Br'(X) = H^2(X, G_m)$ とおき, cohomological Brauer 群
という, $H^1(X_{\text{et}}, G_m) = H^1(X_{\text{zar}}, \mathcal{O}_X^*) = \text{Pic}(X)$ [2] SGAA expose 9 に
注意して, (2) より $0 \rightarrow \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^2(X, \mu_{\mathbb{G}_m}) \rightarrow Br'(X)(\ell) \rightarrow 0$

($M = M(\ell)$ の時, M が finite corank $\stackrel{\text{def}}{\iff} M \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_\ell)^r \times \text{有限群} \iff M: \text{有限}$)
(この時, r を M の corank という.)

k : sep. closed X : proper over k の時, $H^2(X, \mu_\ell)$: 有限だから,
 $H^2(X, \mu_{\mathbb{G}_m}), Br'(X)(\ell)$ は finite corank. 更に, X : finite type の
時, $0 \rightarrow \text{Pic}(X)^0 \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow NS(X) \rightarrow 0$ ($\text{Pic}(X)^0$ は,
 ℓ -divisible group, $NS(X)$ は finite type abelian group) だから,
 $\text{corank Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_\ell = \text{rank } NS(X)$ 又, $0 \rightarrow \mu_{\mathbb{G}_m} \rightarrow \mu_{\mathbb{G}_m}^{\otimes \ell} \rightarrow \mu_{\mathbb{G}_m}^{\otimes \ell^2} \rightarrow 0$
を用いて, 上と同様の議論を行くと, $(T_\ell(M)) = \varprojlim_{\ell} \mu_{\mathbb{G}_m}^{\otimes n}$
 $H^2(X, Z_\ell[1]) \cong T_\ell(H^1(X, \mu_{\mathbb{G}_m})) \oplus (\ell\text{-torsion 有限群})$ を得る.
よって $\text{corank } H^2(X, \mu_{\mathbb{G}_m}) = \text{rank } H^2(X, Z_\ell[1]) = \text{rank } H^2(X, Z_\ell)$
 $= B_{2, \ell}$ ($= \ell$ -adique 2次元 Betti 数 X)

以上をまとめると.

定理 k : sep. closed X : k 上 finite type, proper の時.

$$\text{corank } Br'(X)(\ell) = B_{2,\ell} - \rho \quad (= \text{Lefschetz number})$$

$$\rho = \text{rank } NS(X) : \text{Picard number}$$

系, k : sep. closed X : k 上 proper, lisse $\dim X \leq 2$ の時

$\text{corank } Br(X)(\ell)$ は, ℓ に independent.

$$\begin{aligned} \because B_{2,1} &= \text{rank } H^1(X, \mathbb{Z}_\ell) = \text{corank } H^1(X, \mu_{\ell^\infty}) = \text{corank } Pic(X)(\ell) \\ &= \text{corank } Pic(X)^0(\ell) = \text{rank } T_\ell(Pic(X)^0) = 2. \quad (\text{Picard scheme の次元}) \end{aligned}$$

又, étale topology の duality より $B_i = B_{2n-i}$ ($n = \dim X$), Euler Poincaré $\sum (-1)^i B_i$ は, $X \times X$ での diagonal の self-intersection と解釈. 実は, $\dim X = 1$ の時, 系の仮定の下で $Br'(X) = Br(X) = 0$ (小崎, 田原両氏の論文).

同様に, ℓ -adique Betti number が ℓ に indep. がいれば, $\text{corank } Br'(X)(\ell)$ も ℓ に indep. がわかる.

注. 定理より $B_{2,2} \geq \rho$ これは Igusa [6] が k alg. closed X : projective lisse surface の場合, 示した不等式である.

2.0. cohomological Brauer 群を一般化しようとする時, 一番簡単なのは, $H^i(X, G_m)$ ($i \geq 3$) を考えることであるが, (3)で見る様に, X : regular noeth. の時, $H^i(X, G_m)(\ell) \cong H^i(X, \mu_{\ell^\infty})$ ($i \geq 3$) となり, 本質的に新たな invariant でない. Br III. 7

で示されている様に, $Br(X)$ について birational invariance が成り立っているから (一般には $Br(X)(\ell)$ について), そのような性質を持つ一般化をしようとするのが, 次に述べる Grothendieck の方法である。

2.1 $U: k$ 上 finite type, lisse scheme とし,
仮定 k 上 lisse, proper scheme X が存在して, U は X の open dense である。(これは singularity の resolution が使えれば, いえるから, $ch=0$ 又は $\dim X \leq 2$ k : perfect の時, 成り立つ。)

$$H_{\lambda}^i(U, \mu_{\ell^n}) \stackrel{\text{def.}}{=} \text{Im}(H^i(X, \mu_{\ell^n}) \rightarrow H^i(U, \mu_{\ell^n}))$$

これは, X のとり方によらない。(2.3で示す)

(ここで, μ_{ℓ^n} の代りに, 一般に F : locally const. ℓ -torsion sheaf としてもよい。) $U \supset V$ open $H_{\lambda}^i(U, F) \rightarrow H_{\lambda}^i(V, F)$ surj.

更に, U : irreducible 商体 K

$$H_{\lambda}^i(K, \mu_{\ell^n}) \stackrel{\text{def.}}{=} \varinjlim_{\emptyset \neq V \subset U \text{ open}} H_{\lambda}^i(V, \mu_{\ell^n})$$

定義から明らかに, $H_{\lambda}^i(K, \mu_{\ell^n})$ は k の有限次拡大 K の birational invariant である。 $H^i(X, \mu_{\ell^n})$ は有限群だから, その quotient である $H_{\lambda}^i(K, \mu_{\ell^n})$ は有限群, (k : sep. closed)

又, U : affine open の時, cohomological dim $\leq$ Zariski-dim (SGAA exposé 14 [2]) だから, birational invariance より

② $i > \deg. \text{tr. } K/k$ の時, $H_{\lambda}^i(K, \mu_{\ell^n}) = 0$ 。

2.2. $X: k \text{ 上 proper lisse connected}$ $K: \text{商体}$

Definition. $\text{Gr}^0 H^i(X, \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}) = H^i_{\Lambda}(K, \mathcal{M}_{\mathbb{Q}})$

定義から, これは birational invariant. 又 $\text{Gr}^0 H^i(X, \mathcal{M}_{\mathbb{Q}})$ は $H^i(X, \mathcal{M}_{\mathbb{Q}})$ の商である。注. この定義は, $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ の代りに $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}_\ell[1]$ etc. としてもよい。

2.3. $X: k \text{ 上 lisse scheme}$ $F = \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ $f: X' \rightarrow X$

proper birational, $f(F) = F'$, $X \supset U \text{ open}$ $f(U) = U' \hookrightarrow U$ 同型.

$$\begin{array}{ccc} H^i(X, F) & \xrightarrow{g^i} & H^i(U, F|_U) \\ \downarrow & \searrow & \uparrow \\ H^i(X', F) & \xrightarrow{g'^i} & H^i(U', F|_{U'}) \end{array} \quad \text{とする時, } \text{Im } g^i = \text{Im } g'^i \quad \text{これを}$$

示すために, $Y = X - U$, $f(Y) = Y' = X' - U'$ とおき, 次の完全

$$\begin{array}{ccccc} H^i(X, F) & \rightarrow & H^i(U, F|_U) & \rightarrow & H^{i+1}_Y(X, F) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^i(X', F) & \rightarrow & H^i(U', F|_{U'}) & \rightarrow & H^{i+1}_{Y'}(X', F) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{列を用いれば,} \\ H^i_Y(X, F) \rightarrow H^i_Y(X', F) \text{ が} \end{array}$$

injective をいえる。その次に一般の closed subset Y について, $(Y' = f(Y))$ $H^i_Y(X', F) \rightarrow H^i_Y(X, F)$ が存在して,

canonical morph $H^i_Y(X, F) \rightarrow H^i_Y(X', F)$ との composite morph

$H^i_Y(X, F) \rightarrow H^i_Y(X', F) \rightarrow H^i_Y(X, F)$ が恒等写像であることをい

う。一応, étale topology の duality の定理を用いれば, X, f

に関する仮定より $Rf_* F' \rightarrow F$ が存在して, canonical morph $F \rightarrow Rf_* F'$

との合成 $F \rightarrow Rf_* F' \rightarrow F$ が identity を示す。support

を Y に持つ global section をとる functor を Γ_Y とする。

$R\Gamma_Y(F) \rightarrow R\Gamma_Y(Rf_* F') = R\Gamma_{Y'}(F') \rightarrow R\Gamma_Y(F)$: identity. 次の

5.

cohomologyをとれば、求めるものが得られる。この事を使えば、2.1.での $H^i_\lambda(U, \mathcal{M}_{\lambda, \nu})$ の定義が次の様に X のとりえによらない事がわかる。つまり、 X' も X と同じ仮定をみたすとするれば、 $f: X' \rightarrow X$, $f': X' \rightarrow X'$ がこの2.3.の初めの仮定をみたす様な X' , f, f' が存在するから、 $\text{Im } i^* = \text{Im } i'^*$ を使えばよい。

2.4. ここで2.3.の定義が求めるものである事を示す。

$X \supset U$ open $Y = X - U$, 予稿集で示した様に、 $H^1_Y(X, \mathcal{M}_{\lambda, \nu}) = 0$
 $H^2_Y(X, \mathcal{M}_{\lambda, \nu}) = H^0(X, \sum_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z})_{x_i})$ (x_i は Y の $\text{codim } 1$ の max. points)
 となることに注意して、local cohomology の完全列を使えば、
 $0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{M}_{\lambda, \nu}) \rightarrow H^1(U, \mathcal{M}_{\lambda, \nu}) \rightarrow H^0(X, \sum_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z})_{x_i}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{M}_{\lambda, \nu}) \rightarrow H^2(U, \mathcal{M}_{\lambda, \nu})$
 故て $\text{Gr}^0 H^1(X, \mathcal{M}_{\lambda, \nu}) = H^1(X, \mathcal{M}_{\lambda, \nu})$, $\text{Gr}^0 H^2(X, \mathcal{M}_{\lambda, \nu}) = H^2(X, \mathcal{M}_{\lambda, \nu}) / \text{Im Div}(X, \mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z})$
 ここで、 $\text{Div}(X, F)$ は、 F -係数の divisors の群を表わす。

$H^0(X, \mathcal{G}_m) = k^*$ k : alg. closed の時、 $H^1(X, \mathcal{M}_{1, \infty}) = \text{Pic}(X)(\ell)$

$\text{Gr}^0 H^1(X, \mathcal{M}_{1, \infty}) = \text{Pic}(X)(\ell)$, 同様に、 $\text{Gr}^0 H^1(X, \mathbb{Z}_\ell[\mathbb{U}]) = \text{Te}(\text{Pic}(X))$

X : regular noeth の時、 $\text{Div}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Pic}(X)$ surjective だから
 1 の (2) $i=2$ から、 $\text{Gr}^0 H^2(X, \mathcal{M}_{\ell, \infty}) \cong \text{Br}^1(X)(\ell)$ これが求めていたものである。又、 $\text{Gr}^0 H^2(X, \mathbb{Z}_\ell[\mathbb{U}]) \cong H^2(X, \mathbb{Z}_\ell[\mathbb{U}]) / \text{Im Div}(X, \mathbb{Z}_\ell)$

これは、2次元 ℓ -adique cohomology 群の transcendental part であって、この rank が $B_{2, \ell} - p = \text{Lefschetz number}$ である。classical な場合にはよく知られている [12] 様に、Lefschetz 数が birational invariant な事がわかる。

3.1 2.2.で定義した $\text{Gr}^0 H^i(X, F)$ は, $H^i(X, F) / \text{Filt}^1 H^i(X, F)$ と書ける。ここで, $\text{Filt}^1 H^i(X, F) = \sum \text{Ker} (H^i(X, F) \rightarrow H^i(U, F))$ (Σ は, $X \supset U$ open $\neq \emptyset$)。よって一般に $H^i(X, F)$ に自然な filtration $\text{Filt}^p H^i(X, F) = \sum \text{Ker} (H^i(X, F) \rightarrow H^i(U, F))$ (Σ は $\text{codim}(X-U, X) \geq p$ U : open) が定義できる。 $H^i_Y(X, F) \rightarrow H^i(X, F) \rightarrow H^i(U, F)$ ($Y = X - U$) を使えば, $\text{Filt}^p H^i(X, F) = \sum \text{Im} (H^i_Y(X, F) \rightarrow H^i(X, F))$ (Σ は $\text{codim}(Y, X) \geq p$) と書けるが, 更にその表わし方を示す書に次の定理を使う。

Cohomological purity の定理 (SGAA exposé 16, 19)

$Y \xrightarrow{i} X$ closed immersion, 各点で $\text{codim } c$

$\xrightarrow{\text{lisse}} \text{lisse}$ F : local に const. 有限群に同型。 $nF = 0$

その時, $H^i_Y(F) = 0$ $i \neq 2c$, $H^{2c}_Y(F) = i^*(F) \otimes H^{2c}_Y(\mathbb{Z}/2) = F_Y \otimes (\mu_n)^{\otimes c}$

Spectral seq. $E_2^{p,q} = H^p(X, H^q_Y(F)) \Rightarrow H^p_Y(X, F)$ を使えば,

$H^i = E_2^{i-2c, 2c}$ つまり, $H^i_Y(X, F) = H^{i-2c}(Y, F_Y \otimes (\mu_n)^{\otimes c})$

特に, $F = \mu_n, \mathbb{Z}/2$ に適用する。その時, $H^i_Y(X, F) = H^{i-2c}(Y, F_Y \otimes \mathbb{Z}/2)$ と書ける。 ($F = \mu_n, \mathbb{Z}/2, \mu_n^{\otimes n}, \mathbb{Z}/2[n] \dots$) よって singularity の resolution を仮定すれば,

$$\text{Filt}^p H^i(X, F) = \sum_{g \geq p} \text{Im} (H^{i-2g}(Z, F_Z \otimes \mathbb{Z}/2[-g]) \rightarrow H^i(X, F))$$

ここで, Z は proper lisse X -scheme, $\dim Z = \dim X - g$

(更に, Z は空でない open set で immersion であると仮定してもよい。)

3.2. $k = F_N$: 位数 N の有限体。 $\bar{k}$: k の algebraic closure
 $X: k$ 上 proper lisse irreducible $F = \mathbb{Z}_\ell$, $\bar{X} = X_{\bar{k}} \bar{k}$ irreducible
 $\bar{F} = F \otimes_k \bar{k}$ とする。 $G = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ は, second factor を通して
 $H^i(\bar{X}, \bar{F})$ 上に作用する。又, filtration にも作用する, singularity
 の resolution を仮定すれば, 次の様に表示表わせる。

$$\text{Filt}^p H^i(\bar{X}, \bar{F}) = \sum_{j \geq p} \text{Im} (H^{i-2j}(\Sigma, \mathbb{Z}_\ell[-j]) \rightarrow H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell)) \quad \text{ここで,}$$

Σ は, lisse, proper X -scheme Σ から induce される scheme。

G は, $\hat{\Sigma}$ に同型で, topological generator frob_N (Frobenius automorph.) を持つ。 G の作用 $\iff \text{frob}_N$ の作用。

canonical isom. $H^i(\Sigma, \mathbb{Z}_\ell[-j]) \cong H^i(\Sigma, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell[-j]$ がある。

(但し, ここで右辺の $\mathbb{Z}_\ell[-j] = \varprojlim \mu_{\ell^N}^{\otimes -j}$, μ_{ℓ^N} は 1 の ℓ^N -乗根全体で G が作用している。 isom. は G の作用もこめての意味。)

ところで, $k = F_N$ 上, 任意の scheme X に対して, Frobenius morph. $F_X: X \rightarrow X$ がある。(points 上 identity map, structure sheaf 上 $f \mapsto f^N$) $G \ni \text{frob}_N: x \mapsto x^N$ 。 $H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ 上

に, F_X と frob_N は, 互いに逆作用する事を示すと, ([1] exposé 15 または [8]) $\mathbb{Z}_\ell[\Gamma]$ への frob_N の作用は, N 倍だから

$\mathbb{Z}_\ell[\Gamma]$ への F_X の作用は, N^2 倍である。 Weil の予想 [11]

" $H^i(\Sigma, \mathbb{Z}_\ell)$ に作用する F_X の最小多項式は有理整数係数, かつその根は代数的整数で更に絶対値は $N^{\frac{i}{2}}$ である。" を仮

定すれば, $\text{Filt}^p H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ への F_X の作用の固有値は, 絶対値 $N^{\frac{i}{2}}$ 。

値 $N^{\frac{r}{2}-p}$ の代数的整数と N^p との積である。 $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell) = H^i(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$
 $\text{Filt}^p H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ を, N^p で割ると代数的整数になる数値,
 Frobenius morph. F_X の固有値に持つ固有ベクトルから生成され
 る $H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ の subspace と定義する。

$$(*) \quad \text{Filt}^p H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell) \subset \text{Filt}^p H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$$

Tate 予想の一般化として, この inclusion が等号であると予
 想される。実際 $i=2p$ の時, 次に見る様に, この予想は,
 Tate 予想と一致する。 $\text{Filt}^p H^{2p}(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell) = \text{Im}(H^{2p}(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell[-p]) \rightarrow H^{2p}(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell))$
 $= \text{codim } p$ の $\mathbb{Z}_\ell[-p]$ -係数の alg. cycle の cohomology class か
 ら生成される submodule。 $(*)$ の両辺に $\mathbb{Q}_\ell[p]$ を tensor すると,
 左辺 $= \text{codim } p$ の alg. cycle の cohomology class から生成される
 subspace。 右辺 $= 1$ のべき根を F_X の固有値に持つ
 固有ベクトルから生成される subspace $\subset H^{2p}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell[p])$,
 つまり, $r \gg 0$ F_X^r で invariant。 田原氏の話にも

あるように, Tate [9] により, X が surface の場合

$\text{Br}(X)(\ell): \text{有限} \iff \text{Tate 予想}$ ($NS(X)$ は, $NS(X)$ にかける
 $\text{Pic}(X)$ の image だから, $NS(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell = \dim 1$ の alg. cycle
 の cohomology class から生成される submodule)

又, Tate [10] により, X が 2次元アーベル多様体 又は
 曲線の直積の時, $\text{Br}(X)(\ell)$ は有限。よって Tate 予想は,
 正しい。

Pohlmann [7] は, Shimura-Taniyama の意味の CM-型のアベリ多様体に対して, Hodge 予想と Tate 予想とが同値になることを示している。

参考文献.

- [1] S. Abhyankar, — Local Uniformization on algebraic surfaces over ground fields of $ch \neq 0$. Ann. of Math. 63 (1956)
- [2] M. Artin et A. Grothendieck, — Cohomologie étale des schemas SGAA, 1963/64
- [3] A. Grothendieck, — Cohomologie ℓ -adique et fonctions L SGA 1964/65
- [4] A. Grothendieck, — Le groupe de Brauer (Br) I, II, III Seminaire Bourbaki 290 (1965), 297 (1965) and mimeographed note of I. H. E. S., 1966
- [5] H. Hironaka, — Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of $ch=0$ Ann. of Math. 79 (1964)
- [6] J. Igusa, — Betti and Picard numbers of abstract algebraic surfaces, Proc. Nat. Acad. Sc. 46 (1960)
- [7] H. Pohlmann, — Algebraic cycles on abelian varieties of complex multiplication type Ann. of Math. (1965)
- [8] J. Tate, — Algebraic cycles and poles of zeta functions Arithmetical algebraic geometry (1965)

- [9] J. Tate, — On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog. *Seminaire Bourbaki* 1965/66 exposé 306
- [10] J. Tate, — Endomorphisms of Abelian Varieties over Finite Fields, *Inventiones math.* 2 (1966)
- [11] A. Weil, — Number of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. math. Soc* 55 (1949)
- [12] O. Zariski, — Algebraic surface.