

On the Finite Orbits Condition for the A_r -type representations

筑波大学 数学研究科 名倉 誠 (Makoto NAGURA)

筑波大学 数学研究科 二井谷 剛 (Tsuyoshi NIITANI)

Institute of Mathematics, University of Tsukuba

序

A_r 型の Dynkin 図形 $\cdots \cdots \cdots$ の各頂点に左から順に番号をつけ、各辺に向きをつけたクイバー

$$(Q) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & 2 & \longleftarrow & 3 & \longleftarrow & 4 \longrightarrow \cdots \longrightarrow r \end{array}$$

を考える. $d = (d_1, \dots, d_r)$ を r 個の正整数の組とし, $V_1, \dots, V_r$ を $\dim V_i = d_i$ となるような複素数体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする. $G = G_1 \times \cdots \times G_r$ ただし $G_i = GL(V_i)$ または $SL(V_i)$ とする. このとき G はベクトル空間 $\mathcal{L}_d(Q) = \bigoplus_{i \rightarrow j \text{ in } Q} \text{Hom}(V_i, V_j)$ に自然に作用する: $g \cdot f_{ij} = g_j f_{ij} g_i^{-1}$ ($g = (g_i)_{i=1}^r \in G$, $f_{ij} \in \text{Hom}(V_i, V_j)$). 我々は, この A_r 型のクイバー Q から得られる G の $\mathcal{L}_d(Q)$ 上の表現に注目する.

もしすべての番号 i について $G_i = GL(V_i)$ ならば $\mathcal{L}_d(Q)$ は有限個の G 軌道に分解される (P. Gabriel [1]) が, 一般にはそうではない. そこで $\mathcal{L}_d(Q)$ が有限個の G 軌道に分解されるための G と $\mathcal{L}_d(Q)$ の条件を与えた (定理 4.2).

以下, 各 V_i の基底を固定し, $\text{Hom}(V_i, V_j)$ を $\mathbb{C}$ 上の $d_j \times d_i$ 行列全体 $M(d_j, d_i)$ と同一視し, $GL(V_i) = GL(d_i)$ とみなす: $\mathcal{L}_d(Q) = \bigoplus_{i \rightarrow j \text{ in } Q} M(d_j, d_i)$. 注意 3.2 より, G の $\mathcal{L}_d(Q)$ への作用が有限個の軌道を持つことと, 矢の向きが同じ A_r 型のクイバー

$$(Q_0) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 4 \longrightarrow \cdots \longrightarrow r \end{array}$$

に対して G の $\mathcal{L}_d(Q_0)$ への作用が有限個の軌道を持つこととは同値である. そこで, 主に $(G, \mathcal{L}_d(Q_0))$ について考えていくことにする. 以下, $\mathcal{L}_d = \mathcal{L}_d(Q_0)$ と略記する.

一般に, 有限次元ベクトル空間 V に, 線型代数群 G が有理的に作用しているとする. もし V が有限個の G 軌道を持つとき (G, V) は **finite prehomogeneous vector space** (以下 F.P. と略す) と呼ばれる. G が半単純代数群で各既約成分にスカラー倍が独立に作用しているような複素数体 $\mathbb{C}$ 上の F.P. の分類は既になされている ([2], [3] 参照). そのとき最も基本的なものは A_r 型の (G, V) , つまり $G = GL(V_1) \times \cdots \times GL(V_r)$ の $V = \mathcal{L}_d(Q)$ への作用であった. そこで我々は次を目標にしたい: G が半単純代数群で, 既約成分にスカラー倍の独立な作用があるとは限らない F.P. を分類せよ.

1 準備

m と n を正の整数とし, $M(m, n)$ で複素数体 $\mathbb{C}$ 上の $m \times n$ 行列全体を表すことにする. $M(m, m)$ を $M(m)$ と略記する. $\Omega(r) = \{1, 2, \dots, r\}$ とする. $N = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ を n の分割, つまり e_i たちは正の

整数で $n = \sum_{i \in \Omega(r)} e_i$ とする. 分割 N に対応する $GL(n)$ の標準的放物型部分群を $P(N) = P(e_1, \dots, e_r)$ で表すことにする. $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ を空でない $\Omega(r)$ の部分集合で $\Phi_i \cap \Phi_j = \emptyset$ ($i \neq j$) とする. このとき $P(N)$ の部分群 $P(N; \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ を次のように定義する:

$$P(N; \Phi_1, \dots, \Phi_p) = \left\{ [A_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq r}; \begin{array}{l} A_{i,j} \in M(e_i, e_j), A_{i,j} = 0 \ (i > j), \\ \prod_{i \in \Phi_\lambda} \det A_{i,i} = 1 \text{ for } \lambda \in \Omega(p) \end{array} \right\}$$

$P(N; \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ が $SL(n)$ に含まれるための必要十分条件は, $\Phi_1 \sqcup \dots \sqcup \Phi_p = \Omega(r)$ となることである. 以下, $P_0(N) = P(N; \{1\}, \{2\}, \dots, \{r\})$ と略記する.

r 個の整数の組 $(f_1, \dots, f_r)$ で $0 \leq f_i \leq e_i$ ($i \in \Omega(r)$) かつ $\sum_{i \in \Omega(r)} f_i \leq m$ をみたすものの全体を $\mathcal{F}(m, N)$ と書く. $\Gamma = (f_1, \dots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N)$ に対して, $\Omega(r)$ の部分集合 I, J を次のように定義する: $I = I(\Gamma, N) = \{i \in \Omega(r); f_i = e_i\}$; $J = J(\Gamma, N) = \{i \in \Omega(r); 0 < f_i < e_i\}$. したがって $I \cap J = \emptyset$ であり, $i \in \Omega(r) \setminus (I \cup J)$ に対しては $f_i = 0$ である.

$\Gamma = (f_1, \dots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N)$ とする. $I \cup J \neq \emptyset$ のとき, $X_m^N(\Gamma) \in M(m, n)$ を次のようなブロック分割 $X_m^N(\Gamma) = [X_1 | \dots | X_r]$ で定める.

$$X_i = \begin{cases} [O_{e_i, f_1 + \dots + f_{i-1}} | I_{f_i} | O_{e_i, m - f_1 - \dots - f_i}] \in M(e_i, m) & (i \in I \text{ のとき}), \\ [O_{e_i, f_1 + \dots + f_{i-1}} | {}^t Z_{f_i, e_i} | O_{e_i, m - f_1 - \dots - f_i}] \in M(e_i, m) & (i \in J \text{ のとき}) \end{cases}$$

とし, $i \in \Omega(r) \setminus (I \cup J)$ となる番号 i に対しては $X_i = O_{m, e_i} \in M(m, e_i)$ とする. ただし $Z_{f_i, e_i} = [I_{f_i} | O_{f_i, e_i - f_i}] \in M(f_i, e_i)$ であり, $O_{u, v}$ は $u \times v$ 零行列, I_u は u 次の単位行列とする. $I \cup J = \emptyset$ のときは $X_m^N(\Gamma) = O_{m, n} \in M(m, n)$ とおく. $\text{rank } X_i = f_i$ だから, $\text{rank } X_m^N(\Gamma) = \sum_{i \in \Omega(r)} f_i$ となっていることに注意. 例えば $r = 4$, $I = \{3\}$, $J = \{1, 4\}$, $m = \sum_{i \in \Omega(4)} f_i$ に対して $X_m^N(\Gamma)$ は次のようになる:

$$X_m^N(\Gamma) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} I_{f_1} & O_{f_1, e_1 - f_1} & O_{f_1, e_2} & O_{f_1, e_3} & O_{f_1, e_4} \\ \hline O_{f_3, e_1} & O_{f_3, e_2} & I_{f_3} & O_{f_3, e_3} & O_{f_3, e_4} \\ \hline O_{f_4, e_1} & O_{f_4, e_2} & O_{f_4, e_3} & I_{f_4} & O_{f_4, e_4 - f_4} \end{array} \right] \in M(m, n).$$

一般に, $G = G_1 \times G_2 \subseteq GL(d_1) \times GL(d_2)$ は $V = M(d_2, d_1) \curvearrowright g \cdot v = g_2 v g_1^{-1}$ ($g = (g_1, g_2) \in G$, $v \in V$) で作用する. 以下, この (G, V) を簡単のため $\mathcal{L}(G_1, G_2)$ と書くことにする.

次の補題 1.1 と 1.2 は直接の計算で確かめられる:

補題 1.1. $m \leq n$ とし, $j_1 < j_2 < \dots < j_m$ となるような m 個の元 $j_1, j_2, \dots, j_m \in \Omega(n)$ を決めておく. このとき $\varphi_1: M(m, n) \rightarrow M(m)$ を $[x_1 | \dots | x_n] \in M(m, n)$ に対し $[x_1 | \dots | x_n] \mapsto [x_{j_1} | \dots | x_{j_m}]$ で, 写像 $\varphi_2: M(n) \rightarrow M(m)$ を $[y_{i,j}] \in M(n)$ に対し $[y_{i,j}] \mapsto [y_{j_k, j_l}]_{1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq m}$ で定める. このとき, 次が成り立つ:

- (1) $A \in M(m)$ と $X \in M(m, n)$ に対して $\varphi_1(AX) = A \varphi_1(X)$ となる.
- (2) $B \in M(n)$ と, $x_j = O_{m, 1}$ ($j \neq j_1, \dots, j_m$) であるような $X = [x_1 | \dots | x_n] \in M(m, n)$ に対して, $\varphi_1(XB) = \varphi_1(X) \varphi_2(B)$ となる.

補題 1.2. 零でない任意の $X' \in M(m, n)$ に対して,

$$(1.1) \quad AX'B^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} I_u & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right],$$

となるような $A \in GL(m)$ と $B \in SL(n)$ が存在する. ただし $u = \text{rank } X'$ である. つまり, $\mathcal{L}(SL(n), GL(m))$ の零でない各軌道は (1.1) のような形の元を含む. したがってそれは F.P. であり, もちろん $\mathcal{L}(GL(n), GL(m))$ も F.P. である.

補題 1.3. m と n を正の整数とし, $N = (e_1, \dots, e_r)$ を n の分割とする. このとき $\mathcal{L}(P_0(N), GL(m))$ の各軌道は $X_m^N(\Gamma)$ の形の元を含む.

証明. まず, $O_{m,n}$ を含む軌道は $\{O_{m,n}\}$ であり, $O_{m,n}$ は $\Gamma = (\overbrace{0, \dots, 0}^r)$ を用いて $O_{m,n} = X_m^N(\Gamma)$ と書けることに注意する. n についての帰納法で証明する. $n = 1$ のとき, 零でない $X \in M(m, 1)$ は $\text{rank } X = 1$ の列ベクトルだから, $GL(m)$ の作用により, X は ${}^t[1, \overbrace{0, \dots, 0}^{m-1}] = X_m^N(\Gamma)$ ($N = \Gamma = (1)$) に移される. そこで $1 \leq k < n$ に対して主張が成り立つとする. $X \in M(m, n)$ を $X = [X'|X'']$ ($X' \in M(m, e_1)$, $X'' \in M(m, n - e_1)$) と表しておく.

$X' = 0$ のとき, 帰納法の仮定により $A \in GL(m)$, $B \in P_0(N')$, $\Gamma' = (f_2, \dots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N')$ があって $AX''B^{-1} = X_m^{N'}(\Gamma')$ となる. ただし $N' = (e_2, \dots, e_r)$ である. このとき $B_1 = \text{diag}(I_{e_1}, B) \in P_0(N)$ であり, $A[0|X'']B_1^{-1} = [0|X_m^{N'}(\Gamma')] = X_m^N(\Gamma)$ ($\Gamma = (0, f_2, \dots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N)$) となる.

次に $\text{rank } X' = m$ の場合を考える. 補題 1.2 により, $AX'B^{-1} = [I_m|0]$ となるような $A \in GL(m)$ と $B \in SL(e_1)$ が存在する. $\text{rank}[\overbrace{I_m}^{e_1}|0] = m$ だから, $[I_m|0]B_0 + AX'' = O_{m,n-e_1}$ となるような $B_0 \in M(e_1, n - e_1)$ を選ぶことができる. このとき

$$B_1 = \left[\begin{array}{c|c} B & -B_0 \\ \hline O_{n-e_1, e_1} & I_{n-e_1} \end{array} \right]$$

は $P_0(N)$ の元であり, $A[X'|X'']B_1^{-1} = [\overbrace{I_m}^{e_1}|0|0] = X_m^N(\Gamma)$ ($\Gamma = (m, \overbrace{0, \dots, 0}^{r-1}) \in \mathcal{F}(m, N)$) となる.

$0 < \text{rank } X' = u < m$ のとき, 補題 1.2 より X' に対して, (1.1) をみたす $A \in GL(m)$ と $B \in SL(e_1)$ が存在する. $AX'' = {}^t[{}^tX_1|{}^tX_2]$ ($X_1 \in M(u, n - e_1)$, $X_2 \in M(m - u, n - e_1)$) と表しておく. $\text{rank}[\overbrace{I_u}^{e_1}|0] = u$ だから, $[I_u|0]B_0 + X_1 = O_{u,n-e_1}$ となるような $B_0 \in M(e_1, n - e_1)$ が選べる. 一方, 帰納法の仮定により $A_1X_2B_1^{-1} = X_{m-u}^{N'}(\Gamma')$, $N' = (e_2, \dots, e_r)$ となるような $A_1 \in GL(m - u)$, $B_1 \in P_0(N')$, $\Gamma' = (f_2, \dots, f_r) \in \mathcal{F}(m - u, N')$ が存在する. そこで

$$A_2 = \left[\begin{array}{c|c} I_u & O_{u,m-u} \\ \hline O_{m-u,u} & A_1 \end{array} \right] A \in GL(m), \quad B_2 = \left[\begin{array}{c|c} B & -B_0 \\ \hline O_{n-e_1, e_1} & B_1 \end{array} \right] \in P_0(N),$$

とおくと

$$A_2[X'|X'']B_2^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} I_u | 0 & O_{u,n-e_1} \\ \hline O_{m-u,e_1} & X_{m-u}^{N'}(\Gamma') \end{array} \right] = X_m^N(\Gamma)$$

$(\Gamma = (u, f_2, \dots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N))$ となる. ■

以下, $D_u(\alpha) = \text{diag}(\alpha, 1, \dots, 1) \in GL(u)$ と略記する.

注意 1.4. (1) 任意の空でない $\Omega(r)$ の部分集合 $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ で, $\Phi_i \cap \Phi_j = \emptyset$ ($i \neq j$) となるものに対して $P_0(N) \subseteq P = P(N; \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ だから, $\mathcal{L}(P, GL(m))$ の各軌道は $X_m^N(\Gamma)$ という形の元を含む. また $\mathcal{F}(m, N)$ は有限集合だから $\mathcal{L}(P, GL(m))$ は有限個の軌道を持つ; つまり F.P. である. したがって $\mathcal{L}(P(N), GL(m))$ も F.P. である.

(2) 各 $A \in GL(m)$ に対して $A = A \cdot D_m(\det A)^{-1} \cdot D_m(\det A)$ と表せるから, $\mathcal{L}(P, SL(m))$ の各軌道は $D_m(\alpha)X_m^N(\Gamma)$ ($\alpha \in K^\times$) という形の元を含むことがわかる.

(3) 適当な対角行列 $D \in P(N)$ を選び $D_m(\alpha)X_m^N(\Gamma) = X_m^N(\Gamma) \cdot D$ とできるので $\mathcal{L}(P(N), SL(m))$ は F.P. である. とくに $N = (n)$ の場合を考えれば $\mathcal{L}(GL(n), SL(m))$ は F.P. であることがわかる. □

$N = (e_1, \dots, e_r)$ と $P = P(N; \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ に対して

$$S(P) = \left\{ u; \text{空でない } A \subseteq \Omega(p) \text{ で } u = \sum_{\lambda \in A} \sum_{i \in \Phi_\lambda} e_i \text{ と表せる} \right\}$$

と定義する. $P = P(N)$ のときは $S(P) = \emptyset$ とする. この定義から次の補題は明らかである:

補題 1.5. $N = (e_1, \dots, e_r)$ を n の分割とし, $P = P(N; \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ とする. $\Phi_{p+1} = \Omega(r) \setminus \bigcup_{\lambda \in \Omega(p)} \Phi_\lambda$ が空でないときは $P' = P \cap SL(n) = P(N; \Phi_1, \dots, \Phi_p, \Phi_{p+1})$ とおき, $\Phi_{p+1} = \emptyset$ のとき, つまり $P \subseteq SL(n)$ のときは $P' = P$ とする. このとき $S(P') = S(P) \cup \{n - u; u \in S(P) \text{ かつ } u < n\} \cup \{n\}$ となる.

命題 1.6. $N = (e_1, \dots, e_r)$ とし, $P = P(N; \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ とする. このとき $\mathcal{L}(P, SL(m))$ が F.P. でないための必要十分条件は, $m \in S(P)$ となることである.

証明. まず $\mathcal{L}(P, SL(m))$ が F.P. でないと仮定する. 注意 1.4 (2) により, 各 $X \in M(m, n)$ は適当な $\Gamma' \in \mathcal{F}(m, N)$ と $\alpha' \in K^\times$ を用いて $D_m(\alpha')X_m^N(\Gamma')$ と表せる. $\mathcal{F}(m, N)$ は有限集合ゆえ, $X_\alpha = D_m(\alpha)X_m^N(\Gamma)$ と $X_m^N(\Gamma)$ が同じ軌道にないような $\Gamma \in \mathcal{F}(m, N)$ と $\alpha \in K^\times$ が存在する. このとき, 次が成り立っている:

- (a) $m = \text{rank } X_m^N(\Gamma)$,
- (b) $J = J(\Gamma, N) = \emptyset$,
- (c) もし $\Phi_\lambda \cap I \neq \emptyset$ ならば, $\Phi_\lambda \cap C = \emptyset$ である. ここで $I = I(\Gamma, N)$, $C = \Omega(r) \setminus (I \cup J) = \Omega(r) \setminus I$ とする.
- (d) さらに $I = \bigcup_{\lambda \in A} \Phi_\lambda$, $A = \{\lambda \in \Omega(p); \Phi_\lambda \cap I \neq \emptyset\}$ である.

実際, $SL(m)$ の作用を考えると $m = \sum_{i \in \Omega(r)} f_i = \text{rank } X_m^N(\Gamma)$ でなければいけない. もし $J \neq \emptyset$ で, $i \in J$

とすると, $SL(m)$ の作用, つまり $\text{diag}(\overbrace{\alpha^{-1}, 1, \dots, 1}^{f_1 + \dots + f_{i-1}}, \overbrace{\alpha, 1, \dots, 1}^{f_i + \dots + f_r})$ の作用により, X_α は

$$(1.2) \quad \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^{f_1 + \dots + f_{i-1}}, \overbrace{\alpha, 1, \dots, 1}^{f_i + \dots + f_r}) \cdot X_m^N(\Gamma) = X_m^N(\Gamma) \cdot R_i, \quad R_i = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^{e_1 + \dots + e_{i-1}}, \overbrace{\alpha, 1, \dots, 1}^{e_i + \dots + e_r})$$

に移される. いま $i \in J$ だから, P の作用で (1.2) が $X_m^N(\Gamma)$ に移されることになるがこれは矛盾である. したがって (b) が成り立ち, $m = \sum_{i \in I} f_i$ となる. もし, ある $\lambda \in \Omega(p)$ に対して $\Phi_\lambda \cap I \neq \emptyset$ かつ $\Phi_\lambda \cap C \neq \emptyset$

だったとしよう. $i \in \Phi_\lambda \cap I$ を選び, X_α を (1.2) へ移す. $X_\alpha = [\overbrace{y_1}^{e_1} | \cdots | \overbrace{y_r}^{e_r}]$ と表しておく. $\Phi_\lambda \cap C \neq \emptyset$ だから, $y_j = O_{m, e_j}$ となる番号 $j \in \Phi_\lambda \cap C$ がある. したがって, P の作用により (1.2) と $X_m^N(\Gamma)$ は同じ軌道に属していることになるが, それは矛盾である. したがって (c) が成り立ち, $I \supseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda$ であることがわかる. もし $i \in I \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda$ のときは, 同様に, X_α を (1.2) に移してみる. このとき $R_i \in P$ だから, 仮定に矛盾する. したがって $m = \sum_{i \in I} f_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in \Phi_\lambda} e_i$, つまり $m \in S(P)$ であることがわかった.

逆に, $\emptyset \subsetneq \Lambda \subseteq \Omega(p)$ に対して $m = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in \Phi_\lambda} e_i$ ($\leq n$) となっているとしよう. このとき $\Gamma = (f_1, \dots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N)$ を次のように定義する: $i \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda$ のときは $f_i = e_i$ とし, それ以外の番号については $f_i = 0$ とする. $\alpha \in K^\times$ に対し $X_\alpha = D_m(\alpha) X_m^N(\Gamma)$ とおき, $X_\alpha = [x_1 | \cdots | x_n]$ と表す. ここで x_j は j 番めの列ベクトルである. $\text{rank } X_\alpha = m$ だから, $\text{rank}[x_{j_1} | \cdots | x_{j_m}] = m$ となるような m 個の列ベクトル $x_{j_1}, \dots, x_{j_m}$ ($j_1 < \cdots < j_m$) が存在する. もし X_α と X_β が同じ軌道にあったとすると, つまり $X_\beta = A X_\alpha B^{-1}$ となるような $A \in SL(m)$ と $B \in P$ が存在したとする. 補題 1.1 をこれに適用すると

$$(1.3) \quad \varphi_1(X_\beta) = \varphi_1(A X_\alpha B^{-1}) = A \varphi_1(X_\alpha B^{-1}) = A \varphi_1(X_\alpha) \varphi_2(B^{-1})$$

となる. $m = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in \Phi_\lambda} e_i$ だから, $\varphi_2(B^{-1}) \in SL(m)$ となっていることに注意する. (1.3) の行列式をとれば $\alpha = \beta$ となる. したがって $\mathcal{L}(P, SL(m))$ は無限個の軌道を持ち, F.P. ではない. ■

注意 1.7. (1) $N = (n)$ の場合を考えれば, 次のことがわかる: $\mathcal{L}(SL(n), SL(m))$ が F.P. でないための必要十分条件は, $n = m$ となることである.

(2) 命題 1.6 の証明から次のことがわかる: $\mathcal{L}(P, SL(m))$ が F.P. であるための必要十分条件は, 任意の $\Gamma \in \mathcal{F}(m, N)$ と $\alpha \in K^\times$ に対して, $D_m(\alpha) X_m^N(\Gamma)$ と $X_m^N(\Gamma)$ が同じ軌道に属することである. つまり, もし $\mathcal{L}(P, SL(m))$ が F.P. ならば各軌道は $X_m^N(\Gamma)$ という形の元を含む.

命題 1.8. m と n を正の整数とし, $N = (e_1, \dots, e_r)$ を n の分割とする. $P = P(N)$ または $P(N; \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ とし, $G = GL(m)$ または $SL(m)$ とする. もし $m \notin S(P)$ または $G = GL(m)$ ならば, $\mathcal{L}(P, G)$ は F.P. であり, 集合 $\{X_m^N(\Gamma)\}_{\Gamma \in \mathcal{F}(m, N)}$ がその軌道の完全代表系である.

証明. 命題 1.6, 注意 1.4, 1.7 より $m \notin S(P)$ または $G = GL(m)$ のとき, $\mathcal{L}(P, G)$ は F.P. であり各軌道が $X_m^N(\Gamma)$ という形の元を含んでいることがわかっている. そこで, $\Gamma' \neq \Gamma$ ならば $X_m^N(\Gamma')$ は $X_m^N(\Gamma)$ と同じ軌道上にはないことを示す. $\Gamma' = (f'_1, \dots, f'_r)$, $\Gamma = (f_1, \dots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N)$ とする. $X' = X_m^N(\Gamma')$ と $X = X_m^N(\Gamma)$ が同じ軌道上にあったとすると, つまり $X' = A X B^{-1}$ となるような $A \in G$ と $B \in P$ が存在したとする. $X' = [X'_1 | \cdots | X'_r]$, $X = [X_1 | \cdots | X_r]$ ($X'_i, X_i \in M(m, e_i); i \in \Omega(r)$) と表すと, 各 $k \in \Omega(r)$ に対して $[X'_1 | \cdots | X'_k] = A [X_1 | \cdots | X_k] B_k^{-1}$ となる. ただし $B = [B_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq r}$ ($B_{i,j} \in M(e_i, e_j)$) と表し, $B_k = [B_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq k} \in P(e_1, \dots, e_k)$ ($k \in \Omega(r)$) とおいた. $B \in P$ だから各 B_k は正則行列である. したがって各 $k \in \Omega(r)$ に対して $\text{rank}[X'_1 | \cdots | X'_k] = \text{rank}[X_1 | \cdots | X_k]$ であり, $\sum_{i=1}^k f'_i = \sum_{i=1}^k f_i$ である. つまり $\Gamma' = \Gamma$ となる. ■

2 固定部分群の考察

一般に, 群 G が V へ作用しているとき $\{g \in G; g \cdot v = v\}$ を, (G, V) の $v \in V$ における G の固定部分群と呼ぶ. また, 部分群 $H \subseteq G_1 \times \cdots \times G_r$ の G_i -part とは, 自然な全射 $\pi_i: G_1 \times \cdots \times G_r \rightarrow G_i$ による H の像 $\pi_i(H)$ のことである.

r 個の非負整数の組 $\Gamma = (f_1, \dots, f_r)$ に対して $\text{supp } \Gamma = \{i \in \Omega(r); f_i \neq 0\}$ とおく. $\text{supp } \Gamma \neq \emptyset$ のとき, つまり $\Gamma \neq \overbrace{(0, \dots, 0)}^r$ のとき, 写像 $\sigma = \sigma_\Gamma: \Omega(l) \rightarrow \Omega(r)$ を $k \mapsto i_k$ で定める. ただし $l = \#\text{supp } \Gamma$ であり, $\text{supp } \Gamma = \{i_1, \dots, i_l\}$ ($i_1 < \cdots < i_l$) とする. これは単射である. Γ の正の成分を同じ順番でならべた l 個の正整数の組を Γ^σ で表す: $\Gamma^\sigma = (f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(l)})$.

$N = (n_1, \dots, n_r)$ と $M = (m_1, \dots, m_l)$ に対して準同型 $\psi^{N,M}: P(N) \times P(M) \rightarrow (K^\times)^r \times (K^\times)^l$ を

$$([A_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq r}, [B_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq l}) \mapsto (\det A_{1,1}, \dots, \det A_{r,r}, \det B_{1,1}, \dots, \det B_{l,l}),$$

で定義する. ただし $A_{i,j} \in M(n_i, n_j)$ であり, $B_{i,j} \in M(m_i, m_j)$ とする. $\psi^{N,M}$ は全射であり, 核は $P_0(N) \times P_0(M)$ である.

命題 2.1. n と m を正の整数とし, $N = (e_1, \dots, e_r)$ を n の分割, $\Gamma = (f_1, \dots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N)$ とする. $\tilde{H}|_{GL(m)}$ を $\mathcal{L}(P(N), GL(m))$ の $X = X_m^N(\Gamma)$ における固定部分群 $\tilde{H}$ の $GL(m)$ -part とする. このとき $\tilde{H}|_{GL(m)} = P(\tilde{\Gamma}^\sigma)$ であり, $\psi(\tilde{H}) = \{(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_l); x_i = y_{\sigma^{-1}(i)} \text{ for } i \in I(\Gamma, N)\}$ となる. ただし $\tilde{\Gamma} = \left(f_1, \dots, f_r, m - \sum_{i \in \Omega(r)} f_i\right)$, $l = \#\text{supp } \tilde{\Gamma}$, $\sigma = \sigma_{\tilde{\Gamma}}$, $\psi = \psi^{N, \tilde{\Gamma}^\sigma}$ とする.

証明. もし $X = O_{m,n}$ ならば $\tilde{H} = P(N) \times GL(m)$, $\psi(\tilde{H}) = (K^\times)^r \times K^\times$ であり $\Gamma = \overbrace{(0, \dots, 0)}^r$, $\tilde{\Gamma} = \overbrace{(0, \dots, 0, m)}^r$, $l = \#\text{supp } \tilde{\Gamma} = 1$, $\tilde{\Gamma}^\sigma = (m)$, $I(\Gamma, N) = \emptyset$ だから主張は成り立つ. そこで $X \neq O_{m,n}$ のときを考える. n についての帰納法で証明する. $n = 1$ のとき $N = \Gamma = (1)$ である. $I = \{1\}$ ゆえ $X = {}^t[1, 0, \dots, 0] \in M(m, 1)$, したがって明らかに主張が成り立つ. そこで n より小さい正整数に対して主張が成り立つと仮定する.

まず $m > \text{rank } X$ の場合は $m = \text{rank } X$ の場合に帰着されることを示そう: $m > \text{rank } X$ とすると $X = {}^t[X' | 0]$ ($X' = X_{m-f_0}^N(\Gamma) \in M(m-f_0, n)$, $f_0 = m - \text{rank } X$) と書けるので, 固定部分群は

$$\tilde{H} = \left\{ \left(A, \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline O_{f_0, m-f_0} & B_3 \end{array} \right] \right); \begin{array}{l} (A, B_1) \in H', B_3 \in GL(f_0), \\ B_2 \in M(m-f_0, f_0) \end{array} \right\},$$

で与えられる. ただし H' は $\mathcal{L}(P(N), GL(m-f_0))$ の X' における固定部分群である. $\text{rank } X' = m - f_0$ だから, $m = \text{rank } X$ の場合が示されれば十分である. そこで $X = X_m^N(\Gamma)$ の階数が m , つまり $m = \sum_{i \in \Omega(r)} f_i$ と仮定する. このとき $\text{supp } \Gamma = \text{supp } \tilde{\Gamma}$ だから, $k \in \Omega(\#\text{supp } \Gamma)$ に対し $\sigma_\Gamma(k) = \sigma_{\tilde{\Gamma}}(k)$ で $\Gamma^{\sigma_\Gamma} = \tilde{\Gamma}^{\sigma_{\tilde{\Gamma}}}$ となっていることに注意.

まず $f_r > 0$ かつ $l = \# \text{supp } \Gamma \geq 2$ の場合.

$$X = \left[\begin{array}{c|c} X_1 & O_{m-f_r, e_r} \\ \hline O_{f_r, n-e_r} & X_2 \end{array} \right], \quad \left(\begin{array}{l} X_1 = X_{m-f_r}^{N'}(\Gamma') \in M(m-f_r, n-e_r), \\ X_2 = X_{f_r}^{(e_r)}((f_r)) \in M(f_r, e_r) \end{array} \right)$$

($N' = (e_1, \dots, e_{r-1})$, $\Gamma' = (f_1, \dots, f_{r-1}) \in \mathcal{F}(m-f_r, N')$) と表すと

$$\tilde{H} = \left\{ \left(\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline O_{e_r, n-e_r} & A_3 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline O_{f_r, m-f_r} & B_3 \end{array} \right] \right); \begin{array}{l} (A_1, B_1) \in H_1, A_2 \in M(n-e_r, e_r), \\ (A_3, B_3) \in H_2, B_2 \in M(m-f_r, f_r), \\ -X_1 A_2 + B_2 X_2 = O_{m-f_r, e_r} \end{array} \right\}$$

である. ここで H_1 (resp. H_2) は $\mathcal{L}(P(N'), GL(m-f_r))$ の X_1 における (resp. $\mathcal{L}(P(e_r), GL(f_r))$ の X_2 における) 固定部分群である. $\text{rank } X_1 = m-f_r$ と帰納法の仮定により, $H_1|_{GL(m-f_r)} = P(\Gamma'^\rho)$ であり

$$\psi^{N', \Gamma'^\rho}(H_1) = \{(x_1, \dots, x_{r-1}, y_1, \dots, y_{l-1}); x_i = y_{\rho^{-1}(i)} \text{ for } i \in I(\Gamma, N), \text{ かつ } i < r\}$$

であることがわかる. ここで $l = \# \text{supp } \Gamma = \# \text{supp } \Gamma' + 1$, $\rho = \sigma_{\Gamma'}$ である. 一方, $H_2|_{GL(f_r)} = P(f_r) = GL(f_r)$ であり, $f_r = e_r$ のとき $\psi^{(e_r), (f_r)}(H_2) = \{(x_r, y_l); x_r = y_l\}$, $f_r < e_r$ のときは $\psi^{(e_r), (f_r)}(H_2) = \{(x_r, y_l); x_r, y_l \in K^\times\}$ である. $\text{rank } X_1 = m-f_r$ だから, 任意の $B_2 \in M(m-f_r, f_r)$ に対して, $A_2 \in M(n-e_r, e_r)$ を $-X_1 A_2 + B_2 X_2 = O_{m-f_r, e_r}$ をみたすように選べる. 各 $k \in \Omega(l-1)$ に対し $\sigma(k) = \rho(k)$ で $\sigma(l) = r$ だから, 主張が成り立つ.

$f_r > 0$ かつ $l = \# \text{supp } \Gamma = 1$ の場合. このとき $m = f_r$ であり $X = [0|X']$ ($X' = X_m^{(e_r)}((f_r)) \in M(m, e_r)$) である. したがって

$$\tilde{H} = \left\{ \left(\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline O_{e_r, n-e_r} & A_3 \end{array} \right], B \right); \begin{array}{l} (A_3, B) \in H', A_1 \in P(N'), \\ A_2 \in M(n-e_r, e_r) \end{array} \right\}$$

である. ここで $N' = (e_1, \dots, e_{r-1})$ であり, H' は $\mathcal{L}(P(e_r), GL(m))$ の X' における固定部分群である. したがって $\tilde{H}|_{GL(m)} = H'|_{GL(m)} = GL(m) = P(f_r)$ であり, $f_r = e_r$ のときは $\psi^{(e_r), (f_r)}(H') = \{(x_r, y_1); x_r = y_1\}$, $f_r < e_r$ のときは $\psi^{(e_r), (f_r)}(H') = \{(x_r, y_1); x_r, y_1 \in K^\times\}$ である. $\sigma(1) = r$ だからこの場合も主張が成り立つことがわかる.

$f_r = 0$ のときは $X = [X'|0]$ ($X' = X_m^{N'}(\Gamma')$, $N' = (e_1, \dots, e_{r-1})$, $\Gamma' = (f_1, \dots, f_{r-1}) \in \mathcal{F}(m, N')$) と表せる. このとき H' を $\mathcal{L}(P(N'), GL(m))$ の X' における固定部分群とすると

$$\tilde{H} = \left\{ \left(\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline O_{e_r, n-e_r} & A_3 \end{array} \right], B \right); \begin{array}{l} (A_1, B) \in H', A_3 \in GL(e_r), \\ A_2 \in M(n-e_r, e_r), X' A_2 = 0 \end{array} \right\}$$

となる. $\tilde{H}|_{GL(m)} = H'|_{GL(m)}$ だから, 帰納法の仮定により n のときも主張が成り立つことがわかる. ■

命題 2.2. $n, m, N, \Gamma, \tilde{\Gamma}, \sigma, \psi$ は命題 2.1 と同じとする. $P = P(N; \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ とし, $S = \{d \in \Omega(p); \Phi_d \subseteq I(\Gamma, N)\}$ とおく. このとき, $\mathcal{L}(P, GL(m))$ の $X = X_m^N(\Gamma)$ における固定部分群 H の $GL(m)$ -part $H|_{GL(m)}$ は, 次で与えられる: $S = \emptyset$ のとき $H|_{GL(m)} = P(\tilde{\Gamma}^\sigma)$. $S \neq \emptyset$ のときは $H|_{GL(m)} = P(\tilde{\Gamma}^\sigma; \Psi_1, \dots, \Psi_q)$ である. ここで $S = \{d_1, \dots, d_q\}$ ($d_1 < \dots < d_q$) とし, $\mu \in \Omega(q)$ に対し $\Psi_\mu = \sigma^{-1}(\Phi_{d_\mu})$

証明. $\tilde{H}$ を $\mathcal{L}(P(N), GL(m))$ の X における固定部分群とすると $H = \tilde{H} \cap (P \times P(\tilde{\Gamma}^\sigma))$ かつ $\psi(H) = \psi(\tilde{H}) \cap \psi(P \times P(\tilde{\Gamma}^\sigma))$ である. 実際, 命題 2.1 より

$$\psi(\tilde{H}) \cap \psi(P \times P(\tilde{\Gamma}^\sigma)) = \left\{ (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_l); \begin{array}{l} x_i = y_{\sigma^{-1}(i)} \text{ for } i \in I(\Gamma, N), \\ \prod_{i \in \Phi_\lambda} x_i = 1 \text{ for } \lambda \in \Omega(p) \end{array} \right\}$$

である. そして $x = (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_l) \in \psi(\tilde{H}) \cap \psi(P \times P(\tilde{\Gamma}^\sigma))$ に対して

$$B = \text{diag}(D_{f_{\sigma(1)}}(y_1), D_{f_{\sigma(2)}}(y_2), \dots, D_{f_{\sigma(l)}}(y_l)) \in P(\tilde{\Gamma}^\sigma)$$

とし $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_r) \in P$ と定める. ここで $i \in J(\Gamma, N)$ に対して

$$A_i = \text{diag}(y_{\sigma^{-1}(i)}, 1, \dots, 1, x_i y_{\sigma^{-1}(i)}^{-1}) \in GL(e_i)$$

とし, その他の i については $A_i = D_{e_i}(x_i) \in GL(e_i)$ とおく. すると $(A, B) \in H$ で $\psi(A, B) = x$ がわかる. $\tau: P(N) \times P(\tilde{\Gamma}^\sigma) \rightarrow P(\tilde{\Gamma}^\sigma)$ と $\pi: (K^\times)^r \times (K^\times)^l \rightarrow (K^\times)^l$ を標準的な全射とし, $\psi': P(\tilde{\Gamma}^\sigma) \rightarrow (K^\times)^l$ を $\psi' \circ \tau = \pi \circ \psi$ をみたすような全射準同型とする. 各 $\lambda \in \Omega(p)$ に対して $\prod_{i \in \Phi_\lambda \cap I} y_{\sigma^{-1}(i)} \times \prod_{i \in \Phi_\lambda \cap (\Omega(r) \setminus I)} x_i = \prod_{i \in \Phi_\lambda} x_i = 1$ であるから,

$$\begin{aligned} \psi'(H|_{GL(m)}) &= \psi' \circ \tau(H) \\ &= \pi \circ \psi(H) = \left\{ (y_1, \dots, y_l); \prod_{i \in \Phi_d} y_{\sigma^{-1}(i)} = 1 \text{ for } d \in S \right\} \end{aligned}$$

となる. ただし添数集合 Δ が空のときは $\prod_{\delta \in \Delta}$ は 1 を表すとする. $1 \rightarrow P_0(\tilde{\Gamma}^\sigma) \hookrightarrow P(\tilde{\Gamma}^\sigma) \xrightarrow{\psi'} (K^\times)^l \rightarrow 1$ は完全列だから, ψ' は $P(\tilde{\Gamma}^\sigma)$ の $P_0(\tilde{\Gamma}^\sigma)$ を含む部分群と $(K^\times)^l$ の部分群との間の標準的な全単射を誘導する. 条件 $\prod_{i \in \Phi_d} y_{\sigma^{-1}(i)} = 1$ ($d \in S$) は $\prod_{i \in \Psi_\mu} y_i = 1$ ($\mu \in \Omega(q)$) と書き直せることに注意する. $H|_{GL(m)}$ は $P(\tilde{\Gamma}^\sigma)$ の $P_0(\tilde{\Gamma}^\sigma)$ を含む部分群だから, 主張が成り立つことがわかる. ■

系 2.3. $n, m, N, \Gamma, \tilde{\Gamma}, \sigma, \psi, P, S, \Psi_\mu$ は命題 2.1, 2.2 と同じとする. $\tilde{H}'|_{SL(m)}$ (resp. $H'|_{SL(m)}$) を $\mathcal{L}(P(N), SL(m))$ (resp. $\mathcal{L}(P, SL(m))$) の $X_m^N(\Gamma)$ における固定部分群 $\tilde{H}'$ (resp. H') の $SL(m)$ -part とする. このとき次が成り立つ:

- (1) $\tilde{H}'|_{SL(m)} = P(\tilde{\Gamma}^\sigma) \cap SL(m) = P(\tilde{\Gamma}^\sigma; \Psi_1)$, ただし $\Psi_1 = \Omega(l)$.
- (2) $S = \emptyset$ のとき $H'|_{SL(m)} = \tilde{H}'|_{SL(m)}$; $S \neq \emptyset$ かつ $\Psi_{q+1} = \Omega(l) \setminus \bigcup_{\mu \in \Omega(q)} \Psi_\mu$ が空でないとき $H'|_{SL(m)} = P(\tilde{\Gamma}^\sigma; \Psi_1, \dots, \Psi_q) \cap SL(m) = P(\tilde{\Gamma}^\sigma; \Psi_1, \dots, \Psi_q, \Psi_{q+1})$; そして $S \neq \emptyset$ かつ $\Psi_{q+1} = \emptyset$ のとき $H'|_{SL(m)} = P(\tilde{\Gamma}^\sigma; \Psi_1, \dots, \Psi_q)$ となる.

証明. $\tilde{H}'|_{SL(m)} = \tilde{H}|_{GL(m)} \cap SL(m)$, そして $H'|_{SL(m)} = H|_{GL(m)} \cap SL(m)$ だから主張が成り立つことが

系 2.4. 記号は命題 2.2, 系 2.3 と同様とする. このとき $\mathcal{S}(H|_{GL(m)}) \subseteq \{u \in \mathcal{S}(P); u \leq m\}$ であり, $\mathcal{S}(H'|_{SL(m)}) \subseteq \{u \in \mathcal{S}(P); u \leq m\} \cup \{m - u; u \in \mathcal{S}(P), u < m\} \cup \{m\}$ である.

証明. もし $S = \emptyset$ なら, $H|_{GL(m)} = P(\tilde{\Gamma}^\sigma)$ だから定義より $\mathcal{S}(H|_{GL(m)}) = \emptyset$ となる. $S \neq \emptyset$ のとき, $u \in \mathcal{S}(H|_{GL(m)})$ とし, 空でない $\Delta \subseteq \Omega(q)$ に対して $u = \sum_{\mu \in \Delta} \sum_{t \in \Psi_\mu} f_{\sigma(t)}$ とする. $\Psi_\mu = \sigma^{-1}(\Phi_{d_\mu})$ であり, $\Phi_{d_\mu} \subseteq I(\Gamma, N)$ だから, このとき $u = \sum_{\mu \in \Delta} \sum_{i \in \Phi_{d_\mu}} f_i = \sum_{\mu \in \Delta} \sum_{i \in \Phi_{d_\mu}} e_i$ となる. こうして $\mathcal{S}(H|_{GL(m)})$ についての主張が得られる. $H'|_{SL(m)} = H|_{GL(m)} \cap SL(m)$ については, 補題 1.5 より, $\mathcal{S}(H'|_{SL(m)})$ についての主張から得られる. ■

注意 2.5. 記号は命題 2.1, 系 2.3 と同様とする. このとき $\mathcal{S}(\tilde{H}|_{GL(m)}) = \emptyset$ であり, $\mathcal{S}(\tilde{H}'|_{SL(m)}) = \{m\}$ である.

補題 2.6. $N = (e_1, \dots, e_r)$ とし, $P = P(N; \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ とする. $u \in \mathcal{S}(P)$ かつ $u < m$ と仮定する. このとき $\mathcal{S}(H|_{GL(m)})$ (resp. $\mathcal{S}(H'|_{SL(m)})$) が u (resp. u と $m - u$) を含むような $\Gamma \in \mathcal{F}(m, N)$ が存在する. ただし $H|_{GL(m)}$ (resp. $H'|_{SL(m)}$) は $\mathcal{L}(P, GL(m))$ (resp. $\mathcal{L}(P, SL(m))$) の $X_m^N(\Gamma)$ における固定部分群 H (resp. H') の $GL(m)$ -part (resp. $SL(m)$ -part) とする.

証明. $u < m$ であるような $\Lambda \subseteq \Omega(p)$ に対して $u = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in \Phi_\lambda} e_i$ とおく. 次のように $\Gamma = (f_1, \dots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N)$ を定義する: $i \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda$ のときは $f_i = e_i$ とし, それ以外の番号は $f_i = 0$ とする. $q = \#\Lambda$ とおく. このとき $I(\Gamma, N) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda$ で $S = \Lambda$ だから, 命題 2.2 より $H|_{GL(m)} = P(\tilde{\Gamma}^\sigma; \Psi_1, \dots, \Psi_q)$ となる. したがって $u = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in \Phi_\lambda} e_i = \sum_{\mu \in \Omega(q)} \sum_{t \in \Psi_\mu} f_{\sigma(t)}$ となるので $u \in \mathcal{S}(H|_{GL(m)})$ がわかる. また, $u < m$ で $H'|_{SL(m)} = H|_{GL(m)} \cap SL(m)$ だから, 補題 1.5 より $u, m - u \in \mathcal{S}(H'|_{SL(m)})$ であることもわかる. ■

3 軌道分解

補題 3.1. 群 $\rho_i: G \rightarrow GL(V_i)$ を群 G の表現とする ($i = 1, 2$). ベクトル空間の同型 $\tau: V_1 \simeq V_2$ と群の同型 $\sigma: \rho_1(G) \simeq \rho_2(G)$ があって, 任意の $g \in G$ に対して $\tau \circ \rho_1(g) = \sigma(\rho_1(g)) \circ \tau$ となるとする. このとき, $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が (G, ρ_1, V_1) の G 軌道の完全代表系ならば, $\{\tau(v_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が (G, ρ_2, V_2) の G 軌道の完全代表系である.

証明. とくに τ は単射だから, $\lambda, \mu \in \Lambda$ ($\lambda \neq \mu$) に対して $\tau(\rho_1(G)v_\lambda) \cap \tau(\rho_1(G)v_\mu) = \tau(\rho_1(G)v_\lambda \cap \rho_1(G)v_\mu) = \emptyset$ である. したがって $V_2 = \tau(V_1) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \tau(\rho_1(G)v_\lambda)$ となる. また条件より, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\tau(\rho_1(G)v_\lambda) = \rho_2(G)\tau(v_\lambda)$ となるので, $V_2 = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \rho_2(G)\tau(v_\lambda)$ である. ■

補題 3.1 の条件をみたす (G, ρ_1, V_1) と (G, ρ_2, V_2) は 3 つ組として同値と呼ばれる.

注意 3.2. 次の事実が知られている (V. Pyasetskii [5]): H を代数群とする. $\rho^*: H \rightarrow GL(V^*)$ を $\rho: H \rightarrow GL(V)$ の双対表現とする. このとき (H, ρ, V) が F.P. であることと, (H, ρ^*, V^*) が F.P. であることは同値である. したがって $(H, \rho_1^{(*)} \oplus \dots \oplus \rho_l^{(*)}, V_1^{(*)} \oplus \dots \oplus V_l^{(*)})$ が F.P. であることと $(H, \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_l, V_1 \oplus \dots \oplus V_l)$

が F.P. であることとは同値である。ここで $\rho_i^{(*)}$ (resp. $V_i^{(*)}$) は ρ_i (resp. V_i) またはその双対 ρ_i^* (resp. V_i^*) を表すものとする。

G の $\mathcal{L}_d(Q) = \bigoplus_{i \rightarrow j \text{ in } Q} M(d_j, d_i)$ への作用は、 G の $M(d_j, d_i)$ ($i \rightarrow j$ in Q) 上の表現 $\rho_Q^{i,j}$ の直和として与えられている。そこで G の $\mathcal{L}_d(Q)$ 上の表現 $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_{r-1}$ を次のように定義する： $\rho_i = \rho_Q^{i,j}$ ($i < j$ のとき)； $\rho_i = (\rho_Q^{j,i})^*$ ($j > i$ のとき)。上述のことより $(G, \mathcal{L}_d(Q)) = (G, \bigoplus_{i \rightarrow j \text{ in } Q} \rho_Q^{i,j}, \mathcal{L}_d(Q))$ が F.P. であることと $(G, \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_{r-1}, \mathcal{L}_d(Q))$ が F.P. であることとは同値である、ただし双対基底により表現空間とその双対空間を同一視した。 $(G, \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_{r-1}, \mathcal{L}_d(Q))$ と $(G, \mathcal{L}_d(Q_0)) = (G, \bigoplus_{i=1}^{r-1} \rho_{Q_0}^{i,i+1}, \mathcal{L}_d(Q_0))$ は 3 つ組として同値だから、補題 3.1 よりそれらの F.P. 性は同じである。つまり F.P. かどうかはクイバー Q の矢の向きにはよらない。 $\square$

次の補題は、具体的な計算の方法を与える：

補題 3.3. $\rho_i : G \rightarrow GL(V_i)$ を群 G の表現とする ($i = 1, 2$)。 $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を (G, ρ_1, V_1) の G 軌道の完全代表系とし、 H_λ を $x_\lambda \in V_1$ における固定部分群とする。このとき $\{y_\mu^{(\lambda)}\}_{\mu \in \Delta}$ を $(H_\lambda, \rho_2|_{H_\lambda}, V_2)$ の H_λ 軌道の完全代表系とすると、 $\{(x_\lambda, y_\mu^{(\lambda)})_{\mu \in \Delta}; \lambda \in \Lambda\}$ が $(G, \rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ の G 軌道の完全代表系である。とくに $\rho_1 \oplus \rho_2$ が有限個の軌道を持つための必要十分条件は、 ρ_1 と各 $\rho_2|_{H_\lambda}$ ($\lambda \in \Lambda$) がいずれも有限個の軌道を持つことである。

証明. $(x_1, x_2) \in V_1 \oplus V_2$ とすると、ある $g_1 \in G$ と $\lambda \in \Lambda$ に対して $\rho_1(g_1)x_1 = x_\lambda$ となる。また $g_2 \in H_\lambda$ と $\mu \in \Delta$ があって $\rho_1(g_2)x_\lambda = x_\lambda$ かつ $\rho_2(g_2)(\rho_2(g_1)x_2) = y_\mu^{(\lambda)}$ とできる。このとき $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g_2g_1)(x_1, x_2) = (\rho_1(g_2)x_\lambda, \rho_2(g_2)(\rho_2(g_1)x_2)) = (x_\lambda, y_\mu^{(\lambda)})$ となる。一方、 $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ と $\mu, \mu' \in \Delta$ に対して $(x_\lambda, y_\mu^{(\lambda)})$ と $(x_{\lambda'}, y_{\mu'}^{(\lambda')})$ が同じ軌道上にあったとすると、ある $g \in G$ に対して $\rho_1(g)x_\lambda = x_{\lambda'}$ となるので $\lambda = \lambda'$ 。このとき $g \in H_\lambda$ で $\rho_2(g)y_\mu^{(\lambda)} = y_{\mu'}^{(\lambda)}$ だから $\mu = \mu'$ でもある。 $\blacksquare$

m と n を正の整数とし、 $N = (e_1, \dots, e_r)$ を $n = \sum_{i \in \Omega(r)} e_i$ となるような r 個の非負整数の組とする。 $\Gamma = (f_1, \dots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N)$ 、すなわち各 f_i は非負整数で $\sum_{i \in \Omega(r)} f_i \leq m$ かつ $f_i \leq e_i$ ($i \in \Omega(r)$) をみたすとする。 $l = \#\text{supp } N$ 、 $\sigma = \sigma_N$ とし、 $N^\sigma = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(l)})$ 、 $\Gamma^\sigma = (f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(l)})$ とおく。以下そのような N と Γ に対して $X_m^{N^\sigma}(\Gamma^\sigma)$ を $X_m^N(\Gamma)$ と略記する。すると命題 1.8 は次のように言い換えられる： N を r 個の非負整数の組とし、 $G = GL(m)$ または $SL(m)$ とおく。 $P = P(N^\sigma; \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ または $P = P(N^\sigma)$ とおく。ただし $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ は空でない $\Omega(\#\text{supp } N)$ の部分集合である。もし $m \notin S(P)$ または $G = GL(m)$ ならば、 $\mathcal{L}(P, G)$ の軌道の完全代表系として $\{X_m^N(\Gamma)\}_{\Gamma \in \mathcal{F}(m, N)}$ をとることができる。

$d = (d_1, \dots, d_r)$ を r 個の正整数の組とする。次の条件をみたす $r(r+1)/2$ 個の非負整数の組 $\Gamma = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq r}$ を **d-sequence** と呼ぶことにする：各 $i \in \Omega(r)$ に対して $0 \leq \gamma_{i,r} \leq \gamma_{i,r-1} \leq \cdots \leq \gamma_{i,i}$ であり、各 $s \in \Omega(r)$ に対して $\sum_{i=1}^s \gamma_{i,s} = d_s$ 。

$(\gamma_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq r}$ を **d-sequence** とする。各 $s \in \Omega(r-1)$ に対して $\Gamma_s = (\gamma_{1,s}, \gamma_{2,s}, \dots, \gamma_{s,s})$ 、 $\Gamma'_{s+1} = (\gamma_{1,s+1}, \gamma_{2,s+1}, \dots, \gamma_{s,s+1})$ とおく。**d-sequence** の条件から、各 $s \in \Omega(r-1)$ に対して $\Gamma'_{s+1} \in \mathcal{F}(d_{s+1}, \Gamma_s)$ であることがわかる。したがって $M(d_{s+1}, d_s)$ の元 $X_{d_{s+1}}^{\Gamma_s}(\Gamma'_{s+1})$ が定義でき、それを並べて $\mathcal{L}_d = M(d_2, d_1) \oplus$

$M(d_3, d_2) \oplus \cdots \oplus M(d_r, d_{r-1})$ の元 $X(\Gamma) = (X_{d_2}^{\Gamma_1}(\Gamma'_2), X_{d_3}^{\Gamma_2}(\Gamma'_3), \dots, X_{d_r}^{\Gamma_{r-1}}(\Gamma'_r))$ が得られる. $G = G_1 \times \cdots \times G_r$, ただし $G_i = GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とおく. $(G, \mathcal{L}_d)$ の $X(\Gamma)$ における固定部分群の G_r -part を $H_G(\Gamma)$ と書くことにする.

例 3.4. $d = (d_1, d_2)$ に対し, $T_1 = GL(d_1) \times GL(d_2)$, $T_2 = GL(d_1) \times SL(d_2)$, $T_3 = SL(d_1) \times GL(d_2)$, $T_4 = SL(d_1) \times SL(d_2)$ とおく. d -sequence $\Gamma = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq 2}$ に対して $\Gamma_2 = (\gamma_{12}, \gamma_{22})$, $\sigma = \sigma_{\Gamma_2}$ とおく. 命題 2.1, 2.2 と系 2.3 を $N = (d_1)$ に適用すると, 次のことがわかる: まず $d_1 \leq d_2$ の場合. $0 \leq \gamma_{12} < d_1$ のときは $H_{T_1}(\Gamma) = H_{T_3}(\Gamma) = P(\Gamma_2^\sigma)$ で, $H_{T_2}(\Gamma) = H_{T_4}(\Gamma) = P(\Gamma_2^\sigma) \cap SL(d_2)$ となる. $\gamma_{12} = d_1$ のときは $H_{T_1}(\Gamma) = P(\Gamma_2^\sigma)$ で $H_{T_2}(\Gamma) = P(\Gamma_2^\sigma) \cap SL(d_2)$ となり, $H_{T_3}(\Gamma) = P(\Gamma_2^\sigma; \Psi_1)$, $H_{T_4}(\Gamma) = P(\Gamma_2^\sigma; \Psi_1) \cap SL(d_2)$ である. ただし $\Psi_1 = \{1\}$ とする. $d_1 > d_2$ の場合には $H_{T_1}(\Gamma) = H_{T_3}(\Gamma) = P(\Gamma_2^\sigma)$ で, $H_{T_2}(\Gamma) = H_{T_4}(\Gamma) = P(\Gamma_2^\sigma) \cap SL(d_2)$ となる.

命題 3.5. $d = (d_1, \dots, d_r)$ を r 個の正整数の組とし, $G = G_1 \times \cdots \times G_r$, ただし $G_i = GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とする. このとき各 d -sequence $\Gamma = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq r}$ に対し $H_G(\Gamma) = P(\Gamma_r^\sigma)$ または $P(\Gamma_r^\sigma; \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ と表すことができる. ここで $\Gamma_r = (\gamma_{1,r}, \dots, \gamma_{r,r})$, $\sigma = \sigma_{\Gamma_r}$ であり, $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ は $\Omega(\#\text{supp } \Gamma_r)$ の空でない部分集合である.

証明. r についての帰納法で示す. 例 3.4 により $r = 2$ の場合は正しいことがわかる. そこで $r \geq 2$ で主張の成立を仮定する. $d' = (d_1, \dots, d_r, d_{r+1})$, $d = (d_1, \dots, d_r)$, $G' = G_1 \times \cdots \times G_r \times G_{r+1}$, $G = G_1 \times \cdots \times G_r$ とおく. 各 d' -sequence $\Gamma' = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq r+1}$ に対して, r 番めまでの成分を並べることで d -sequence $\Gamma = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq r}$ を得る. 帰納法の仮定より, $H_G(\Gamma) = P(\Gamma_r^\sigma)$ または $P(\Gamma_r^\sigma; \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ と表すことができる. $H_{G'}(\Gamma')$ は $\mathcal{L}(H_G(\Gamma), G_{r+1})$ の $X_{d_{r+1}}^{\Gamma_r}(\Gamma'_{r+1})$ における固定部分群の G_{r+1} -part だから, 命題 2.1, 2.2 と系 2.3 より, $H_{G'}(\Gamma') = P(\Gamma_{r+1}^{\sigma'})$ または $P(\Gamma_{r+1}^{\sigma'}; \Psi_1, \dots, \Psi_q)$ あるいは $P(\Gamma_{r+1}^{\sigma'}; \Psi_1, \dots, \Psi_q, \Psi_{q+1})$ と表せる. ここで $\Gamma_{r+1} = (\gamma_{1,r+1}, \dots, \gamma_{r,r+1}, \gamma_{r+1,r+1})$, $\sigma' = \sigma_{\Gamma_{r+1}}$ であり, $\Psi_1, \dots, \Psi_q, \Psi_{q+1}$ は $\Omega(\#\text{supp } \Gamma_{r+1})$ の空でない部分集合である. ■

定理 3.6. $d = (d_1, \dots, d_r)$ を r 個の正整数の組とし, $G = G_1 \times \cdots \times G_r$, ただし $G_i = GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とする. もし $(G, \mathcal{L}_d)$ が F.P. ならば, $\{X(\Gamma)\}_{\Gamma \in \mathcal{D}}$ が G 軌道の完全代表系である. ここで $\mathcal{D}$ は d -sequences 全体とする.

証明. r についての帰納法で示す. 命題 1.8 を $N = (d_1)$ に適用することで, $r = 2$ についての主張が得られる. そこで $r \geq 2$ で主張が成り立つと仮定する. $d' = (d_1, \dots, d_r, d_{r+1})$, $d = (d_1, \dots, d_r)$, $G' = G_1 \times \cdots \times G_r \times G_{r+1}$, $G = G_1 \times \cdots \times G_r$ とする. 各 d -sequence Γ に対し, 命題 3.5 より $H_G(\Gamma) = P(\Gamma_r^\sigma)$ または $P(\Gamma_r^\sigma; \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ と表せる. したがって命題 1.8 が $\mathcal{L}(H_G(\Gamma), G_{r+1})$ に適用できる. $\{X(\Gamma)\}_{\Gamma \in \mathcal{D}}$ は帰納法の仮定により $(G, \mathcal{L}_d)$ の完全代表系で, $\{X_{d_{r+1}}^{\Gamma_r}(\Gamma'_{r+1}); \Gamma'_{r+1} \in \mathcal{F}(d_{r+1}, \Gamma_r)\}$ は命題 1.8 より $\mathcal{L}(H_G(\Gamma), G_{r+1})$ の完全代表系だから, 補題 3.3 より

$$\left\{ \left(X(\Gamma), X_{d_{r+1}}^{\Gamma_r}(\Gamma'_{r+1}) \right)_{\Gamma'_{r+1} \in \mathcal{F}(d_{r+1}, \Gamma_r)}; \Gamma \in \mathcal{D} \right\}$$

$g^s(G', \mathcal{L}_{d'})$ の軌道の完全代表系である. $(\gamma_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq r+1}$ が d' -sequence であることと $\Gamma = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq r} \in \mathcal{D}$ かつ $(\gamma_{1,r+1}, \dots, \gamma_{r,r+1}) \in \mathcal{F}(d_{r+1}, \Gamma_r)$ かつ $\gamma_{r+1,r+1} = d_{r+1} - \sum_{i \in \Omega(r)} \gamma_{i,r+1}$ は同値であるから, $r+1$ についての主張が成り立つことがわかる. ■

4 有限個の軌道を持つための条件

$d = (d_1, \dots, d_r)$ を r 個の正整数の組とし, $G = G_1 \times \dots \times G_r$, ただし $G_i = GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とする. このとき集合 $\mathcal{N}_G(d)_1, \dots, \mathcal{N}_G(d)_r$ を次のように定義する: まず $G_1 = GL(d_1)$ のとき $\mathcal{N}_G(d)_1 = \emptyset$ とし, $G_1 = SL(d_1)$ のときは $\mathcal{N}_G(d)_1 = \{d_1\}$ とおく. 各 $s \in \Omega(r-1)$ については帰納的に定義する: $G_{s+1} = GL(d_{s+1})$ のとき $\mathcal{N}_G(d)_{s+1} = \{u \in \mathcal{N}_G(d)_s; u \leq d_{s+1}\}$ とし, $G_{s+1} = SL(d_{s+1})$ のときは $\mathcal{N}_G(d)_{s+1} = \{u \in \mathcal{N}_G(d)_s; u \leq d_{s+1}\} \cup \{d_{s+1} - u; u \in \mathcal{N}_G(d)_s, u < d_{s+1}\} \cup \{d_{s+1}\}$ とおく.

命題 4.1. $d = (d_1, \dots, d_r)$ を r 個の正整数の組とし, $G = G_1 \times \dots \times G_r$, ただし $G_i = GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とする. $\mathcal{D}$ を d -sequences 全体の集合とする. このとき $\bigcup_{\Gamma \in \mathcal{D}} \mathcal{S}(H_G(\Gamma)) = \mathcal{N}_G(d)_r$ が成り立つ.

証明. r についての帰納法で示す. $r=2$ のとき, 例 3.4 で求めた各 $H_{T_i}(\Gamma)$ を見ると主張の成り立つことがわかる. そこで $r \geq 2$ で主張の成立を仮定する. $d' = (d_1, \dots, d_r, d_{r+1})$, $d = (d_1, \dots, d_r)$, $G' = G_1 \times \dots \times G_r \times G_{r+1}$, $G = G_1 \times \dots \times G_r$ とおく. $\Gamma' = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq r+1}$ を任意の d' -sequence とする. この d' から d -sequence $\Gamma = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq r}$ が得られる. $H_{G'}(\Gamma')$ は $\mathcal{L}(H_G(\Gamma), G_{r+1})$ の $X_{d_{r+1}}^{\Gamma_r}(\Gamma'_{r+1})$ における固定部分群の G_{r+1} -part だから, 命題 3.5 により, $H_G(\Gamma) = P(\Gamma_r^\sigma)$ または $P(\Gamma_r^\sigma; \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ と表せる. したがって, 系 2.4 と注意 2.5 より, $G_{r+1} = GL(d_{r+1})$ のとき $\mathcal{S}(H_{G'}(\Gamma')) \subseteq \{u \in \mathcal{S}(H_G(\Gamma)); u \leq d_{r+1}\}; G_{r+1} = SL(d_{r+1})$ のときは $\mathcal{S}(H_{G'}(\Gamma')) \subseteq \{u \in \mathcal{S}(H_G(\Gamma)); u \leq d_{r+1}\} \cup \{d_{r+1} - u; u \in \mathcal{S}(H_G(\Gamma)), u < d_{r+1}\} \cup \{d_{r+1}\}$ となる. 帰納法の仮定より $\mathcal{S}(H_G(\Gamma)) \subseteq \mathcal{N}_G(d)_r$ であり, $\mathcal{N}_{G'}(d')_r = \mathcal{N}_G(d)_r$ だから, $\bigcup_{\Gamma' \in \mathcal{D}'} \mathcal{S}(H_{G'}(\Gamma')) \subseteq \mathcal{N}_{G'}(d')_{r+1}$ となる. ここで $\mathcal{D}'$ は d' -sequences 全体の集合である.

逆に, $u \in \mathcal{N}_{G'}(d')_{r+1}$ とする. もし $G_{r+1} = GL(d_{r+1})$ ならば, 定義から $u \in \mathcal{N}_{G'}(d')_r$ かつ $u \leq d_{r+1}$ である. $\mathcal{N}_{G'}(d')_r = \mathcal{N}_G(d)_r$ だから, 帰納法の仮定により, $u \in \mathcal{S}(H_G(\Gamma))$ となる d -sequence $\Gamma = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq r}$ が存在する. 命題 3.5 より $H_G(\Gamma) = P(\Gamma_r^\sigma; \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ と表せるので, 補題 2.6 より, $u \in \mathcal{S}(H|_{G_{r+1}})$ となるような $\Gamma'_{r+1} = (\gamma_{1,r+1}, \dots, \gamma_{r,r+1}) \in \mathcal{F}(d_{r+1}, \Gamma_r)$ が存在する. ただし $\Gamma_r = (\gamma_{1,r}, \dots, \gamma_{r,r})$ であり, $H|_{G_{r+1}}$ は $\mathcal{L}(H_G(\Gamma), G_{r+1})$ の $X_{d_{r+1}}^{\Gamma_r}(\Gamma'_{r+1})$ における固定部分群 H の G_{r+1} -part である. この Γ , Γ'_{r+1} , $\gamma_{r+1,r+1} = d_{r+1} - \sum_{i \in \Omega(r)} \gamma_{i,r+1}$ を用いて, $H|_{G_{r+1}} = H_{G'}(\Gamma')$ となるような d' -sequence Γ' を作れる. つまり $u \in \mathcal{S}(H_{G'}(\Gamma'))$ である.

次に $G_{r+1} = SL(d_{r+1})$ の場合を考えよう. $u \in \mathcal{N}_{G'}(d')_{r+1}$ とする. 任意の d' -sequence Γ' に対して $d_{r+1} \in \mathcal{S}(H_{G'}(\Gamma'))$ となっていることに注意しよう. そこで $u < d_{r+1}$ と仮定する. このとき適当な $v \in \mathcal{N}_{G'}(d')_r$ を用いて $u = v$ または $u = d_{r+1} - v$ と表せる. したがって上と全く同様の議論により, 適当な d' -sequence Γ' に対して $v \in \mathcal{S}(H_{G'}(\Gamma'))$ がわかる. このとき $H_{G'}(\Gamma') \subseteq G_{r+1} = SL(d_{r+1})$ だから, $d_{r+1} - v \in \mathcal{S}(H_{G'}(\Gamma'))$ でもあることがわかる. したがって $r+1$ のときも主張が成り立つ. ■

定理 4.2. $d = (d_1, \dots, d_r)$ を r 個の正整数の組とし, $G = G_1 \times \dots \times G_r$, ただし $G_i = GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とおく. このとき, $(G, \mathcal{L}_d)$ が F.P. でないための必要十分条件は, $d_s \in \mathcal{N}_G(d)_{s-1}$ かつ $G_s = SL(d_s)$ となるような番号 s が存在することである.

証明. まず補題 1.2, 注意 1.4, 1.7 より $\mathcal{L}(G_1, G_2)$ が F.P. でないための必要十分条件は, $G_1 = SL(d_1)$ かつ $G_2 = SL(d_2)$ かつ $d_1 = d_2$ である. これは $d_2 \in \mathcal{N}_{G'}(d')_1 = \mathcal{N}_G(d)_1$ かつ $G_2 = SL(d_2)$ と同値である. ただし $d' = (d_1, d_2)$, $G' = G_1 \times G_2$ とする.

次に $\mathcal{L}(G_1, G_2)$ が F.P. の場合を考える. $(G, \mathcal{L}_d)$ が F.P. でないとする. このとき $[(G_1 \times \dots \times G_s, \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_s)})]$ が F.P. でなく, かつ $(G'', \mathcal{L}_{d''})$ は F.P. となるような番号 $s \geq 3$ が存在する. ただし $d'' = (d_1, \dots, d_{s-1})$, $G'' = G_1 \times \dots \times G_{s-1}$ とする. このとき

(4.1) ある d'' -sequence Γ'' に対して $\mathcal{L}(H_{G''}(\Gamma''), G_s)$ は F.P. でない.

逆に, (4.1) がある番号 $s \geq 3$ に対して成り立つすると $(G_1 \times \dots \times G_s, \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_s)})$ は F.P. ではなく, したがって $(G, \mathcal{L}_d)$ も F.P. ではない.

一方, (4.1) がある番号 $s \geq 3$ に対して成り立つための必要十分条件は, 注意 1.4 と命題 1.6 により $G_s = SL(d_s)$ かつ, ある Γ'' に対して $d_s \in \mathcal{S}(H_{G''}(\Gamma''))$ となることである. これは, 命題 4.1 より, $d_s \in \mathcal{N}_{G''}(d'')_{s-1}$ かつ $G_s = SL(d_s)$ と同値である. $\mathcal{N}_{G''}(d'')_{s-1} = \mathcal{N}_G(d)_{s-1}$ であるから, 定理が証明された. ■

注意 4.3. 定理 4.2 より, $G = GL(d_1) \times \dots \times GL(d_r)$ に対し $(G, \mathcal{L}_d)$ は, したがって $(G, \mathcal{L}_d(Q))$ は F.P. である. つまり, よく知られている事実の直接の証明が得られたことになる.

例 4.4. $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ とする. $(SL(d_1) \times \dots \times SL(d_5), \mathcal{L}_{(d_1, \dots, d_5)})$ が F.P. でないための必要十分条件は, 次の条件のうちどれかが成り立つことである:

$$\begin{array}{lll} d_5 = d_1, & d_5 = d_3 - d_1, & d_5 = d_3 - d_2 + d_1, \\ d_5 = d_2, & d_5 = d_3 - d_2, & d_5 = d_4 - d_2 + d_1, \\ d_5 = d_3, & d_5 = d_4 - d_1, & d_5 = d_4 - d_3 + d_1, \\ d_5 = d_4, & d_5 = d_4 - d_2, & d_5 = d_4 - d_3 + d_2, \\ d_5 = d_2 - d_1, & d_5 = d_4 - d_3, & d_5 = d_4 - d_3 + d_2 - d_1. \end{array}$$

5 絶対不変式による特徴づけ

$d = (d_1, \dots, d_r)$ を r 個の正整数の組とし, $G = G_1 \times \dots \times G_r$, ただし $G_i = GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とする. もし $(G, \mathcal{L}_d)$ が定数でない絶対不変式を持つなら (つまり $f(g \cdot v) = f(v)$ ($g \in G$, $v \in \mathcal{L}_d$) をみたす $\mathcal{L}_d$ 上の有理関数 f が存在するなら), $(G, \mathcal{L}_d)$ は概均質ベクトル空間にはならない ([6] § 2 の PROPOSITION 3 参照). したがって F.P. にはなり得ない. しかしこの逆は一般には言えない: 例えば $(SL(1) \times SL(3) \times SL(2), \mathcal{L}_{(1,3,2)})$ は F.P. ではなく, しかも絶対不変式を持たないことがわかる. この節では, 有限個の軌道を持つための条

件 (定理 4.2) が, 適当に向きを変えたクイバーを考えることにより, 絶対不変式の存在で特徴づけられることを示す.

$(G, \mathcal{L}_d(Q))$ が F.P. でないとすると, 注意 3.2 から $(G, \mathcal{L}_d)$ も F.P. ではない. したがって定理 4.2 から, 次の条件をみたす $\{u_1, u_2, \dots, u_l\} \subseteq \Omega(r)$ ($u_1 < u_2 < \dots < u_l$) が存在する:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} d_{u_1} - d_{u_2} + d_{u_3} - d_{u_4} + d_{u_5} - d_{u_6} + \dots + (-1)^{l+1} d_{u_l} &= 0, \\ G_{u_i} &= SL(d_{u_i}) \text{ for } i \in \Omega(l) \end{aligned}$$

かつ

$$(5.2) \quad \begin{aligned} d_{u_1} &\leq d_{u_1+1}, d_{u_1+2}, \dots, d_{u_2}, \\ d_{u_2} - d_{u_1} &\leq d_{u_2+1}, d_{u_2+2}, \dots, d_{u_3}, \\ d_{u_3} - d_{u_2} + d_{u_1} &\leq d_{u_3+1}, d_{u_3+2}, \dots, d_{u_4}, \\ &\vdots \\ d_{u_{l-1}} - d_{u_{l-2}} + \dots + (-1)^l d_{u_1} &\leq d_{u_{l-1}+1}, d_{u_{l-1}+2}, \dots, d_{u_l}. \end{aligned}$$

このとき頂点 $u_1, u_3, u_5, \dots$ が sources に, 頂点 $u_2, u_4, u_6, \dots$ が sinks になるような, そして各 u_i と u_{i+1} の間には source も sink も無いようなクイバーを考える:

$$(Q') \quad \begin{cases} \begin{array}{c} 1 \\ \cdot \end{array} \leftarrow \dots \leftarrow \begin{array}{c} u_1 \\ \cdot \end{array} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{array}{c} u_2 \\ \cdot \end{array} \leftarrow \dots \leftarrow \begin{array}{c} u_l \\ \cdot \end{array} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{array}{c} r \\ \cdot \end{array} \quad (l \text{ が奇数のとき}), \\ \begin{array}{c} 1 \\ \cdot \end{array} \leftarrow \dots \leftarrow \begin{array}{c} u_1 \\ \cdot \end{array} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{array}{c} u_2 \\ \cdot \end{array} \leftarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow \begin{array}{c} u_l \\ \cdot \end{array} \leftarrow \dots \leftarrow \begin{array}{c} r \\ \cdot \end{array} \quad (l \text{ が偶数のとき}). \end{cases}$$

小池和彦氏 [4] によると, 次のように $(G, \mathcal{L}_d(Q'))$ の絶対不変式が構成できる: l が奇数のときは

$$f(X) = \det \begin{bmatrix} Y_{u_2, u_1} & Y_{u_2, u_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_{u_4, u_3} & Y_{u_4, u_5} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Y_{u_6, u_5} & Y_{u_6, u_7} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Y_{u_{l-1}, u_{l-2}} & Y_{u_{l-1}, u_l} \end{bmatrix}$$

とし, l が偶数のときは

$$f(X) = \det \begin{bmatrix} Y_{u_2, u_1} & Y_{u_2, u_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_{u_4, u_3} & Y_{u_4, u_5} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Y_{u_6, u_5} & Y_{u_6, u_7} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Y_{u_{l-2}, u_{l-3}} & Y_{u_{l-2}, u_{l-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & Y_{u_l, u_{l-1}} \end{bmatrix}$$

とおく. ここで $X_{i+1,i} \in M(d_{i+1}, d_i)$, $X_{i,i+1} \in M(d_i, d_{i+1})$ に対し

$$\begin{cases} Y_{v,u} = X_{v,v-1}X_{v-1,v-2} \cdots X_{u+1,u} \in M(d_v, d_u) & (v > u \text{ のとき}), \\ Y_{v,u} = X_{v,v+1}X_{v+1,v+2} \cdots X_{u-1,u} \in M(d_v, d_u) & (v < u \text{ のとき}) \end{cases}$$

と略記した. 条件(5.1) より, この $f(X)$ は $(G, \mathcal{L}_d(Q'))$ の絶対不変式である. また条件(5.2) によって $f(X)$ は定数ではないことがわかる ([4] の 251 ページ参照). したがって次の系が得られた:

系 5.1. $d = (d_1, \dots, d_r)$ を r 個の正整数の組とし, $G = G_1 \times \cdots \times G_r$, ただし $G_i = GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とする. このとき $(G, \mathcal{L}_d(Q))$ が F.P. でないための必要十分条件は, Q の矢の向きを適当に変えたクイバー Q' に対し $(G, \mathcal{L}_d(Q'))$ が定数でない絶対不変式を持つことである.

参考文献

- [1] P. Gabriel, Unzerlegbare Darstellungen I, *Manuscripta Math.* **6** (1972), 71–103
- [2] V. G. Kac, Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory, *Invent. Math.* **56** (1980), 57–92
- [3] T. Kimura, S. Kasai and O. Yasukura, A classification of the representations of reductive algebraic groups which admit only a finite number of orbits, *Amer. J. Math.* **108** (1986), 643–691
- [4] K. Koike, Relative invariants of the polynomial rings over type A_r , $\tilde{A}_r$ quivers, *Adv. Math.* **86** (1991), 235–262
- [5] V. Pyasetskii, Linear Lie group actions with finitely many orbits, *Functional Anal. Appl.* **9** (1975), 351–353
- [6] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, *Nagoya Math. J.* **65** (1977), 1–155