

シフト作用素の数域半径による正值三角多項式の係数の評価

山形大学大学院 理工学研究科 植田 靖典 (Yasunori Ueda)

Graduate School of Science and Engineering
Yamagata Univ.

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素 T の数域半径 (numerical radius) は,

$$w(T) := \sup_{\|\xi\|=1} |\langle T\xi, \xi \rangle|$$

で与えられる. U. Haagerup, P. de la Harpe は [2] に於いて, 巾零な $T (\neq 0)$ の数域半径について研究し, 特に N 次元シフト作用素

$$S_N = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

の場合について, 以下の結果を得ている.

Theorem A

$w(S_N) = \cos \frac{\pi}{N+1}$ であり, unit vector $\alpha \in \mathbb{C}^N$ について,

$$\langle S_N \alpha, \alpha \rangle = \cos \frac{\pi}{N+1} \iff \alpha = e^{i\varphi} \xi_0 \text{ for some } \varphi \in [0, 2\pi)$$

ここに,

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{N+1} \\ \sin \frac{2\pi}{N+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{N\pi}{N+1} \end{bmatrix}$$

又, [2] に於いては Theorem A の応用として, Fejér - Riesz による 正値三角多項式の係数評価に関する古典的結果 [1] に対し, S_N の数域半径に注目した新しいアプローチが為され, 以下が得られている.

Theorem B

$$\tau(e^{i\theta}) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \alpha_k e^{ik\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

を正値 (i.e. $\tau(e^{i\theta}) \geq 0$ for all $\theta \in [0, 2\pi)$) かつ $\alpha_0 \neq 0, \alpha_{N-1} \neq 0$ なる三角多項式とし, $N \geq 2$ とするとき,

$$|\alpha_1| \leq \alpha_0 \cos \frac{\pi}{N+1}.$$

更に上で等号の成立するとき,

$$\tau(e^{i\theta}) = \frac{2\alpha_0}{N+1} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sin \frac{(k+1)\pi}{N+1} \right) e^{ik\theta} \right|^2.$$

さて, [2] に於いては Theorem B で与えられた三角多項式 τ に関して係数 α_1 のみ評価しているが, 他の係数 α_k ($1 \leq k \leq N-1$) について, その評価及び等号成立に伴う τ の form. の特徴付けに関する結果が得られたので, それらについて以下に述べる. 尚, τ が正値のときは, $\alpha_{-k} = \overline{\alpha_k}$ ($1 \leq k \leq N-1$) であるゆえ, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}$ について調べれば十分である. $k \geq 2$ の場合の α_k を評価する際, Theorem A と同様の結果を $(S_N)^k$ について考察する必要がある.

Lemma C

$N \geq 2, 1 \leq n \leq N-1$ とする.

(i) $w((S_N)^n) = \cos \frac{\pi}{(\frac{N}{n}) + 1}$, ここで $(\frac{N}{n})$ は, 以下により定める:

$$\left(\frac{N}{n}\right) := \begin{cases} \frac{N}{n} & \cdots n \text{ が } N \text{ を割り切るとき} \\ \left[\frac{N}{n}\right] + 1 & \cdots n \text{ が } N \text{ を割り切らないとき} \end{cases}$$

(ii) unit vector $d \in \mathbb{C}^N$ について,

$$\langle (S_N)^n d, d \rangle = \cos \frac{\pi}{\left(\frac{N}{n}\right) + 1}$$

$$\Leftrightarrow d = P(\beta_1(\xi_1 \otimes l_1) + \cdots + \beta_r(\xi_r \otimes l_r))$$

for some $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{C}$ with $\sum_{s=1}^r |\beta_s|^2 = 1$.

ここで, r は関係式

$$N = \left(\left(\frac{N}{n}\right) - 1\right) \cdot n + r, \quad 1 \leq r \leq n$$

によって一意的に決まる自然数とし, P は $\mathbb{C}^{\left(\frac{N}{n}\right)} \otimes \mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^N$ への canonical projection,

$$l_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n, \quad \xi_1 = \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{N}{n}\right) + 1}} \cdot \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{\left(\frac{N}{n}\right) + 1} \\ \sin \frac{2\pi}{\left(\frac{N}{n}\right) + 1} \\ \vdots \\ \sin \frac{\left(\frac{N}{n}\right)\pi}{\left(\frac{N}{n}\right) + 1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{\left(\frac{N}{n}\right)}$$

である.

上の結果について, n が N を割り切る場合は $\mathbb{C}^{\left(\frac{N}{n}\right)} \otimes \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^N$ ゆえ, このときは $P = \text{id}_{\mathbb{C}^N}$ と考える. 又, $n=1$ の場合は Theorem A となる.

主定理の証明に際しては次に挙げる, Fejér-Riesz [1] による結果が本質的に重要である. これは [2] に於いて, Theorem B を示す際にも用いられている.

Lemma D (Fejér-Riesz).

$$\tau(e^{i\theta}) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} a_k e^{ik\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

を $a_0 \neq 0$ なる正值三角多項式とするとき, 正巾のみからなる三角多項式

$$g(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ij\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

が存在して, $\tau(e^{i\theta}) = |f(e^{i\theta})|^2$ for all $\theta \in [0, 2\pi)$.

Theorem

$$\tau(e^{i\theta}) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \alpha_k e^{ik\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

を正値三角多項式とし, $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_{N-1} \neq 0$ and $N \geq 2$ とするとき, $1 \leq n_0 \leq N-1$ に対し,

$$|\alpha_{n_0}| = \alpha_0 \cos \frac{\pi}{\left(\frac{N}{n_0}\right) + 1}$$

$\Leftrightarrow$ $(r-1)$ 次の正巾から成る三角多項式 p , $\varphi \in [0, 2\pi)$ が存在して,

$$\tau(e^{i\theta}) = \alpha_0 |(p\psi)(e^{i(\theta-\varphi)})|^2, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

ここで r は等式 $N = \left(\frac{N}{n_0} - 1\right) \cdot n_0 + r$, $1 \leq r \leq n_0$ を満たし, ψ は

$$\psi(e^{i\theta}) := \left(\frac{2}{\left(\frac{N}{n_0}\right) + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{\left(\frac{N}{n_0}\right)-1} \sin \frac{(j+1)\pi}{\left(\frac{N}{n_0}\right) + 1} e^{in_0 j \theta}$$

で与えられる多項式とする. 更に, ψ が成り立つとき, $n \neq n_0$ なる $1 \leq n \leq N-1$ に対して,

$$|\alpha_n| < \alpha_0 \cos \frac{\pi}{\left(\frac{N}{n}\right) + 1}.$$

(Proof)

Lemma D により, $f(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ij\theta}$ と,

$$\tau(e^{i\theta}) = |f(e^{i\theta})|^2 = \sum_{0 \leq k, l \leq N-1} c_k \bar{c}_l e^{i(k-l)\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

なるものとする.

$$S^{(n)} := \begin{cases} (S_N)^n & \dots \text{ if } 1 \leq n \leq N-1 \\ I_N & \dots \text{ if } n=0 \\ (S_N^*)^{|n|} & \dots \text{ if } -(N-1) \leq n \leq -1, \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^N$$

とそれぞれおくと,

$$\tau(e^{i\theta}) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \langle S^{(n)} \alpha, \alpha \rangle e^{in\theta}.$$

よって,

$$\alpha_n = \langle (S_N)^n \alpha, \alpha \rangle \text{ for } 1 \leq n \leq N-1.$$

Lemma C-(i) により, $\alpha_0 = \|\alpha\|^2 \neq 0$ に注意して,

$$|\alpha_n| = \|\alpha\|^2 \left| \left\langle (S_N)^n \frac{\alpha}{\|\alpha\|}, \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \right\rangle \right| \leq \alpha_0 \cos \frac{\pi}{\left(\frac{N}{n_0}\right) + 1}$$

以後, 簡単の爲 $\alpha_0 = 1$, $\text{Arg}(\alpha_{n_0}) = 0$ と仮定する (必要ならば, τ の代わりに $e^{i\theta} \mapsto \tau(e^{i(\theta - \arg(\alpha_{n_0})/n_0)})$ を考えればよい).

$$\alpha_{n_0} = \cos \frac{\pi}{\left(\frac{N}{n_0}\right) + 1}$$

とすれば, Lemma C-(ii) より $\sum_{s=1}^r |\beta_s|^2 = 1$ なる $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{C}$ が存在して, $\alpha = P \left(\sum_{s=1}^r \beta_s (\xi_1 \otimes l_s) \right)$. ここで P は $\mathbb{C}^{(N/n_0)} \otimes \mathbb{C}^{n_0}$ から $\mathbb{C}^N$ への canonical projection, unit vector $\xi_1 \in \mathbb{C}^{(N/n_0)}$ の k -成分は,

$$\left(\frac{2}{\left(\frac{N}{n_0}\right) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{k\pi}{\left(\frac{N}{n_0}\right) + 1}, \quad 1 \leq k \leq \left(\frac{N}{n_0}\right)$$

である. 従って,

$$c_j = \begin{cases} \beta_s \left(\frac{2}{\left(\frac{N}{n_0}\right) + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{(j+1)\pi}{\left(\frac{N}{n_0}\right) + 1} \dots & \text{if } j = s-1 + j n_0, \\ & 0 \leq j \leq (N/n_0) - 1 \text{ and } 1 \leq s \leq r \\ 0 & \dots \text{otherwise} \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \tau(e^{i\theta}) &= \left| \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ij\theta} \right|^2 \\ &= \frac{2}{\left(\frac{N}{n_0}\right) + 1} \left| \sum_{\substack{0 \leq j \leq (N/n_0) - 1 \\ 1 \leq s \leq r}} \beta_s \sin \frac{(j+1)\pi}{\left(\frac{N}{n_0}\right) + 1} e^{i(s-1+jn_0)\theta} \right|^2 \\ &= \frac{2}{\left(\frac{N}{n_0}\right) + 1} \left| \left(\sum_{s=0}^r \beta_s e^{i(s-1)\theta} \right) \left(\sum_{j=0}^{(N/n_0)-1} \sin \frac{(j+1)\pi}{\left(\frac{N}{n_0}\right) + 1} e^{in_0 j \theta} \right) \right|^2 \end{aligned}$$

$\alpha_{N-1} \neq 0$ より, 最高次の係数を比較して, $\beta_r \neq 0$ を得る.

次に,

$$\alpha_{n_1} = \cos \frac{\pi}{\left(\frac{N}{n_1}\right) + 1}$$

とすると, 直前の議論と Lemma C-(ii) により,

$$\alpha = P' \left(\sum_{s=1}^{r'} \beta'_s (\xi'_1 \otimes \zeta'_s) \right) \text{ for some } \beta'_1, \dots, \beta'_{r'} \in \mathbb{C}$$

with $\beta'_{r'} \neq 0$ and $\sum_{s=1}^{r'} |\beta'_s|^2 = 1$

となる. ここで P' は $\mathbb{C}^{(N/n_1)} \otimes \mathbb{C}^{n_1}$ から $\mathbb{C}^N$ への canonical projection, r' は等式

$$N = \left(\left(\frac{N}{n_1} \right) - 1 \right) \cdot n_1 + r', \quad 1 \leq r' \leq n_1$$

により決まる. よって,

$$P \left(\sum_{s=1}^r \beta_s (\xi_1 \otimes \zeta_s) \right) = \alpha = P' \left(\sum_{s=1}^{r'} \beta'_s (\xi'_1 \otimes \zeta'_s) \right)$$

であるから成分を比較することにより $n_0 = n_1$ を得る. 則ち, 等号を成り立たしめる $1 \leq n_0 \leq N-1$ は唯一つとなり, 定理が示された.

参考文献

- [1] L. Fejér, Über trigonometrische polynome, J. reine angew Math. 146 (1916), 58–82.
- [2] U. Haagerup and P. de la Harpe, The numerical radius of a nilpotent operator on a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 115 (1992), 371–379.