

二重層大気における反射

および透過函数について

龍谷大 辻 田 丞 治

§ 1 序 論

均質な2つの *plane parallel atmosphere* を重ね合わせ
た場合の、*Scattering* および *Transmission function* の
計算は、最初、*Idawkins* によって試みられた。*Idawkins*
は、*Source function* に関する *Milne* の積分方程式から
出発し、*S*-および *T*-函数を、厳密解の形に求めた。その過程
は、解析的な面からは *self-closed* であると考えられるが
、その解が物理的な意味を満たしていないことは、後になっ
て、*Idansen* によって指摘された。また、*Matsumoto* は、
解が一意性の条件を満たしていないことを証明した。

他方、*van de Hulst* は、*Adding method* として二重層
大気における *S*-および *T*-函数を計算する問題を取り上げ、
optical に薄い層における *S*-および *T*-函数が知られている場合
に、そういう層を次々に重ねて行くことによって、*optical*

に厚い層におけるS-およびT-函数が、能率よく計算されるであらうと言ふことを述べている。

van de Hulst の考へ方に基づいて、Idansen と Irvine がそれぞれ独立に、二重層に関する計算を行なっている。

まず、Idansen によれば、物理的に性質の等しい2つの層を重ね合わせた場合のS-およびT-函数は、次のように表わされる。2つの層の optical thickness は、共に τ とする。

$$\begin{aligned} \frac{S(2\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) \cdot F}{4\mu} &= \frac{S(\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) \cdot F}{4\mu} \\ &+ e^{\tau/\mu} \frac{1}{\mu} \cdot \Sigma_0(\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) \cdot F e^{-\tau/\mu_0} \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\tau; \mu, \phi; \mu', \phi') \frac{1}{4\mu'} \Sigma_0(\tau; \mu', \phi'; \mu_0, \phi_0) F e^{-\tau/\mu_0} d\mu' d\phi' \\ &+ \frac{e^{\tau/\mu}}{4\pi\mu} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Sigma_0(\tau; \mu, \phi; \mu', \phi') \frac{T(\tau; \mu', \phi'; \mu_0, \phi_0)}{4\mu'} F d\mu' d\phi' \\ &+ \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\tau; \mu, \phi; \mu'', \phi'') \frac{1}{4\pi\mu''} \Sigma_0(\tau; \mu'', \phi''; \mu', \phi') \cdot \\ &\quad \frac{T(\tau; \mu', \phi'; \mu_0, \phi_0) F}{4\mu'} d\mu' d\phi' \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{ただし} \quad \Sigma_0(\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) \equiv \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} S_n(\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) \quad (2)$$

$$S_1(\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) \equiv S(\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} S_n(\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) &\equiv \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\tau; \mu, \phi; \mu', \phi') \cdot \\ &\quad \cdot S(\tau; \mu', \phi'; \mu_0, \phi_0) \frac{d\mu'}{\mu'} d\phi' \end{aligned} \quad (4)$$

(1)の右辺各項の物理的意味は、次のようなものである。

才1項：上の層だけによって拡散反射される量。

才2項：上の層を直接透過し、下の層と上の層の間を拡散的に反射されて往復をくり返し、最後に上の層を直接透過して表面に出て来る量。

才3項：途中まで才2項と同じ過程を経るが、最後に上の層を拡散的に透過して表面に出て来る量。

才4項：上の層を拡散的に透過した後、下の層と上の層の間を拡散的に反射されて往復をくり返し、最後に上の層を直接透過して表面に出て来る量。

才5項：途中まで才4項の内容と同じであるが、最後に上の層を拡散的に透過して表面に出て来る量。

$$\begin{aligned}
 T(2\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) &= T(\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) e^{-\tau\mu_0} + e^{-\tau\mu} T(\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) \\
 &\quad + e^{-\tau\mu} \Sigma_\varepsilon(\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) e^{-\tau\mu_0} \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} T(\tau; \mu, \phi; \mu', \phi') T(\tau; \mu', \phi'; \mu_0, \phi_0) \frac{d\mu'}{\mu'} d\phi' \\
 &\quad + \frac{e^{-\tau\mu_0}}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} T(\tau; \mu, \phi; \mu', \phi') \Sigma_\varepsilon(\tau; \mu', \phi'; \mu_0, \phi_0) \frac{d\mu'}{\mu'} d\phi' \\
 &\quad + \frac{e^{-\tau\mu}}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Sigma_\varepsilon(\tau; \mu, \phi; \mu', \phi') T(\tau; \mu', \phi'; \mu_0, \phi_0) \frac{d\mu'}{\mu'} d\phi' \\
 &\quad + \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} T(\tau; \mu, \phi; \mu'', \phi'') \Sigma_\varepsilon(\tau; \mu'', \phi''; \mu', \phi') \\
 &\quad \cdot T(\tau; \mu', \phi'; \mu_0, \phi_0) \frac{d\mu'}{\mu'} d\phi' \frac{d\mu''}{\mu''} d\phi'' \quad (5)
 \end{aligned}$$

ただし

$$\Sigma_{\varepsilon}(\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) \equiv \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} S_n(\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) \quad (6)$$

(5)の右辺各項の物理的意味も、S-函数の場合に倣って説明することができ、それらによって、二重層を透過する輻射のすべての場合が、かぞえ上げられていることになる。

実際にこの方式に従って、数値計算を実行しようとするとき、無限級数(2)および(6)の処理が問題になる。Idansen は、はじめの数項の和をとって打ち切り、残りの項の和の代りに等比級数の和で置き換えている。そうすることの妥当性もまた、van de Hulst によって論じられている。

他方、Irvine は、incident parallel rays に対して、次のような formulation を行なっている。

上の面に、方向 μ_0 で入射する輻射があるときに、2つの層の境界における上向き *radiation intensity* を $U(\mu, \mu_0)$ 、下向きのそれを $D(\mu, \mu_0)$ で表わし、また、上の層に関する物理量を 1、下の層に関する物理量を 2 という suffix をつけて示すことにする。まず、Reflection function $R(\mu, \mu_0)$ が次のように与えられる。

$$R(\mu, \mu_0) = R_1(\mu, \mu_0) + U(\mu, \mu_0) e^{-\tau_1 \mu} + 2\pi \int_0^1 T_1(\mu, \mu') U(\mu', \mu_0) \mu' d\mu' \quad (7)$$

同様に、Transmission function $T(\mu, \mu_0)$ も、次のように与えられる。

$$T(\mu, \mu_0) = D(\mu, \mu_0) e^{-\tau_2 \mu} + T_2(\mu, \mu_0) e^{-\tau_2 \mu_0} + 2\pi \int_0^1 T_1(\mu, \mu') D(\mu', \mu_0) \mu' d\mu' \quad (8)$$

ただし

$$U(\mu, \mu_0) = R_2(\mu, \mu_0) e^{-\tau_2 \mu_0} + \Omega \{ R_2(\mu, \mu') D(\mu', \mu_0) \} \quad (9)$$

$$D(\mu, \mu_0) = T_1(\mu, \mu_0) + Q(\mu, \mu_0) e^{-\tau_2 \mu_0} + \Omega \{ Q(\mu, \mu') T_1(\mu', \mu_0) \} \quad (10)$$

$$Q(\mu, \mu_0) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\mu, \mu_0) \quad (11)$$

$$Q_{i+1}(\mu, \mu_0) = \Omega \{ Q_i(\mu, \mu') Q_i(\mu', \mu_0) \} \quad (12)$$

$$Q_1(\mu, \mu_0) = \Omega \{ R_1(\mu, \mu') R_2(\mu', \mu_0) \} \quad (13)$$

$$\Omega \{ f(\mu, \mu') g(\mu', \mu_0) \} = 2\pi \int_0^1 f(\mu, \mu') g(\mu', \mu_0) \mu' d\mu' \quad (14)$$

Irvine の取扱いは、本質的に Idansen のものと同じであることが容易にわかる。そして、この場合も無限級数(11)は、はじめの数項で打ち切られ、残りの項は等比級数の和で置き換えられている。

ところで、Idansen や Irvine の formulation は、実は、Chandrasekhar の invariance principle から、自動的に導かれるものであることを示すことができる。

Chandrasekhar の invariance principle は次のように書かれる。

$$I(\tau_1; +\mu, \phi) = \frac{F}{4\mu} e^{-\tau_1/\mu_0} S_2(\tau_2; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) \\ + \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^1 \int_0^{2\pi} S_2(\tau_2; \mu, \phi; \mu', \phi') I(\tau_1; -\mu', \phi') d\mu' d\phi' \quad (15)$$

$$I(\tau_1; -\mu, \phi) = \frac{F}{4\mu} T_1(\tau_1; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) \\ + \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^1 \int_0^{2\pi} S_1(\tau_1; \mu, \phi; \mu', \phi') I(\tau_1; +\mu', \phi') d\mu' d\phi' \quad (16)$$

$$\frac{F}{4\mu} S(\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) = \frac{F}{4\mu} S_1(\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) + e^{-\tau/\mu} I(\tau_1; +\mu, \phi) \\ + \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^1 \int_0^{2\pi} T_1(\tau_1; \mu, \phi; \mu', \phi') I(\tau_1; +\mu', \phi') d\mu' d\phi' \quad (17)$$

$$\frac{F}{4\mu} T(\tau; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) = \frac{F}{4\mu} e^{-\tau/\mu_0} T_2(\tau_2; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) + e^{-\tau/\mu} I(\tau_1; -\mu, \phi) \\ + \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^1 \int_0^{2\pi} T_2(\tau_2; \mu, \phi; \mu', \phi') I(\tau_1; -\mu', \phi') d\mu' d\phi' \quad (18)$$

ただし

$$\tau = \tau_1 + \tau_2$$

これらは、Irvine の式(7)~(10)に対応しており、たとえば、(17)の右辺第2項および第3項に(15)を代入し、その結果に(16)を代入し、またその結果に(15)を代入し……、という操作をくり返して行けば、前二者とまったく同じ結果に到達することがわかるであろう。したがって、van de Hulst、Idansen および Irvine 達の取扱いは、原理的には、Chandrasekhar の invariance principle に帰着するといえることができる。

§ 2 本 論

次に、Gutshabash および筆者による方法について、その概要を述べる。

従前どおり、各層に関する物理量は既知であるとし、上の層に関する量を1、下の層に関する量を2と言う suffix で表わすことにして、Chandrasekhar の invariance principle から出発する (15)~(18) 参照。)。ただし、便宜上、2つの層の境界における、下向きおよび上向きの各 radiation intensity の notation を変え、それらの満たすべき境界条件を次のように書く。

$$\left. \begin{aligned} I_1(\tau_i; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) &\equiv I(\tau_i; -\mu, \phi) = 0 & (0 < \mu < 1) \\ I_2(\tau_i; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) &\equiv I(\tau_i; +\mu, \phi) = 0 & (-1 < \mu < 0) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

いま、一般の phase function を考えるのであるが、しかしそれは有限の Legendre 級数で表わせるものとする。

$$P_i(\mu, \phi; \mu_0, \phi_0) = \sum_{m=0}^N (2 - \delta_{0,m}) \left\{ \sum_{\ell=m}^N w_{i,\ell}^{(m)} P_\ell^m(\mu) P_\ell^m(\mu_0) \right\} \cos m(\phi_0 - \phi) \quad (20)$$

$$\text{ただし } w_{i,\ell}^{(m)} \equiv w_{i,\ell} \cdot \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}; \quad \delta_{0,m} = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases}; \quad i=1, 2$$

その場合には、 S -および T -函数も次のように展開される。

$$S_i(\tau_i; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) = \sum_{m=0}^N S_i^{(m)}(\tau_i; \mu, \mu_0) \cos m(\phi_0 - \phi) \quad (21)$$

$$T_i(\tau_i; \mu, \phi; \mu_0, \phi_0) = \sum_{m=0}^N T_i^{(m)}(\tau_i; \mu, \mu_0) \cos m(\phi_0 - \phi) \quad (22)$$

さらに、*radiation intensity* も次のように展開できるものとする。

$$I_i(\tau_i; \mu, \phi; \mu', \phi') = \sum_{m=0}^N I_i(\tau_i; \mu, \mu') \cos m(\phi' - \phi) \quad (i=1, 2) \quad (23)$$

invariance principle, *equation of transfer*, 境界条件および(20), (21), (22)を用いて、Chandrasekharの手法に従い、次のような諸関係式を得る。

$$S_i^{(m)}(\tau_i; \mu, \mu_0) = \frac{\mu\mu_0}{\mu + \mu_0} (2 - \delta_{0,m}) \sum_{\ell=m}^N (-1)^{\ell+m} w_{i,\ell}^{(m)} \left\{ \psi_\ell^{(m)}(\tau_i, \mu) \psi_\ell^{(m)}(\tau_i, \mu_0) - \phi_\ell^{(m)}(\tau_i, \mu) \phi_\ell^{(m)}(\tau_i, \mu_0) \right\} \quad (24)$$

$$T_i^{(m)}(\tau_i; \mu, \mu_0) = \frac{\mu\mu_0}{\mu - \mu_0} (2 - \delta_{0,m}) \sum_{\ell=m}^N w_{i,\ell}^{(m)} \left\{ \phi_\ell^{(m)}(\tau_i, \mu) \psi_\ell^{(m)}(\tau_i, \mu_0) - \psi_\ell^{(m)}(\tau_i, \mu) \phi_\ell^{(m)}(\tau_i, \mu_0) \right\} \quad (25)$$

$$\psi_\ell^{(m)}(\tau_i, \mu) = P_\ell^m(\mu) + \frac{(-1)^{\ell+m}}{2(2 - \delta_{0,m})} \int_0^1 S_i^{(m)}(\tau_i; \mu, \mu') P_\ell^m(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (26)$$

$$\phi_\ell^{(m)}(\tau_i, \mu) = P_\ell^m(\mu) e^{i\ell\mu} + \frac{(-1)^{\ell+m}}{2(2 - \delta_{0,m})} \int_0^1 T_i^{(m)}(\tau_i; \mu, \mu') P_\ell^m(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (27)$$

また、(19)、(23) を (15)、(16) に代入すると、

$$I_1^{(m)}(\tau_1; \mu, \mu_0) = \frac{F}{4\mu} T_1^{(m)}(\tau_1; \mu, \mu_0) + \frac{1}{2(2-\delta_{0,m})\mu} \int_0^1 S_1^{(m)}(\tau_1; \mu, \mu') I_2^{(m)}(\tau_1; \mu', \mu_0) d\mu' \quad (28)$$

$$I_2^{(m)}(\tau_1; \mu, \mu_0) = \frac{F}{4\mu} S_2^{(m)}(\tau_2; \mu, \mu_0) + \frac{1}{2(2-\delta_{0,m})\mu} \int_0^1 S_2^{(m)}(\tau_2; \mu, \mu') I_1^{(m)}(\tau_1; \mu', \mu_0) d\mu' \quad (29)$$

この $I_1^{(m)}$ 、 $I_2^{(m)}$ が多項式の形に表わせるものと仮定して、次のような形に置く。

$$I_1^{(m)}(\tau_1; \mu, \mu_0) = \frac{F}{4} \frac{\mu_0}{\mu - \mu_0} \sum_{\ell=m}^N w_{1,\ell}^{(m)} A_\ell^{(m)}(\mu, \mu_0) \quad (30)$$

$$I_2^{(m)}(\tau_1; \mu, \mu_0) = \frac{F}{4} \frac{\mu_0}{\mu + \mu_0} \sum_{\ell=m}^N w_{2,\ell}^{(m)} B_\ell^{(m)}(\mu, \mu_0) \quad (31)$$

(24)、(25)、(30) および (31) を、(28) および (29) に代入して整理すると、次のようになる。

$$A_\ell^{(m)}(\mu, \mu_0) = \alpha_{1,\ell}^{(m)}(\mu_0) \phi_\ell^{(m)}(\tau_1, \mu) - \alpha_{2,\ell}^{(m)}(\mu_0) \psi_\ell^{(m)}(\tau_1, \mu) + \frac{1}{2(2-\delta_{0,m})} \frac{w_{2,\ell}^{(m)}}{w_{1,\ell}^{(m)}} \int_0^1 S_1^{(m)}(\tau_1; \mu, \mu') B_\ell^{(m)}(\mu', \mu_0) \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (32)$$

$$B_\ell^{(m)}(\mu, \mu_0) = \alpha_{3,\ell}^{(m)}(\mu_0) \psi_\ell^{(m)}(\tau_2, \mu) - \alpha_{4,\ell}^{(m)}(\mu_0) \phi_\ell^{(m)}(\tau_2; \mu) + \frac{1}{2(2-\delta_{0,m})} \frac{w_{1,\ell}^{(m)}}{w_{2,\ell}^{(m)}} \int_0^1 S_2^{(m)}(\tau_2; \mu, \mu') A_\ell^{(m)}(\mu', \mu_0) \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (33)$$

ただし

$$\alpha_{1,e}^{(m)}(\mu_0) = (2 - \delta_{0,m}) \psi_e^{(m)}(\tau_1, \mu_0) + \frac{(-1)^{l+m}}{2} \mu_0 \int_0^1 \phi_e^{(m)}(\tau_1, \mu) \frac{\sum_{l'=m}^N w_{2,l'}^{(m)} B_{l'}^{(m)}(\mu', \mu_0)}{\mu' + \mu_0} d\mu' \quad (34)$$

$$\alpha_{2,e}^{(m)}(\mu_0) = (2 - \delta_{0,m}) \phi_e^{(m)}(\tau_1, \mu_0) + \frac{(-1)^{l+m}}{2} \mu_0 \int_0^1 \psi_e^{(m)}(\tau_1, \mu) \frac{\sum_{l'=m}^N w_{2,l'}^{(m)} B_{l'}^{(m)}(\mu', \mu_0)}{\mu' + \mu_0} d\mu' \quad (35)$$

$$\alpha_{3,e}^{(m)}(\mu_0) = (2 - \delta_{0,m}) \psi_e^{(m)}(\tau_2, \mu_0) e^{-i\mu_0} + \frac{\mu_0}{2} \int_0^1 \psi_e^{(m)}(\tau_2, \mu) \frac{\sum_{l'=m}^N w_{1,l'}^{(m)} A_{l'}^{(m)}(\mu', \mu_0)}{\mu' - \mu_0} d\mu' \quad (36)$$

$$\alpha_{4,e}^{(m)}(\mu_0) = (2 - \delta_{0,m}) \phi_e^{(m)}(\tau_2, \mu_0) e^{-i\mu_0} + \frac{\mu_0}{2} \int_0^1 \phi_e^{(m)}(\tau_2, \mu) \frac{\sum_{l'=m}^N w_{1,l'}^{(m)} A_{l'}^{(m)}(\mu', \mu_0)}{\mu' - \mu_0} d\mu' \quad (37)$$

そこで、(32)の右辺第3項に(33)を、また、(33)の右辺第3項には(32)を、それぞれ代入すると、(32)の右辺には $B_e^{(m)}(\mu', \mu_0)$ の代りに $A_e^{(m)}(\mu', \mu_0)$ が、他方、(33)の右辺には $A_e^{(m)}(\mu', \mu_0)$ の代りに $B_e^{(m)}(\mu', \mu_0)$ が、それぞれ現われる。そこで再び同じ操作をくり返す。この過程を無限にくり返して行くことを考えると、 A_e 、 B_e は次のように表わされるであろう。

$$A_e^{(m)}(\mu, \mu_0) = \alpha_{1,e}^{(m)}(\mu_0) \beta_{1,e}^{(m)}(\mu) - \alpha_{2,e}^{(m)}(\mu_0) \beta_{2,e}^{(m)}(\mu) + \frac{1}{2(2 - \delta_{0,m})} \frac{w_{2,e}^{(m)}}{w_{1,e}^{(m)}} \left\{ \alpha_{3,e}^{(m)}(\mu_0) \beta_{3,e}^{(m)}(\mu) - \alpha_{4,e}^{(m)}(\mu_0) \beta_{4,e}^{(m)}(\mu) \right\} \quad (38)$$

$$B_e^{(m)}(\mu, \mu_0) = \frac{1}{2(2 - \delta_{0,m})} \frac{w_{1,e}^{(m)}}{w_{2,e}^{(m)}} \left\{ \alpha_{1,e}^{(m)}(\mu_0) \gamma_{1,e}^{(m)}(\mu) - \alpha_{2,e}^{(m)}(\mu_0) \gamma_{2,e}^{(m)}(\mu) \right\} + \alpha_{3,e}^{(m)}(\mu_0) \gamma_{3,e}^{(m)}(\mu) - \alpha_{4,e}^{(m)}(\mu_0) \gamma_{4,e}^{(m)}(\mu) \quad (39)$$

た F_i は

$$\beta_{1,e}^{(m)}(\mu) = \phi_e^{(m)}(\tau_1, \mu) + \frac{1}{4(2-\delta_{0,m})^2} \int_0^1 S_1^{(m)}(\tau_1; \mu, \mu') \gamma_{1,e}^{(m)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (40)$$

$$\beta_{2,e}^{(m)}(\mu) = \psi_e^{(m)}(\tau_1, \mu) + \frac{1}{4(2-\delta_{0,m})^2} \int_0^1 S_1^{(m)}(\tau_1; \mu, \mu') \gamma_{2,e}^{(m)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (41)$$

$$\beta_{3,e}^{(m)}(\mu) = \int_0^1 S_1^{(m)}(\tau_1; \mu, \mu') \gamma_{3,e}^{(m)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (42)$$

$$\beta_{4,e}^{(m)}(\mu) = \int_0^1 S_1^{(m)}(\tau_1; \mu, \mu') \gamma_{4,e}^{(m)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (43)$$

$$\gamma_{1,e}^{(m)}(\mu) = \int_0^1 S_2^{(m)}(\tau_2; \mu, \mu') \beta_{1,e}^{(m)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (44)$$

$$\gamma_{2,e}^{(m)}(\mu) = \int_0^1 S_2^{(m)}(\tau_2; \mu, \mu') \beta_{2,e}^{(m)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (45)$$

$$\gamma_{3,e}^{(m)}(\mu) = \psi_e^{(m)}(\tau_2, \mu) + \frac{1}{4(2-\delta_{0,m})^2} \int_0^1 S_2^{(m)}(\tau_2; \mu, \mu') \beta_{3,e}^{(m)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (46)$$

$$\gamma_{4,e}^{(m)}(\mu) = \phi_e^{(m)}(\tau_2, \mu) + \frac{1}{4(2-\delta_{0,m})^2} \int_0^1 S_2^{(m)}(\tau_2; \mu, \mu') \beta_{4,e}^{(m)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (47)$$

いま、 $S_i^{(m)}$ 、 $T_i^{(m)}$ の値は知られているわけであるから、(40)~(43)と(44)~(47)を連立積分方程式系として、 $\beta_{j,e}^{(m)}$ 、 $\gamma_{j,e}^{(m)}$ ($j=1,2,3,4$)を求めることができる。 $\beta_{j,e}^{(m)}$ 、 $\gamma_{j,e}^{(m)}$ が得られると、(34)~(39)によって、 $\alpha_{j,e}^{(m)}$ 、 $A_e^{(m)}$ 、 $B_e^{(m)}$ は代数的に決定することができる。この $A_e^{(m)}$ 、 $B_e^{(m)}$ を用いて(30)、(31)から $I_1^{(m)}$ 、 $I_2^{(m)}$ が得られる。したがって、最終的には、*invariance principle* (15)~(18)によって、重ね合わせた層に関する、S-およびT-関数が得られることになる。

いま、Legendre 展開の才 1 項だけを取り、才 2 項以下を切り捨てることにする。このことは、物理的には等方的散乱を仮定することに対応する。

そうすると、(20)に対応して、

$$P_i(\mu, \phi; \mu_0, \phi_0) = w_i^{(0)} P_0^0(\mu) P_0^0(\mu_0) \quad (i=1, 2) \quad (48)$$

(24)~(27)に対応して、

$$S_i(\tau_i; \mu, \mu_0) = \frac{\mu\mu_0}{\mu+\mu_0} w_i^{(0)} \{X_i(\mu)X_i(\mu_0) - Y_i(\mu)Y_i(\mu_0)\} \quad (49)$$

$$T_i(\tau_i; \mu, \mu_0) = \frac{\mu\mu_0}{\mu-\mu_0} w_i^{(0)} \{Y_i(\mu)X_i(\mu_0) - X_i(\mu)Y_i(\mu_0)\} \quad (50)$$

$$X_i(\mu) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 S_i(\tau_i; \mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (51)$$

$$Y_i(\mu) = e^{-\tau_i \mu} + \frac{1}{2} \int_0^1 T_i(\tau_i; \mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (52)$$

この X_i , Y_i は、いわゆる Chandrasekhar の X -および Y -函数である。

(30), (31)に対応して、

$$I_1(\tau_i; \mu, \mu_0) = \frac{F}{4} \frac{\mu_0}{\mu-\mu_0} w_1^{(0)} A^{(0)}(\mu, \mu_0) \quad (53)$$

$$I_2(\tau_i; \mu, \mu_0) = \frac{F}{4} \frac{\mu_0}{\mu+\mu_0} w_2^{(0)} B^{(0)}(\mu, \mu_0) \quad (54)$$

(34)~(37) に対応して.

$$\alpha_1^{(0)}(\mu_0) = X_1(\mu_0) + \frac{w_2^{(0)}}{2} \mu_0 \int_0^1 \frac{Y_1(\mu')}{\mu' + \mu_0} B^{(0)}(\mu', \mu_0) d\mu' \quad (55)$$

$$\alpha_2^{(0)}(\mu_0) = Y_1(\mu_0) + \frac{w_2^{(0)}}{2} \mu_0 \int_0^1 \frac{X_1(\mu')}{\mu' + \mu_0} B^{(0)}(\mu', \mu_0) d\mu' \quad (56)$$

$$\alpha_3^{(0)}(\mu_0) = X_2(\mu_0) e^{-\tau/\mu_0} + \frac{w_1^{(0)}}{2} \mu_0 \int_0^1 \frac{X_2(\mu')}{\mu' - \mu_0} A^{(0)}(\mu', \mu_0) d\mu' \quad (57)$$

$$\alpha_4^{(0)}(\mu_0) = Y_2(\mu_0) e^{-\tau/\mu_0} + \frac{w_1^{(0)}}{2} \mu_0 \int_0^1 \frac{Y_2(\mu')}{\mu' - \mu_0} A^{(0)}(\mu', \mu_0) d\mu' \quad (58)$$

(38), (39) に対応して.

$$A^{(0)}(\mu, \mu_0) = \alpha_1^{(0)}(\mu_0) \beta_1^{(0)}(\mu) - \alpha_2^{(0)}(\mu_0) \beta_2^{(0)}(\mu) + \frac{1}{2} \frac{w_2^{(0)}}{w_1^{(0)}} \{ \alpha_3^{(0)}(\mu_0) \beta_3^{(0)}(\mu) - \alpha_4^{(0)}(\mu_0) \beta_4^{(0)}(\mu) \} \quad (59)$$

$$B^{(0)}(\mu, \mu_0) = \frac{1}{2} \frac{w_1^{(0)}}{w_2^{(0)}} \{ \alpha_1^{(0)}(\mu_0) \gamma_1^{(0)}(\mu) - \alpha_2^{(0)}(\mu_0) \gamma_2^{(0)}(\mu) \} + \alpha_3^{(0)}(\mu_0) \gamma_3^{(0)}(\mu) - \alpha_4^{(0)}(\mu_0) \gamma_4^{(0)}(\mu) \quad (60)$$

(40)~(47) に対応して.

$$\beta_1^{(0)}(\mu) = Y_1(\mu) + \frac{1}{4} \int_0^1 S_1(\tau; \mu, \mu') \gamma_1^{(0)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (61)$$

$$\beta_2^{(0)}(\mu) = X_1(\mu) + \frac{1}{4} \int_0^1 S_1(\tau; \mu, \mu') \gamma_2^{(0)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (62)$$

$$\beta_3^{(0)}(\mu) = \frac{1}{4} \int_0^1 S_1(\tau; \mu, \mu') \gamma_3^{(0)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (63)$$

$$\beta_4^{(0)}(\mu) = \frac{1}{4} \int_0^1 S_1(\tau; \mu, \mu') \gamma_4^{(0)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (64)$$

$$\gamma_1^{(0)}(\mu) = \frac{1}{4} \int_0^1 S_2(\tau_2; \mu, \mu') \beta_1^{(0)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (65)$$

$$\gamma_2^{(0)}(\mu) = \frac{1}{4} \int_0^1 S_2(\tau_2; \mu, \mu') \beta_2^{(0)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (66)$$

$$\gamma_3^{(0)}(\mu) = \chi_2(\mu) + \frac{1}{4} \int_0^1 S_2(\tau_2; \mu, \mu') \beta_3^{(0)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (67)$$

$$\gamma_4^{(0)}(\mu) = \gamma_2(\mu) + \frac{1}{4} \int_0^1 S_2(\tau_2; \mu, \mu') \beta_4^{(0)}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (68)$$

このような簡単な形の積分方程式系を、数値的に解くことは容易である。

参 考 文 献

- (1) F.M. Idawkins, *Ap. J.*, 134, 28, 1961.
- (2) H.C. van de Hulst; *NASA Institute for Space Studies Report*, New York, 1963.
- (3) J.E. Hansen, *Radiative Transfer by Doubling Very Thin Layers*, to appear in *Ap. J.*
- (4) W.M. Irvine, *Multiple Scattering by Large Particles*, II. *Optically Thick Layers*, to appear.
- (5) M. Matsumoto, *Private communication*, 1967.
- (6) S.D. Gutschabash, *Vestnik Leningradsk Univ.*, 12, 1, 158, 1957.
- (7) S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer*, 1950.