

Wavefronts corresponding to the envelope of a family of horocycles

東京工業大学理学院数学系 青砥 禎彦

AOTO Yosihiko

Department of Mathematics

Tokyo Institute of Technology

1 序

c を平面曲線とする. $\alpha \in \mathbb{R}$ を 1 つ取り固定する. 曲線 c 上の各点において, 接線との成す角が α となるように直線をひく. ただし角度は反時計回りを正とする. この直線族の包絡線を **evolutoid** とよぶ ([6], [11] 参照). とくに $\alpha = \pi/2$ のときは c の縮閉線と一致する.

ポワンカレ円板において境界の円周に接する円をホロ円とよぶ. 泉屋-斐-佐野 [7] はホロ円を直線とみなす幾何学を展開した. このようにして得られる幾何学をホロ円の幾何学とよぶ. γ を双曲面上の曲線とする. $\alpha \in \mathbb{R}$ を 1 つ取り固定する. 曲線 γ 上の各点において, 接線との成す角が α となるようにホロ円を描く. このホロ円の族の包絡線を **horocyclic evolutoid** とよぶ ([1] 参照).

距離 d における γ の平行曲線を γ_d で表わす. 距離 d を動かすと γ_d の特異点の軌跡は縮閉線となる. Giblin と Warder は, 与えられた角度 α に対して, 特異点の軌跡が evolutoid となるような wavefront を対応させた. とくに $\alpha = \pi/2$ のときは通常の平行曲線となる ([5], §6 参照).

本稿では, 与えられた角度 α に対して, 特異点の軌跡が horocyclic evolutoid となるような wavefront を対応させる. この wavefront は一般にはポワンカレ円板の境界に達しそこで特異点をもつ. 本概説は, この wavefront の幾何学的性質を特異点論の手法を用いて調べるものである.

2 ホロ円の幾何学

ポワンカレ円板において境界の円周に接する円をホロ円という．ホロ円を直線とみなす幾何学をホロ円の幾何学とよぶ ([7] 参照)．相異なる 2 点を通るホロ円はちょうど 2 つあるので，ホロ円の幾何学は結合公理を満たさない．

$\mathbb{R}^3$ 上の擬内積を

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ に対し}$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

によって定める．3 次元ミンコフスキー空間 $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ を $\mathbb{R}_1^3$ で表す．

$D := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ とおく．双曲面 $H_+^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1, x_1 \geq 1\}$ を微分同相写像 $\Pi: H_+^2 \rightarrow D, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2/x_1, x_3/x_1)$ により円板 D と同一視する．

次に $\mathbb{R}_1^3$ 上の擬外積を

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ に対し}$$

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \left(- \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

によって定める．

以下では I によって開区間を表すものとする．

$\gamma: I \rightarrow H_+^2$ を単位速度曲線とする． γ の測地的曲率を $\kappa_g(s)$ で表す． $\kappa_g(s)$ は

$$\kappa_g(s) = |\gamma(s), \gamma'(s), \gamma''(s)|$$

で与えられる．単位接線ベクトル $\gamma'(s)$ を $\mathbf{t}(s)$ で表す．またベクトル $\mathbf{e}(s)$ を $\mathbf{e}(s) := \gamma(s) \wedge \mathbf{t}(s)$ によって定める．このとき $\{\gamma(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{e}(s)\}$ は γ に沿う $\mathbb{R}_1^3$ の擬正規直交枠をなす．擬正規直交枠 $\{\gamma(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{e}(s)\}$ に対して次の Frenet-Serret 型の公式

$$\begin{cases} \gamma'(s) &= \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{t}'(s) &= \gamma(s) + \kappa_g(s) \mathbf{e}(s) \\ \mathbf{e}'(s) &= -\kappa_g(s) \mathbf{t}(s) \end{cases}$$

が成り立つ． $\alpha \in \mathbb{R}$ を 1 つ取り固定する．このとき

$$\mathbf{a}_{1,\alpha}(s) := \mathbf{t}(s) \cos \alpha + \mathbf{e}(s) \sin \alpha, \quad \mathbf{a}_{2,\alpha}(s) := -\mathbf{t}(s) \sin \alpha + \mathbf{e}(s) \cos \alpha$$

とおけば $\{\gamma(s), \mathbf{a}_{1,\alpha}(s), \mathbf{a}_{2,\alpha}(s)\}$ は γ に沿う $\mathbb{R}_1^3$ の擬正規直交枠となる。

各 $s \in I$ に対して、点 $\gamma(s)$ を通りその点において曲線 γ と角度 α をなすようなホロ円を $\Gamma_\alpha(s)$ で表す。ホロ円の族 $\{\Gamma_\alpha(s)\}_{s \in I}$ の包絡線を **horocyclic evolutoid** とよぶ ([1] 参照)。 γ の horocyclic evolutoid を g_α で表す。

3 Wavefronts

$\gamma: I \rightarrow H_+^2$ を単位速度曲線とする。 $\alpha \in \mathbb{R}$ を 1 つ取り固定する。 まず以下の条件をみたす曲線 $\tilde{P}: I \rightarrow H_+^2$ を見つける。

(1) 関数 $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して、各 $s \in I$ に対して

$$\tilde{P}(s) = \gamma(s) + \varphi(s)\mathbf{a}_{1,\alpha}(s) + \frac{\varphi(s)^2}{2}(\gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s))$$

が成り立つ。

(2) 各 $s \in I$ に対して

$$\langle \tilde{P}'(s), \mathbf{a}_{1,\alpha}(s) + \varphi(s)(\gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s)) \rangle = 0$$

が成り立つ。

上記の 2 条件から微分方程式

$$\varphi'(s) = \frac{1}{2}(\cos \alpha - \kappa_g(s))\varphi(s)^2 + \varphi(s) \sin \alpha - \cos \alpha$$

を得る。この微分方程式の解は一般には爆発する。そこでこの微分方程式を $\mathbb{R}P^1$ 上で考える。 $\sigma \in I$ を 1 つ取り固定する。各 $r \in \mathbb{R}$ に対して (σ, r) を通るこの微分方程式の解を $\varphi_r: I \rightarrow \mathbb{R}P^1$ で表す。以後、 $\mathbb{R}P^1$ の局所座標を用いて $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}P^1$ とみなす。 $r \in \mathbb{R}$ とする。 $s_0 \in I$ を $\varphi_r(s_0) \in \mathbb{R}$ なる点とすると曲線 $\tilde{P}_r: (I, s_0) \rightarrow H_+^2$ を

$$\tilde{P}_r(s) := \gamma(s) + \varphi_r(s)\mathbf{a}_{1,\alpha}(s) + \frac{\varphi_r(s)^2}{2}(\gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s))$$

によって定義することができる。そこで曲線 $P_r: I \rightarrow \bar{D}$ を

$$P_r(s) := \begin{cases} \Pi \circ \tilde{P}_r(s) & \varphi_r(s) \in \mathbb{R} \\ \left(\frac{\gamma_2(s) + (\mathbf{a}_{2,\alpha})_2(s)}{\gamma_1(s) + (\mathbf{a}_{2,\alpha})_1(s)}, \frac{\gamma_3(s) + (\mathbf{a}_{2,\alpha})_3(s)}{\gamma_1(s) + (\mathbf{a}_{2,\alpha})_1(s)} \right) & \varphi_r(s) = \infty \end{cases}$$

で定義する。

P_r を horocyclic evolutoid g_α に対応する **wavefront** とよぶ. とくに $\alpha = \pm\pi/2$ のとき P_r をホロ円的平行曲線とよぶ.

注意. $r \in \mathbb{R}$ を十分大きくとれば P_r は必ず境界 ∂D に到達する ([4] 参照).

命題 3.1. $s_0 \in I$ を $P_r(s_0) \in D$ かつ $\cos \alpha \neq \kappa_g(s_0)$ をみたす点とする. このとき曲線 $\tilde{P}_r$ が点 $s = s_0$ において特異点をもつための必要十分条件は $\tilde{P}_r(s_0) = g_\alpha(s_0)$ が成り立つことである.

4 Wavefront の特異点

本節では, 前節で定義した wavefront の特異点について考察する.

$\gamma: I \rightarrow H_+^2$ を単位速度曲線とする. $\alpha, r \in \mathbb{R}$ をそれぞれ 1 つずつ取り固定する. 次に

$$\delta_\alpha(s) := 2\kappa'_g(s) \sin \alpha - 2\kappa_g^2(s) \cos \alpha + (3 \cos^2 \alpha + 1) \kappa_g(s) - \cos^3 \alpha - \cos \alpha$$

と定義する.

注意. もし $\cos \alpha \neq \kappa_g(s)$ ならば [3, p. 60] において定義された不変量 $\delta[0]_1$ および $\delta[0]_2$ について

$$\begin{aligned} \delta[0]_1(s) &= 0 \iff \delta_\alpha(s) = 0, \\ \delta[0]_2(s) &= 0 \iff \delta'_\alpha(s) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ.

(I) $P_r(s_0) \in D$

$s_0 \in I$ を $P_r(s_0) \in D$ なる点とする.

$$\lambda_r(s) := \kappa_g(s) \varphi_r(s) - \varphi_r(s) \cos \alpha - \sin \alpha$$

とおく. このとき曲線 P_r が点 $s = s_0$ において特異点をもつための必要十分条件は $\lambda_r(s_0) = 0$ が成り立つことである.

[9, Proposition 1.22, Theorem 1.23, Proposition 4.9] により以下の定理を得る.

定理 4.1. 曲線 P_r は点 $s = s_0$ において特異点をもつものとする. このとき

(A) $\cos \alpha \neq \kappa_g(s_0)$.

(1) P_r が s_0 において $3/2$ カスプをもつための必要十分条件は $\delta_\alpha(s_0) \neq 0$ が成り立つことである.

- (2) P_r が s_0 において $4/3$ カスパをもつための必要十分条件は $\delta_\alpha(s_0) = 0$ かつ $\delta'_\alpha(s_0) \neq 0$ が成り立つことである.

(B) $\cos \alpha = \kappa_g(s_0)$.

- (1) $\tilde{P}_r$ が s_0 において $5/2$ カスパをもつための必要十分条件は $\tilde{P}_r(s_0) \neq \gamma(s_0)$ かつ $\kappa'_g(s_0) \neq 0$ が成り立つことである.
- (2) $\tilde{P}_r(s_0) = \gamma(s_0)$ とする. このとき P_r が s_0 において曲線 $t \mapsto (t^3, t^5)$ になるための必要十分条件は $\kappa'_g(s_0) \neq 0$ が成り立つことである.

(II) $P_r(s_0) \in \partial D$

定理 4.2. $s_0 \in I$ を $P_r(s_0) \in \partial D$ なる点とする. このとき

- (1) 曲線 P_r は点 $s = s_0$ において特異点をもつ.
- (2) P_r が s_0 において $4/3$ カスパをもつための必要十分条件は $\cos \alpha \neq \kappa_g(s_0)$ が成り立つことである.

定理 4.1 および [1, 命題 4.1] により以下の系を得る.

系 4.3. $s_0 \in I$ を $P_r(s_0) \in D$ なる点とし $\cos \alpha \neq \kappa_g(s_0)$ とする. このとき

- (1) P_r が s_0 において $3/2$ カスパをもつとき点 s_0 は g_α の正則点となる.
- (2) P_r が s_0 において $4/3$ カスパをもつとき g_α は s_0 において $3/2$ カスパをもつ.

5 Wavefronts からなる曲面

$\gamma : I \rightarrow H_+^2$ を単位速度曲線とする. $\alpha \in \mathbb{R}$ を 1 つ取り固定する. 本節では, $r \in \mathbb{R}$ を動かしたときに得られる曲面の特異点について考察する.

曲面 $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \bar{D} \times \mathbb{R}$ を $F(s, r) := (P_r(s), r)$ で定義する. $\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^1$ を $\varphi(s, r) := \varphi_r(s)$ で定義する.

(I) $P_{r_0}(s_0) \in D$

$(s_0, r_0) \in I \times \mathbb{R}$ を $P_{r_0}(s_0) \in D$ なる点とする. このとき曲面 F が点 (s_0, r_0) において特異点をもつための必要十分条件は $\lambda_{r_0}(s_0) = 0$ が成り立つことである.

曲面 $\tilde{F} : (I \times \mathbb{R}, (s_0, r_0)) \rightarrow H_+^2 \times \mathbb{R}$ を $\tilde{F}(s, r) := (\tilde{P}_r(s), r)$ で定める. 包含写像 $H_+^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ により H_+^2 の接空間を $\mathbb{R}^3$ の部分空間とみなす. $\tilde{F}$ に沿う単位ベク

トル場 ν を

$$\nu(s, r) := \frac{1}{\sqrt{(\partial\varphi/\partial r(s, r))^2 + 1}} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,\alpha}(s) + \varphi(s, r)(\gamma(s) + \mathbf{a}_{2,\alpha}(s)) \\ -\partial\varphi/\partial r(s, r) \end{pmatrix}$$

によって定める. ν は単位法線ベクトル場を定義するので $\tilde{F}$ はフロンタルである. $\cos \alpha \neq \kappa_g(s_0)$ ならば $\tilde{F} : (I \times \mathbb{R}, (s_0, r_0)) \rightarrow H_+^2 \times \mathbb{R}$ は波面芽となる.

[8, Proposition 1.3] により以下の定理を得る.

定理 5.1. 曲面 F は点 (s_0, r_0) において特異点をもつものとする. このとき

(A) $\cos \alpha \neq \kappa_g(s_0)$.

(1) F が (s_0, r_0) においてカスプ辺 $(u, v) \mapsto (u^2, u^3, v)$ になるための必要十分条件は $\delta_\alpha(s_0) \neq 0$ が成り立つことである.

(2) $\partial\varphi/\partial r(s_0, r_0) \neq 0$ とする. このとき F が (s_0, r_0) においてツバメの尾 $(u, v) \mapsto (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$ になるための必要十分条件は $\delta_\alpha(s_0) = 0$ かつ $\delta'_\alpha(s_0) \neq 0$ が成り立つことである.

注意. $\partial\varphi/\partial r(s_0, r_0) \neq 0$ ならば点 (s_0, r_0) は非退化である.

(B) $\cos \alpha = \kappa_g(s_0)$.

F が (s_0, r_0) において $5/2$ カスプ辺 $(u, v) \mapsto (u^2, u^5, v)$ になるための必要十分条件は点 (s_0, r_0) が非退化になることである.

注意. 点 (s_0, r_0) が非退化であるための必要十分条件は $\kappa'_g(s_0) \neq 0$ かつ $\varphi(s_0, r_0) \neq 0$ が成り立つことである.

(II) $P_{r_0}(s_0) \in \partial D$

定理 5.2. $(s_0, r_0) \in I \times \mathbb{R}$ を $P_{r_0}(s_0) \in \partial D$ なる点とする. このとき F が (s_0, r_0) において曲面 $(u, v) \mapsto (u^3, u^4, v)$ になるための必要十分条件は $\cos \alpha \neq \kappa_g(s_0)$ が成り立つことである.

$(s_0, r_0) \in I \times \mathbb{R}$ を $P_{r_0}(s_0) \in D$ なる点とし, F は点 (s_0, r_0) において特異点をもつとする. さらに $\cos \alpha = \kappa_g(s_0)$ かつ $\tilde{P}_{r_0}(s_0) = \gamma(s_0)$ を仮定する. このとき $\sin \alpha = 0$ となり $\kappa_g(s_0) = \pm 1$ を得る. したがって horocyclic evolutoid は曲線 γ とホロ円とからなり $\gamma(s_0)$ を通るホロ円はその点において曲線 γ と接していることがわかる. さらに $\kappa'_g(s_0) \neq 0$ かつ $\partial\varphi/\partial r(s_0, r_0) \neq 0$ を仮定すると, 曲線 γ に沿って $3/2$ カスプが連なり, $\gamma(s_0)$ を通るホロ円に沿って $5/2$ カスプが連なる. そうしてそれぞれの曲線がカスプ辺に

なっている. さらに曲線 P_{r_0} は s_0 において曲線 $t \mapsto (t^3, t^5)$ に $\mathcal{A}$ 同値となる. そこで次の予想をたてる.

予想 5.3. 上記の仮定の下で F は点 (s_0, r_0) において曲面

$$(u, v) \mapsto (u, v^3 + uv^2, 12v^5 + 10uv^4)$$

に $\mathcal{A}$ 同値である ([2], [10] 参照).

参考文献

1. 青砥 禎彦, *Horocyclic evolutoids*, 京都大学数理解析研究所講究録, **2049** (2017), 109–115.
2. Arnol'd, V. I., *Singularities of systems of rays*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983), 27–49, PWN, Warsaw, 1984.
3. Ashino, T., Ichiwara, H., and Izumiya, S., *Envelopes of slant lines in the hyperbolic plane*, Note Mat. 35 (2015), 51–67.
4. Bahk, S. Y., Dyakevich, N. E., and Johnson, S. C., *Long term behavior of solutions for Riccati initial-value problems*, Electron. J. Differential Equations 2008 (2008), 1–8.
5. Giblin, P. J., and Warder, J. P., *Evolving Evolutoids*, Amer. Math. Monthly 121 (2014), 871–889.
6. Hamann, M., *A note on ovals and their evolutoides*, Beiträge Algebra Geom. 50 (2009), 433–441.
7. Izumiya, S., Pei, D., and Sano, T., *Singularities of hyperbolic Gauss maps*, Proc. London Math. Soc. 86 (2003), 485–512.
8. Kokubo, M., Rossman, W., Saji, K., Umehara, M., and Yamada, K., *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math. 221 (2005), 303–351.
9. Porteous, I. R., *Geometric differentiation for the intelligence of curves and surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
10. Shcherbak, O. P., *Singularities of families of evolvents in the neighborhood of an inflection point of the curve, and the group H_3 generated by reflections*, Functional Anal. Appl. 17 (1983), 301–303.

11. Wunderlich, W., *Über die Evolutoiden der Ellipse*, Elem. Math. 10 (1955), 37–40.