

Γ -葉層構造と transverse projectable

connections について

北大 理 鈴木 治夫

§1 序

G をリー群, E を主 G -束とする. $\pi: G \rightarrow G'$ を G からリー群 G' への準同形写像とし, E' を π によって E に associate された主 G' -束とする. 主束における葉層構造は, 平坦部分接続として特性づけられる [1]. この報告において, まず E が葉層構造をもつならば, E' も葉層構造をもつ, さらに E が transverse projectable connection をもつならば, E' もまたそのような接続をもつことを示す.

半単純等質空間 L/L_0 に associate された 2 次の L_0 -構造 Q の局所同形変換の擬群を Γ とする. 多様体 M 上の Γ -葉層構造 π に対し, π の局所 1 ずつめに π による Q のひきもどしから定まる M 上の主 L_0 -束を $\tilde{Q}$ とし, その L -拡大を $\tilde{Q}^L$ とかくことにする [3, 4, 5, 6]. 構造群の準同形写像による transverse projectable connection の移行性を用いて, かぎり大きい

範囲の Γ -葉層構造系に対し, $\tilde{Q}^L$ に associate されたベクトル束 W を構成して, これが葉の法ベクトル束 $V(\mathcal{F})$ を含み, その枠束 $P(W)$ が transverse projectable connection をもつよにできる. これは $V(\mathcal{F})$ の枠束における transverse projectable connection の一般化とみなされる.

以下, 多様体と写像はすべて C^∞ -級とする.

§2 部分接続と主束における葉層構造

M を n 次元多様体, $\bar{h}: G \rightarrow G'$ をリー群の準同形写像とする. E を M の上の主 G -束とし, $p: E \rightarrow M$ をその射影写像とする. $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}$ を主 G -束 E の局所座標系とし, $\pi: U_\lambda \times G \rightarrow G$ を自然な射影写像とする. E 上の右 G -作用, $E \times G \rightarrow E$, $(u, g) \mapsto u \cdot g$ が

$$(i) \quad p(u) = p(u \cdot g),$$

$$(ii) \quad \pi \circ \phi_\lambda(u \cdot g) = (\pi \circ \phi_\lambda(u)) \cdot g, \quad u \in p^{-1}(U_\lambda)$$

によって定義される.

G の準同形写像 $\bar{h}$ を通しての G' の上の左作用によって, E に associate された主 G' -束を E' とする. すなわち

$$E' = E \times_G G'$$

である. あきらかに $E = E \times_G G$ であるから, 写像 $\text{id} \times \bar{h}: E \times G \rightarrow E \times G'$ はファイバー写像

$$R_E: E = (E \times G)/G \rightarrow E' = (E \times G')/G'$$

を定義し、各 $u \in E$, $g \in G$ に対し

$$R_E(u \cdot g) = R_E(u) \cdot R(g)$$

と定める。

主束 E における部分接続 H は、接ベクトル束 $T(E)$ における部分ベクトル束 H で、次の条件を満たすものである：

(i) 各 $u \in E$ に対し、 G_u を u を通るファイバーの接ベクトル空間とするとき、 $H_u \cap G_u = \{0\}$ 。

(ii) 各 $u \in E$ および $g \in G$ に対し、 E 上の g の左作用を R_g と表わすとき、 $H_{u \cdot g} = (R_g)_* H_u$ 。

$H \subset T(E)$ の G -同変性により、各 $x \in M$ に対し、 $p(u) = x$ とすると $F_x = p_* H_u$ が u によらないで定まり、 $\{F_x \mid x \in M\}$ は部分ベクトル束 $F \subset T(M)$ となる。

H が E における部分接続ならば、 R によって E は associate された主 G' -束 E' において部分接続 H' が定まり、各 $u \in E$ に対し

$$R_{E*}(H_u) = H'_{R_E(u)}$$

と定める。このような H' は一意である。 H が E における部分接続ならば、 H' は E' における部分接続 H' となる。

E における部分接続 $H \subset T(E)$ は、 H が部分ベクトル束として包含的であるとき平坦であるという。主 G -束 E は、そ

れが平坦な部分接続をもつとき、葉層的であるという。 H が平坦なとき、 H によって定まる E' の部分接続 H' も平坦となる。 H を E の平坦な部分接続とすると、包含的部分ベクトル束 $H \subset T(E)$ の積分多様体は E の葉層構造を定める。これを π_E とかく。 $T(M)$ の部分ベクトル束 $p^*H = F$ もまた包含的となり、その積分多様体は M の葉層構造 π を定める。 π_E を π のリフトという。葉層構造 π_E をもつ M の上の主 G -束 E を、葉層構造をもつ多様体 (M, π) の上の葉層的主 G -束 とよび、 $E(M, p, G, \pi_E)$ とかく。 p によって E に associate された主 G' -束 E' も、また (M, π) の上の葉層的主 G' -束となることが確かめられる。 E' における π のリフトを $\pi_{E'}$ とかく。

H を主 G -束 E の部分接続とする。 E の接続 $\mathcal{H}$ は、各 $u \in E$ に対して $H_u \subset \mathcal{H}_u$ となるとき、 H に適合するということにする。平坦な部分接続 H に対して $\mathcal{H}$ が適合するならば、 $\mathcal{H}$ は H によって定義される葉層構造に、transverse であるという。 $\tilde{E}$ も多様体 N の上の主 G -束で、 $\tilde{f}: \tilde{E} \rightarrow E$ を G -束写像とする。各 $u \in \tilde{E}$ における接ベクトル部分空間族 $\tilde{\mathcal{H}}_u = \tilde{f}_*^{-1}(\mathcal{H}_{f(u)}) \cap T_u(\tilde{E})$ は、 $\tilde{E}$ における接続を定める。 $\tilde{\mathcal{H}}$ を $\mathcal{H}$ から $\tilde{f}$ によって引きおこされた接続とよび、 $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{f}^* \mathcal{H}$ とかき表わす。 $E = E(M, p, G, \pi_E)$ を葉層構造をもつ多様体 (M, π) 上の葉層的主 G -束とし、 $\mathcal{H}$ を π_E に transverse な接続とする。 $\mathcal{H}$

は、それが局所的に π の局所 1 ずめの α の上の G -束写像によって、像多様体上の接続から引きおこされた接続となるとを、projectable とよばれる。 H を π_E によって定まる平坦な部分接続とし、 f を上に述べた π の局所 1 ずめの α の上の G -束写像とすると、各 $u \in E$ に対して $Hu = \ker(f_*|T_u(E))$ となる。したがって $\mathcal{H}$ は H に適合し、 f は π_E の局所 1 ずめの α となる。接続の局所的考察により、次の定理を得る。

定理 1 $E(M, p, G, \pi_E)$ を葉層的主 G -束、 $E'(M, p', G', \pi_{E'})$ をリー群の準同形写像によって $E(M, p, G, \pi_E)$ に associate された葉層的主 G' -束とする。 $E(M, p, G, \pi_E)$ における接続 $\mathcal{H}$ が π_E に transverse ならば、 $\mathcal{H}$ によって定まる $E'(M, p', G', \pi_{E'})$ における接続 $\mathcal{H}'$ も $\pi_{E'}$ に transverse である。さらに $E(M, p, G, \pi_E)$ における transverse な接続 $\mathcal{H}$ が projectable ならば、 $E'(M, p', G', \pi_{E'})$ における transverse な接続 $\mathcal{H}'$ もまた projectable となる。

§ 3 Γ -葉層構造

Γ を q 次元多様体 B 上に作用する局所変換の擬群とし、 π を n 次元多様体 M 上の余次元 q の Γ -葉層構造とする。すなわち M の開集合 U_α から B への 1 ずめの α

$$f_\alpha: U_\alpha \rightarrow B$$

の極大族であって、

(i) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ が M の開被覆となり,

(ii) 各 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ ($\alpha, \beta \in \Lambda$) に対し, 元 $\gamma_{\beta\alpha}^x \in \Gamma$ が存在し,
 x のある近傍の上で $f_\beta = \gamma_{\beta\alpha}^x \circ f_\alpha$ となるものである.

B の点の族による逆像は π の "局所的" 右葉であり, $\ker(f_{\alpha*})$ は π に対する部分接ベクトル束 $F \subset T(M)$ を定める. 剰余ベクトル束 $V(\pi) = T(M)/F$ を π の法ベクトル束という.

$\Gamma(B)$ を B の局所微分位相同形写像の擬群とし, $0 \in B$ を固定する. 各整数 $k \geq 1$ に対し, $P^k(B)$ を 0 のまわりの局所微分位相同形写像 $f \in \Gamma(B)$ の k -ジェット $j_0^k(f)$ 全体の集合とする. $G^k(q) = \{j_0^k(f) \in P^k(B) \mid f(0) = 0\}$ とおく. $\mathbb{R}^n$ 上の $GL(q; \mathbb{R})$ -値関数の r -ジェットの反す群を $(GL(q; \mathbb{R}))_n^r$ とかくことにすれば, k に関する帰納法により, $G^k(q) \subset (GL(q; \mathbb{R}))_n^{k-1}$ がいえる. $P^k(B)$ は, 射影写像 $\pi^k: P^k(B) \rightarrow B$ を $\pi^k(j_0^k(f)) = f(0)$ と定めることにより, B 上の自然な主 $G^k(q)$ -束となる. 0 のまわりに作用する局所微分位相同形写像 $f \in \Gamma(B)$ は, $j_0^k(q) \in P^k(B)$ に対し

$$f^{(k)}(j_0^k(q)) = j_0^k(f \circ q)$$

と定めることにより, 自然に $P^k(B)$ の局所束同形写像 $f^{(k)}$ に拡張される. $f^{(k)}$ を f の prolongation とよぶ.

M 上の Γ -葉層構造 π において, 擬群 Γ を $\Gamma(B)$ に置きかえて得られる $\Gamma(B)$ -葉層構造を π とする. $U \subset M$ を開集合と

し、

$$P^k(\mathcal{A}) = \{j_x^k(f_U) \mid f_U \in \mathcal{A}, x \in U, f_U(x) = 0\}$$

とあり、 $j_x^k(f_U) \in P^k(\mathcal{A})$, $j_0^k(h) \in G^k(q)$ とするとき、 $G^k(q)$ は $P^k(\mathcal{A})$ の上から $j_x^k(f_U) \cdot j_0^k(h) = j_x^k(h^T \circ f_U)$ によって作用し、 $P^k(\mathcal{A})$ は射影写像 $p^k: P^k(\mathcal{A}) \rightarrow M$ を $p^k(j_x^k(f_U)) = x$ と定めることにより、 M 上の主 $G^k(q)$ -束となる。実際 $\mathcal{A}$ の局所1つめ U の近傍 U をとるとき、 $G^k(q)$ -束同形

$$S_U^x(P^k(B)) \xrightarrow{\cong} P^k(\mathcal{A})|_U$$

が $j_0^k(q) \in P^k(B)$ に対し、 $(x, j_0^k(q)) \mapsto j_x^k(f_U)$ によって得られ、これが $P^k(\mathcal{A})$ の局所自明性を与える。

定理 2 $k \geq 1$ に対し、 $P^k(\mathcal{A})$ は $V(\mathcal{A})$ の $(k-1)$ -ジェット束、 $J^{k-1}(V(\mathcal{A}))$ に associate された主 $G^k(q)$ -束となる。

証明 $\mathcal{A}$ の局所1つめ $U_x \rightarrow B$ に対し、 $f_x(U_x)$ が B の局所座標近傍となると仮定しよう。 $f_x^*(T(B))$ は $V(\mathcal{A})$ の U_x 上の局所座標を与える。各 $x \in U_x \cap U_y$ に対し $\gamma_{yx}^x \in \Gamma \subset \Gamma(B)$ が存在し、 x の近傍で $f_y = \gamma_{yx}^x \circ f_x$ となることから、 γ_{yx}^x は局所座標 $f_x^*(T(B))$ から $f_y^*(T(B))$ への座標変換となる。したがって、 $P^1(\mathcal{A})$ は $V(\mathcal{A})$ に associate された主 $GL(q; \mathbb{R})$ -束となる。各 $x \in U_x \cap U_y$ に対し、 $J^{k-1}(V(\mathcal{A}))$ の局所座標 $J^{k-1}(f_x^*(T(B)))$ から $J^{k-1}(f_y^*(T(B)))$ への座標変換は、

$$j_{f_x(x)}^{k-1}(\gamma_{yx}^x) = j_{f_y(x)}^{k-1}(j_{f_x(x)}^1(\gamma_{yx}^x))$$

となり, 自然反同一視 $G^k(\mathfrak{g}) \subset (GL(\mathfrak{g}; \mathbb{R}))_q^{k-1}$ の下で右辺は $\hat{\alpha}_{\beta\alpha}^k(\gamma_{\beta\alpha}^x)$ とみ込まれる. これは $P^k(\mathfrak{g})$ の局所座標 $\hat{\alpha}^k(P^k(B))$ から $\hat{\alpha}^k(P^k(B))$ の座標変換と見る. 証明終

§ 4 Transverse projectable connection の構成

L を半単純リー群, L_0 をその閉部分群とし, L/L_0 が連結な等質空間であるとする. L のリー環 $\mathfrak{l}$ が次数つきリー環構造 $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ を持ち, $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ が L_0 のリー環となるとき, L/L_0 を半単純平坦等質空間という. $\mathfrak{l}$ は L/L_0 に associate された次数つきリー環とよばれる. $\dim \mathfrak{g}_1 = q$ とするとき, 中 $\wedge$ の準同形写像 $\text{Exp}: \mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^q \rightarrow L/L_0$ が $x \mapsto (\exp x) L_0$ によって定まる. これを用いて, 自然写像 $\iota: L_0 \rightarrow G^2(\mathfrak{g})$ が $\iota(a) = j_0^2(\text{Exp}^{-1} \cdot a \cdot \text{Exp})$ によって定義され, ι は単射準同形写像であることがよく知られている [5]. ι によって L_0 は $G^2(\mathfrak{g})$ の部分群とみ込まれる.

B 上の主 $G^2(\mathfrak{g})$ -束 $P^2(B)$ の L_0 -reduction Q を半単純平坦等質空間 L/L_0 に associate された 2 次の L_0 -構造とよび, $\gamma^{(2)} \in \gamma \in \Gamma(B)$ の 2 次 prolongation とし, $\Gamma = \{\gamma \in \Gamma(B) \mid \gamma^{(2)} Q \subset Q\}$ とかくことにする. これを Q の局所同形写像の擬群とよび, 以下, Γ はこの Γ に対する多様体 M 上の Γ -葉層構造を表わすものとする. $\gamma^{(2)}$ は L_0 -reduction Q を保つから, $\{\hat{\alpha}^k Q\}_{\alpha \in \Lambda}$ は

M 上の主 L_0 -束 $\tilde{Q}$ を定め、これはまた $P^2(\mathfrak{F})$ の L_0 -reduction と
なる。 $Q^L = Q \times_{L_0} L$, $\tilde{Q}^L = \tilde{Q} \times_{L_0} L$ と置き、 $p^L: Q^L \rightarrow M$, $\tilde{p}^L: \tilde{Q}^L$
 $\rightarrow M$ をその射影写像とする。 また $\hat{\gamma}^{(2)}: Q^L|_U \rightarrow Q^L|_{\gamma(U)}$ を、 γ
 $\in \Gamma$ によって引き起こされた Q^L の局所同形写像、 $\hat{f}_\alpha^{(2)}: Q^L|_{U_\alpha} \rightarrow$
 $Q^L|_{f_\alpha(U_\alpha)}$ を $f_\alpha \in \mathfrak{F}$ によって引き起こされた局所束写像を表わす
ものとする。

可換リ-環 $\mathfrak{g}_1$ の $\mathbb{C}$ 上の adjoint representation に関するコホモ
ロジ- を $H^{p,q}(\mathfrak{g}) = H^{p,q}(\mathfrak{g}_1, \text{ad } \mathfrak{g}_1)$, $H(\mathfrak{g}) = \sum H^{p,q}(\mathfrak{g})$ とする。
これは $\mathfrak{g}$ の Spencer コホモロジ- とよばれる。

定理 3 $H^{2,1}(\mathfrak{g}) = 0$ とする。

(i) (田中-落合 [5, 6]) Q^L 上の接続 ω が存在し、 $\gamma \in \Gamma$
に対して $\hat{\gamma}^{(2)*} \omega = \omega$ となる。 ω は L/L_0 形 Cartan normal connec-
tion とよばれるものである。

(ii) (西川-佐藤-竹内 [3, 4]) $\{\hat{\gamma}_\alpha^{(2)*} \omega\}_{\alpha \in \Lambda}$ は $\tilde{Q}^L$ 上の大域
的接続 $\tilde{\omega}$ を定める。

さらに $\tilde{\omega}$ は葉層的主 L -束に関する接続となることが、次
の補題により示される。

補題 4 $\tilde{Q}^L$ において $\mathfrak{F}$ のリフト $\mathfrak{F}(\tilde{Q}^L)$ が存在し、定理 3 (ii) の
接続 $\tilde{\omega}$ は $\mathfrak{F}(\tilde{Q}^L)$ に関し、transverse projectable となる。

証明 $\hat{F} = \{v \in T(\tilde{Q}^L) \mid \hat{p}^L(v) \in F, \tilde{\omega}(v) = 0\}$ とおく。 $\mathfrak{F}$ の局所 U
3' の $f_\alpha: U_\alpha \rightarrow B$ をとり、 $F|_{U_\alpha}$ および $Q^L|_{f_\alpha(U_\alpha)}$ が自明となる

ようにすれば, $\tilde{F}|_{U_\alpha}$ が自明となり, $\tilde{\pi}$ の局所自明性がいえるから, $\tilde{F}$ は $\pi(\tilde{Q}^L)$ の部分ベクトル束となる. 局所1つめの2写像族 $\{\tilde{f}_\alpha^{(2)}: \tilde{Q}^L|_{U_\alpha} \rightarrow Q^L|_{f_\alpha(U_\alpha)}\}$ と局所同形写像族

$$\{(\tilde{\sigma}_{\beta\alpha}^x)^{(2)} \mid \alpha, \beta \in \Lambda, x \in U_\alpha \cap U_\beta\}$$

は $\tilde{F}$ の積分多様体族を与えるから, $\tilde{Q}^L$ の葉層構造 $\pi(\tilde{Q}^L)$ が定まる. $\tilde{F}$ の定め方から, $\pi(\tilde{Q}^L)$ は $\tilde{p}^L: \tilde{Q}^L \rightarrow M$ に関する π のリフトであり, $\tilde{\omega}$ は $\pi(\tilde{Q}^L)$ に関して transverse となる. さらに $\tilde{\omega}|_{U_\alpha} = \tilde{f}_\alpha^{(2)*} \omega$ であるから, $\tilde{\omega}$ は projectable である. 証明終

代数的方法により, 次の補題が証明される.

補題 5 L をリー群, $L_0 \subset L$ を部分群とし, V を多様体 M の上のベクトル束で, L_0 を構造群にきつとする. $\phi: L \rightarrow GL(r; R)$ を線形表現で $\phi|_{L_0}$ が faithful であるとする. $P \in V$ に associate された L_0 -束とし, $P^L \in P$ の L -拡大とすると, P^L に associate された M 上のベクトル束 W が存在し, V がその部分ベクトル束となる.

以上の準備の下で, 次の定理が得られる.

定理 6 L/L_0 を q 次元半単純平坦等質空間, $\mathcal{L}$ を L/L_0 に associate された次数 ℓ のリー環とし, $H^{2,1}(\mathcal{L}) = 0$ とする. $\phi: L \rightarrow GL(r; R)$ を線形表現で $\phi|_{L_0}$ が faithful となるものとする. また Γ を L/L_0 に associate された, q 次元多様体上の2次の L_0 -構造 Q の局所同形写像から成る擬群とする. π が n

次元 ($n \geq g$) 多様体上の, 余次元 g の Γ -葉層構造な Ω^L に associate されたベクトル束 W が存在し, Ω^L の法ベクトル束, $V(\Omega^L)$ を含み, その枠束 $P(W)$ が transverse projectable connection をもつ.

証明 定理 2 により, $P^2(\Omega^L)$ は $J^1(V(\Omega^L))$ に associate された $G^2(g)$ -束であり, したがって $P^2(\Omega^L)$ の L_0 -reduction $\tilde{Q} \rightarrow J^1(V(\Omega^L))$ に associate された $\pm L_0$ -束である. 補題 5 の V と $1 \rightarrow J^1(V(\Omega^L))$, P と $1 \rightarrow \tilde{Q}$ をとると, $\tilde{Q}^L$ に associate されたベクトル束 W が存在し, $J^1(V(\Omega^L))$ を部分ベクトル束として含み, したがって $V(\Omega^L)$ を含む. また $\tilde{Q}^L$ は補題 4 によって transverse projectable connection をもつ. 定理 1 によってこの性質は W の枠束 $P(W)$ に移される. 証明終

任意の半単純リー環 $\mathfrak{g}$ に対して, 線形表現 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ の存在がわかってゐる.

文 献

- [1] F. W. Kamber and Ph. Tondeur, Foliated bundles and characteristic classes, Lecture Notes in Mathematics 493, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1975.
- [2] P. Molino, Classe d'Atiyah d'un feuilletage et connexions

- transverses projectables, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 272 (1971), 779-781.
- [3] S. Nishikawa and H. Sato, On characteristic classes of riemannian, conformal and projective foliations, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 223-241.
- [4] S. Nishikawa and M. Takeuchi, T-foliations and semisimple flat homogeneous spaces, Tôhoku Math. J. (2) 30 (1978), 309-335.
- [5] T. Ochiai, Geometry associated with semisimple flat homogeneous spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970) 159-193.
- [6] N. Tanaka, On the equivalence problems associated with a certain class of homogeneous spaces, J. Math. Soc. Japan 17 (1965), 105-139.