

Korteweg - de Vries 方程式

Camelby 問題の解の大域的存在定理

大阪府立大 工 亀高 惟倫

Y. Kametaka : Korteweg-de Vries equation I, II, IV,
Proc. Japan Acad. vol. 45 No. 7, 8 (1969) の結果
を紹介する。dissipative 型線型な低階項及び非斉次項を付
加した KdV 方程式に対する Camelby 問題を考える。

$$(1) \begin{cases} D_t u + u D u + D^3 u - \mu D^2 u + a(x, t) D u + b(x, t) u + g(x, t) = 0 \\ (x, t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad \left(D_t = \frac{\partial}{\partial t}, D = \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{cases}$$

定義: $p_l^k = \mathcal{E}_{l,loc}^k(\mathbb{R}^1) \cap \{ \text{functions with period } l \}$
 $Q_l^k = p_l^k + \mathcal{E}_l^k$ (直和) と記号を約束する。

仮定. 1 $\mu \geq 0$ (定数) $a(x, t), b(x, t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{B}^\infty)$
仮定. 2 $\mu \geq 0$ (定数) $a(x, t), b(x, t) \in \mathcal{E}_t^\infty(p_l^\infty)$

[主要定理]

①、 $f(x) \in \mathcal{E}_L^\infty$, $g(x,t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{E}_L^\infty)$ と g が C_{unclng} 問題 (1) は $0 \leq t < \infty$ には $\exists$ 唯一 $u(x,t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{E}_L^\infty)$ なる一意の解を持つ。(仮定 1 の下で)

②、① には $\mathcal{E}_L^\infty \subset \mathcal{D}_L^\infty$ で置きかえよう。(仮定 2)

③、仮定 2 の下で $f(x) = f_0(x) + f_1(x) \in \mathcal{Q}_L^\infty$

$g(x,t) = g_0(x,t) + g_1(x,t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{Q}_L^\infty)$ と g が C_{unclng} 問題 (1) は $0 \leq t < \infty$ には $\exists$ 唯一 $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{Q}_L^\infty)$ なる一意の解を持つ。解 $u(x,t)$ の周期部分 $u_0(x,t)$ は ∞ decay する部分 $u_1(x,t)$ は ∞ まで C_{unclng} 問題 (2) 及び (3) の解である。

$$(2) \begin{cases} D_t u_0 + u_0 D u_0 + D^3 u_0 - \mu D^2 u_0 + a(x,t) D u_0 + b(x,t) u_0 + g_0(x,t) = 0 \\ (x,t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, \infty) \\ u_0(x,0) = f_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} D_t u_1 + u_1 D u_1 + D^3 u_1 - \mu D^2 u_1 + D(u_0 u_1) + a(x,t) D u_1 + b(x,t) u_1 + g_1(x,t) = 0 \\ (x,t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, \infty) \\ u_1(x,0) = f_1(x) \quad x \in \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

この主要定理は次の存在定理の系である。

[存在定理]

仮定1の下で $f(x) \in E_L^{\infty(k+1)}$, $g(x,t) \in E_t^{k+1}(L^2) \cap [E_t^k(L^2) \cap E_t^{k-1}(E_L^3) \cap \dots \cap E_t^0(E_L^{3k})]$ とすると Cauchy 問題 (1) は $0 \leq t < \infty$ において $u(x,t) \in E_t^k(L^2) \cap E_t^{k-1}(E_L^3) \cap \dots \cap E_t^0(E_L^{3k})$ なる一意的な解を持つ。 k は任意の自然数。

又上の存在定理において E_L^k を H^k で置きかえよう。

[存在定理証明]

以下存在定理の証明の概略を記す。 a priori estimate と局所存在定理を示せばよい。 a priori estimate を導くために Miura - Gardner - Kauskal とする次の結果を使う。

[定理] (Miura - Gardner - Kauskal)

任意の自然数 k に対し $K \subset V$ の微分方程式 $D_t u + u D u + D^3 u = 0$ は次の形の polynomial conserved density を持つ。

$$T_k(u) = (D^k u)^2 + c_k u (D^{k-1} u)^2 + Q_k(u, \dots, D^{k-2} u)$$

$$T_0(u) = u^2$$

ここで c_k は u に依存しない定数、 Q_k は rank $k+2$ の多項式である。

定義: $D^k u$ ($k=0, 1, 2, \dots$) の多項式である T が $D_t T = D X$

なる X ($D^k u$ の多項式) を持つ時 T は polynomial conserved density と言う。

定義: 多項式 Q が有限個の rank m の単項式の和であるとき Q は rank m と言う。単項式に対しては

$$\text{rank} \left[u^{\alpha_0} (Du)^{\alpha_1} \cdots (D^l u)^{\alpha_l} \right] = \sum_{j=0}^l \frac{1}{2}(j+2) \alpha_j$$

と定義する。

これらの conserved density を次々に全 x -軸上で積分する事により次の a priori estimate を得る。

[定理] (a priori estimate)

任意の自然数 k に対して, Cauchy 問題 (1) の解は次の形の a priori estimate を持つ。

$$\|D^k u\|_t \leq U_k(t, |a|_t, \dots, |D^k a|_t, |b|_t, \dots, |D^k b|_t,$$

$$\|f\|, \dots, \|D^k f\|, \|g\|_t, \dots, \|D^k g\|_t)$$

ただし

$$\|u\|_t = \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\|, \quad \|u\| = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$|a|_t = \sup_{0 \leq s \leq t} |a(s)|, \quad |a| = |a|_{B^0}$$

U_k は各 argument について正値単調増大なるものかた

函数、 U_0 の例外外的に $|Du|_t$ を含む。

U_k は $0 \leq \mu \leq \mu_0$ ($\mu_0 > 0$ 任意に固定) の μ について独立に取れる。

次に局所存在定理を得るために、次の様に近似解の列 u_m を構成する。

$$(4) \quad u_0(x, t) = f(x) \quad (x, t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, \infty)$$

$$(5) \quad \begin{cases} D_t u_m + u_{m-1} D u_m + D^3 u_m - \mu D^2 u_m + a(x, t) D u_m + b(x, t) u_m + g(x, t) = 0 \\ (x, t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, \infty) \\ u_m(x, 0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

n と k にかんする帰納法により次の様な u_m にかんする評価を得る。

[命題. 1]

任意の自然数 k に対し $t_k = \min \left\{ 1, \frac{\log M}{C_1}, \frac{1}{C_k} \right\}$
 $(t_0 = \min \left\{ 1, \frac{\log M}{C_1} \right\})$ と置くと $i+j \leq k$ なる
 任意の i, j に対し

$$\| D_t^i D^{3j} u_m \|_{t_k} \leq C_{i,j} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

これは 2^k 次の様に約束する。

$$u(0) = f(x),$$

$$u^{(1)}(0) = - \left[u(0) D u(0) + D^3 u(0) - \mu D^2 u(0) \right. \\ \left. + a(x, 0) D u(0) + b(x, 0) u(0) + g(x, 0) \right]$$

$$u^{(k)}(0) = - \left[\sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k-1}{\ell} u^{(k-1-\ell)}(0) D u^{(\ell)}(0) + D^3 u^{(k-1)}(0) \right. \\ \left. - \mu D^2 u^{(k-1)}(0) + \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k-1}{\ell} D_t^{k-1-\ell} a(x, 0) D u^{(\ell)}(0) \right. \\ \left. + \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k-1}{\ell} D_t^{k-1-\ell} b(x, 0) u^{(\ell)}(0) + D_t^{k-1} g(x, 0) \right]$$

$$c_{k,0}^2 = M \left[\|u^{(k)}(0)\|^2 + \|D_t^k g\|_1^2 + \dots + \|g\|_1^2 + 1 \right], \quad M > 1$$

$$c_{k-l, l+1} = c_{k-l, l} + c_{k-1} + \|D_t^{k-l-1} D^{3l} g\|_1 \quad (0 \leq l \leq k-1)$$

$$c_k \text{ は } c_{i,j}, \quad |D_t^i D^{3j} a|_1 > |D_t^i D^{3j} b|_1 \quad (i+j \leq k)$$

の正係数多項式、

(5) より $\varphi_n = u_{n+1} - u_n$ に対して次の不等式を得る。

$$(6) \quad \begin{cases} D_t \varphi_n + u_n D \varphi_n + \varphi_{n-1} D u_n + D^3 \varphi_n - \mu D^2 \varphi_n \\ \quad + a(x, t) D \varphi_n + b(x, t) \varphi_n = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, \infty) \\ \varphi_n(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

u_n にかんする評価 (命題. 1) を使ひ次の様な φ_n にかんする評価を得る。

[命題. 2]

任意の自然数 k に対し $T_k = \min \left\{ 1, \frac{\log M}{C_{k+1}}, \frac{\rho}{(k+1)M} \right\}$
 $(0 < \rho < 1)$ と置くと

$$\|D_t^k \varphi_n\|_{T_k}^2 + \dots + \|\varphi_n\|_{T_k}^2 \leq \rho \left[\|D_t^k \varphi_{n-1}\|_{T_k}^2 + \dots + \|\varphi_{n-1}\|_{T_k}^2 \right]$$

この評価よりただちに次の様に列 u_n の収束が従ふ。

$$D_t^i u_n \rightarrow D_t^i u \quad \text{in } \mathcal{E}_t^0(L^2) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (0 \leq i \leq k)$$

同様式 (6) を見ると次の事も従ふ。

$$D_t^i D^{3j} u_n \rightarrow D_t^i D^{3j} u \quad \text{in } \mathcal{E}_t^0(L^2) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (i+j \leq k)$$

従、2 次の局所存在定理を得る。

[定理] (局所存在定理)

仮定. 1 の下で $f(x) \in \mathcal{E}_{L^2}^{3(k+1)}$

$$g(x, t) \in \mathcal{E}_t^{k+1}(L^2) \cap \left[\mathcal{E}_t^k(L^2) \cap \mathcal{E}_t^{k-1}(\mathcal{E}_{L^2}^3) \cap \dots \cap \mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_{L^2}^{3k}) \right]$$

とすると Cauchy 問題 (1) は $0 \leq t \leq T_k$ まで

$$u(x, t) \in \mathcal{E}_t^k(L^2) \cap \mathcal{E}_t^{k-1}(\mathcal{E}_{L^2}^3) \cap \dots \cap \mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_{L^2}^{3k})$$

なる一意的な解を持つ。

以上で存在定理の証明の概略を終るが最後に一意性の証明は通常の L^2 イネルパーの手法で導かれる事を注意しておく。

次に KdV 方程式と非常に近い関係にあると忽ちわかる次の方程式を考えよう。

$$(7) \quad D_t v + v^2 Dv + D^3 v = 0.$$

$$(8) \quad \sqrt{-6} Dv + v^2 = u$$

とおく (Mimura の発見!) と KdV 方程式との関係は次の様である。

$$(9) \quad D_t u + u D u + D^3 u = (2v + \sqrt{-6} D)(D_t v + v^2 Dv + D^3 v)$$

次の様な例を考えると、方程式 (8) を $u \geq \frac{1}{2}$ である v に対して解く時一意性は成り立たない。例えば $\varphi(x) \in C_c^\infty$ とし $\varphi(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$, $\varphi(x) = \frac{1}{|x|} \quad |x| > R \quad (R > 0)$ とする。

$$v = \frac{1}{2}\varphi - \frac{\sqrt{-6}}{2} \frac{D\varphi}{\varphi}, \quad w = v - \varphi, \quad u = \sqrt{-6} Dv + v^2$$

とみると v と w が同じ方程式 (8) を満たす。

方程式 (7) は k 次方程式と (9) なる直接な関係を持つが、
 (8) を v にかんして解く時一意性が成り立たないから (7) に
 対応する Cauchy 問題の解の下域的存在定理は新たに作る必要
 がある。次の様に低階項を加えて Cauchy 問題を考える。

$$(10) \quad \begin{cases} D_t v + v^2 D v + D^3 v + a(x, t) D v + b(x, t) v + g(x, t) = 0 \\ (x, t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, \infty) \\ v(x, 0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

仮定. 3 $a(x, t), b(x, t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathbb{R}^\infty)$

[主要定理]

仮定. 3 の下で $f(x) \in \mathcal{E}_L^\infty$, $g(x, t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{E}_L^\infty)$ とすると
 Cauchy 問題 (10) は $0 \leq t < \infty$ に対し $v(x, t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{E}_L^\infty)$
 なる一意的存在解を持つ。 $\mathcal{E}_L^\infty$ は $\mathcal{F}_L^\infty$ で置きかえてもよい。

この主要定理は次の存在定理の系である。

[存在定理]

仮定. 3 の下で $f(x) \in \mathcal{E}_L^{3(k+1)+2}$

$$g(x, t) \in \mathcal{E}_t^{k+1}(\mathcal{E}_L^2) \cap \left[\mathcal{E}_t^k(\mathcal{E}_L^2) \cap \mathcal{E}_t^{k-1}(\mathcal{E}_L^5) \cap \cdots \cap \mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_L^{3k+2}) \right]$$

とすると Cauchy 問題 (10) は $0 \leq t < \infty$ に対し

$$v(x, t) \in \mathcal{E}_t^k(\mathcal{E}_L^2) \cap \mathcal{E}_t^{k-1}(\mathcal{E}_L^5) \cap \cdots \cap \mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_L^{3k+2})$$

なる一意的な解を持つ。

KdV 方程式の conserved density は (8) を代入できる事により 方程式 (7) は次の様な conserved density を持つ事がわかる。

[定理] (conserved density)

方程式 (7) は次の様な conserved density を持つ。

$$\hat{P}_0(v) = v^2$$

$$\hat{P}_1(v) = (Dv)^2 - \frac{1}{6} v^4$$

$$\hat{P}_2(v) = (D^2v)^2 - \frac{5}{3} v^2 (Dv)^2 - \frac{1}{\sqrt{-6}} v^4 Dv + \frac{1}{18} v^6$$

$$\hat{P}_k(v) = (D^k v)^2 + P_k(v, Dv) (D^{k-1} v)^2 + Q_k(v, \dots, D^{k-2} v) D^{k-1} v$$

$$+ R_k(v, \dots, D^{k-2} v) \quad k=3, 4, \dots$$

ここで P_k, Q_k, R_k は多項式である。

この conserved density を全 x -軸上で積分し k 回微分すると帰納法により次の a priori estimate を得る。

[定理] (a priori estimate)

任意の自然数 k に対し Cauchy 問題 (10) の解 $v(x, t)$ は次の

a priori estimate を持つ。

$$\|D^k v\|_t \leq V_k(t, |a|_t, \dots, |D^k a|_t, |b|_t, \dots, |D^k b|_t,$$

$$\|f\|, \dots, \|D^k f\|, \|g\|_t, \dots, \|D^k g\|_t)$$

すなわち V_k は各 argument に対し正值単調増大な定数である (定数であり) V_0 は例外的に $|Da|_t$ を含む。

局所存在定理を得るために次の様と近似解の列 v_n を定義する。

$$(11) \quad v_0(x, t) = f(x), \quad (x, t) \in R' \times [0, \infty)$$

$$(12) \quad \begin{cases} D_t v_n + v_{n-1}^2 D v_n + D^3 v_n + a(x, t) D v_n + b(x, t) v_n + g(x, t) = 0 \\ (x, t) \in R' \times [0, \infty) \\ v_n(x, 0) = f(x), \quad x \in R' \end{cases}$$

n と k にかんがって帰納法によつて v_n にかんがって次の評価を得る。

[命題. 3]

$$\text{任意の自然数 } k \text{ に対し } t_k = \min \left\{ 1, \frac{\log M}{C_k} \right\} \quad (M > 1)$$

とある。

$$\sup_{0 \leq t \leq t_k} \|D_t^k v_n\|_{L^2} \leq C_k, \quad \sup_{0 \leq t \leq t_k} \|D_t^{i+j} v_n\|_{L^2} \leq C_k \quad (i+j \leq k)$$

7. 以下同様の様子を繰り返す。

$$v(0) = f(x)$$

$$v^{(1)}(0) = - \left[f(x) D^2 f(x) + D^3 f(x) + a(x, 0) D f(x) + b(x, 0) f(x) + g(x, 0) \right]$$

$$v_{(0)}^{(k)} = - \left[\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = k-1} \frac{(k-1)!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} v_{(0)}^{(\alpha_1)} v_{(0)}^{(\alpha_2)} D v_{(0)}^{(\alpha_3)} + D^3 v_{(0)}^{(k-1)} \right.$$

$$\left. + \sum_{\beta=0}^{k-1} \binom{k-1}{\beta} D_t^{k-1-\beta} a(x, 0) D v_{(0)}^{(\beta)} + \sum_{\beta=0}^{k-1} \binom{k-1}{\beta} D_t^{k-1-\beta} b(x, 0) v_{(0)}^{(\beta)} + D_t^{k-1} g(x, 0) \right]$$

$$c_k^2 = M \left[\|v_{(0)}^{(k)}\|_{L^2}^2 + 2 \sum_{l=0}^{k-1} c_l^2 + \sup_{0 \leq t \leq 1} \|D_t^k g\|_{L^2}^2 \right]$$

$$c_k \text{ は } c_0, \dots, c_k, \sup_{0 \leq t \leq 1} |D_t^i D^{j'} a|_{\mathbb{R}^2}, \sup_{0 \leq t \leq 1} |D_t^i D^{j'} b|_{\mathbb{R}^2} \ (i+j' \leq k)$$

また $\sup_{0 \leq t \leq 1} \|D_t^i D^{j'} g\|_{L^2} \ (i+j' \leq k-1)$ の正係数総項式。

(12) 8) $\varphi_n = v_{n+1} - v_n$ 1. 以下同様の様子を繰り返す。

$$(13) \begin{cases} D_t \varphi_n + \tilde{v}_n^2 D \varphi_n + D^3 \varphi_n + a(x, t) D \varphi_n + b(x, t) \varphi_n \\ \quad + \varphi_{n-1} (\tilde{v}_n + \tilde{v}_{n-1}) D \tilde{v}_n = 0 \\ \varphi_n(x, 0) = 0 \end{cases}$$

命題.3 の評価を得, 2 φ_m にかんする 2 次の評価を得る。

[命題.4]

任意の自然数 k に対し $T_k = \frac{p}{C_{k+1}}$ ($0 < p < 1$) とおくと,

$$\sup_{0 \leq t \leq T_k} \sum_{i=0}^k \|D_t^i \varphi_m\|_{L^2}^2 \leq p \sup_{0 \leq t \leq T_k} \sum_{i=0}^k \|D_t^i \varphi_{m-1}\|_{L^2}^2$$

この評価より

$$D_t^i v_m \rightarrow D_t^i v \quad \text{in } \mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_{L^2}^2) \quad \text{as } m \rightarrow \infty \quad \text{for } 0 \leq i \leq k$$

方程式 (12) を見ると,

$$D_t^i D^{j'} v_m \rightarrow D_t^i D^{j'} v \quad \text{in } \mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_{L^2}^2) \quad \text{as } m \rightarrow \infty \quad \text{for } i+j' \leq k$$

したがって, 2 次の局所存在定理を得る。

[定理] (local existence)

概し, v と $g(x, t)$ が [存在定理] の仮定 L^2 と同じ $regularity$ を持つならば Cauchy 問題 (10) は $0 \leq t \leq T_k$ において, [存在定理] により v の $regularity$ を持つ一意の解 $v(x, t)$ を持つ。

この局所存在定理と a priori estimate を合わせると [存在定理] を得る。一意性にかんする部分は KdV 方程式の場合と同じである。

Bibliography

- [1] Korteweg, D. J., and de Vries, G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary wave, *Phlos. Mag.*, Vol.39, 1895, pp.422-443.
- [2] Zabusky, N. J., and Kruskal, M. D., Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Letters*, Vol.15, 1965, pp.240-243.
- [3] Zabusky, N. J., A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction, *Nonlinear Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 1967.
- [4] Gardner, G. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D., and Miura, R. M., A method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Letters*, Vol.19, 1967, pp.1095-1097.
- [5] Sjöberg, A., On the Korteweg-de Vries equation, Uppsala Univ., Dept. of Computer Sci., Report, 1967.
- [6] Miura, R. M., Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation, *J. Math. Phys.*, Vol.9, 1968, pp.1202-1204.
- [7] Miura, R. M., Gardner, C. S., and Kruskal, M. D., Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion, *J. Math. Phys.*, Vol.9, 1968, pp.1204-1209.

- [8] Su, C. H., and Gardner, C. S., Korteweg-de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation, J. Math. Phys., Vol.10, 1969, pp.536-539.
- [9] Lax, P. D., Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Commun. Pure Appl. Math., Vol.21, 1968, pp.467-490.
- [10] Mukasa, T., and Iino, R., On the global solution for the simplest generalized Korteweg-de Vries equation,
- [11] Kametaka, Y., Korteweg-de Vries equation. I. Global existence of smooth solutions, Proc. Japan Acad., Vol.45, 1969, pp.552-555.
- [12] Kametaka, Y., Korteweg-de Vries equation. II. Finite difference approximation, Proc. Japan Acad., Vol.45, 1969, pp.556-558.
- [13] Kametaka, Y., Korteweg-de Vries equation. III. Global existence of asymptotically periodic solutions, Proc. Japan Acad., Vol.45, 1969,
- [14] Kametaka, Y., Korteweg-de Vries equation. IV. Simplest generalization, Proc. Japan Acad., Vol.45, 1969,

[訂正]

本稿の方程式に対して a priori estimate の証明のために可算無限個の conserved density を導く様子を述べたところから 実際には最初の 3 個、すなわち u^2 , $(Du)^2 - \frac{1}{3}u^3$, $(D^2u)^2 - \frac{5}{3}u(Du)^2 + \frac{5}{36}u^4$ を導くだけで済む。