

既約表現の次数がすべて π -数である π -可解群について

阪大 理 八尾 隆

有限群 G に対して, $\text{Irr}(G)$ で G の複素既約表現の指標の集合を表すことにする。 N を G の正規部分群とすれば, 任意の $\chi \in \text{Irr}(G)$ に対して, $\theta \in \chi|_N$ の一つの既約成分とすれば, $\chi(1)/\theta(1)$ は $|G:N|$ の約数となることが知られている。 N. Ito の定理と合せて, 次のことが又知られている。『abelian subgroup A が G で subnormal の時, 即ち A が G と normal series で結ばれる時, 任意の $\chi \in \text{Irr}(G)$ に対して $\chi(1)$ は $|G:A|$ を割りさる』

そこで, 逆に G の character degrees $\{\chi(1) \mid \chi \in \text{Irr}(G)\}$ に関する情報が与えられた時, G はどの程度の“大きな” normal (or subnormal) abelian subgroup を持つだろうか? という問題が考えられる。今回得た結果は, この方向の I.M. Isaacs - D.S. Passman (以下 I-P と略す) による結果の拡張である。

まず π を素数からなるある集合とし, 次の条件を考える。

定義 群 G が $c.d.\pi$ (character degrees π) を満たすとは、任意の $\chi \in \text{Irr}(G)$ の次数 $\chi(1)$ が π -数 (即ち、 $\chi(1)$ の素因数がすべて π の元) であることという。

例えば、 G が normal abelian Hall π' -subgroup を持つなら、Ito の定理により、 G は $c.d.\pi$ を満たす。これについては次の場合に逆も成立することが得られた。

定理 1 $G \in \pi$ -separable group とする。この時 G が $c.d.\pi$ を満たすための必要十分条件は、 G が normal abelian Hall π' -subgroup を持つことである。

証明は、P. X. Gallagher の一定理と Schur-Zassenhaus の定理を結びつけることによって示される。 π -solvable π -group は solvable だから、これより直ちに次を得る。

系 2 $c.d.\pi$ を満たす π -solvable group は solvable。

一般に $c.d.\pi$ を満たす群は次の時 solvable となる。これは W. Burnside の $p^a q^b$ -定理のほんの少しの拡張となっている。

定理3. G は c.d. π を満たす群とする。もし $|\pi| \leq 2$ ならば, G は solvable. ただし $|\pi|$ は π に含まれる元の個数を表すものとする。

G が単純群の時, Burnside の lemma によれば, $\chi \in \text{Irr}(G)$ の次数が $|G : C_G(\chi)|$ と互いに素となる $x \in G$ に対しては $\chi(x) = 0$ となるから直交関係を用いて上定理が示される。

さて, I-P は c.d. $\{p\}$ を満たす群を扱ったが, かような群は必然的に solvable となることに注目し, 上記結果 (2~3) を用いて以下のように彼等の結果の拡張を得ることができる。

自然数 n の素因数の個数 (重複度を教える) ω を n の total exponent と呼び, $\omega = e(n)$ で表すことにする。

定義 群 G が r.x.e (representation exponent e) を満たすとは, 任意の $\chi \in \text{Irr}(G)$ に対して, $\chi(1)$ の total exponent $e(\chi(1))$ が e 以下であること。

r.x.0 を満たす群は linear character しか持たない群即ち abel 群である。又 r.x.1 を満たす群は solvable となることが, I-P によって調べられている。しかし $e \geq 2$ の時はや nonsolvable な r.x.e を満たす群がある。なおこの定

義は, $c.d. \{p\}$ を満たす群に対しては I-P のそれに一致する。

主定理 I 群 G は $c.d. \pi$ かつ r.x.e を満たすとする。さらに $|\pi| \geq 3$ ならば, G は π -solvable であるとする。この時 G は normal series

$$G = A_e \triangleright B_{e-1} \triangleright A_{e-1} \triangleright \cdots \triangleright B_0 \triangleright A_0$$

を持ち, かつ各 i ($=1, 2, \dots, e$) に対して素数 $p_i \in \pi$ が存在して次の条件 (1) ~ (4) を満たす。

(1) A_i は r.x.i かつ $c.d. \pi$ を満たす。

(2) A_i/B_{i-1} は cyclic π_i -group, ただし $\pi_i = \pi - \{p_i\}$ 。

(3) B_{i-1}/A_{i-1} は elementary abelian p_i -group。

(4) $|A_i:A_{i-1}|$ は π -数で, $e(|A_i:A_{i-1}|) \leq 2i+1$ 。

特に G は, $|G:A_0|$ が π -数で, $e(|G:A_0|) \leq e(e+2)$ を満たす subnormal abelian subgroup A_0 を持つ。

この定理で $\pi = \{p\}$ とすると, $p_1 = p_2 = \cdots = p_e = p$, 従って $A_i = B_{i-1}$ となり, I-P の結果が得られる。又, G が上定理の仮定を満たすとし, $P \in G$ の p -Sylow 群とすると, $p \notin \pi$ ならば, P は abel 群, $p \in \pi$ であっても P の交換子群列の長さは $e+1$ でおさえられることが直ちにわかる。

ところで定理 I の G は, “より大きな” subnormal abelian

subgroup を持つかも知れない。次にこの問題を考える。

まず次のような関数を考える。関数 f_a (resp. f_n) は次の条件を満たすもので、しかもその条件を満たすもののうち最小の値をとるものとする。条件: G を r.a.e を満たす任意の solvable (resp. nilpotent) group とする時, subnormal abelian subgroup A が存在し, $e(|G:A|) \equiv f_n(e)$ (resp. $f_a(e)$) を満たす。

定理 I から, f_a が (従って f_n も) 存在し, かつ $f_n(e) \equiv f_a(e) \equiv e(e+2)$ となることがわかる。

主定理 II 上記関数 f_a 及び f_n は存在し, 次式を満たす。

(1) $f_n(0)=0$, $f_n(1)=2$, 及び $e \geq 2$ の時
 $2e \leq f_n(e) \leq 4e - [\log_2 pe]$, ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表すものとする,

(2) $f_n(e) \equiv f_a(e) \equiv \frac{1}{2}e(e+3)$.

これより特に次を得る。

$f_n(0)=f_a(0)=0$, $f_n(1)=f_a(1)=2$, $f_n(2)=4$, $f_a(2)=4$ or 5 .

なおこの定理に関連して, I-P による c.d.lpi を満たす群のときと同様に, $f_n(e)$ は“本質的”に e の一次関数となることが示されるが, $f_a(e)$ の方が“二次”から“一次”へ改善できるかどうか今後調べたい課題でもある。