

Σ -space の一般化と 閉写像について.

大阪教育大学 奥山 晃弘

§ 1. 序

話を簡単にする為、空間は全て regular, T_1 空間とする。

位相空間の距離化定理として、次の定理が良く知られている。

(I) (T_1) 空間 X が距離化可能であるための必要十分条件は、次の二つの条件を満たす X の閉被ふきの列 $\{U_n: n=1, 2, \dots\}$ が存在する事である。

(i) $U_{n+1}^* < U_n$ ($n=1, 2, \dots$) (star-refinement)

(ii) X の各点 x について、 $\{St(x, U_n): n=1, 2, \dots\}$ が x の近傍基である。

(II) ([6], [11]) (regular T_1) 空間 X が距離化可能であるための必要十分条件は、次の二つの条件を満たす X の閉被ふきの列 $\{U_n: n=1, 2, \dots\}$ が存在する事である。

(i) 各 U_n が locally finite である。

(2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ が X の基となる。

距離空間の一般化として、次の様な空間がある。

定義 I ([3]). 空間 X が上の (i) 及び次の (iii) を満たす開被ふくの列 $\{U_n; n=1, 2, \dots\}$ をもつ時、 X を M-space という。

(iii) X の各点 x に対し $C_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, U_n)$ が countably compact set で、しかも $\{St(x, U_n); n=1, 2, \dots\}$ が C_x の基となる。

II ([7]) 空間 X が上の定理 II の (i) 及び次の (3) を満たす X の被ふく (開被ふくとは限らない) の列 $\{F_n; n=1, 2, \dots\}$ をもつ時、 X を σ -space という。

(3) X の各点 x 及び x を含む任意の X の閉集合 G に対し $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ の中に $x \in F \subset G$ なる F が存在する。この時 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ を X の network という。

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 及び (2) $\Rightarrow$ (3) より、距離空間は常に M-space 且つ σ -space である。

M-space と σ -space を含み、しかもそれ等の空間のもつ良い性質をもつものとして、次の空間がある。

定義 ([5]) 空間 X が、次の条件をみたす X の閉被ふくう列 $\{\mathcal{F}_n: n=1, 2, \dots\}$ と X の閉被ふく $\mathcal{K}$ をもつ時、 X を Σ -space といいう。

- (a) 各 $\mathcal{F}_n$ が locally finite である。
- (b) $\mathcal{K}$ の各元は countably compact set である。
- (c) $\mathcal{K}$ の任意の元 K 及び K を含む X の任意の開集合 G に対し $K \subset F \subset G$ なる $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ の元 F が存在する。この時、 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ を X の (mod $\mathcal{K}$)-network といいう。

Σ -space に関するものとして、次の定理が証明されている。

定理 A. (Nagami [5]). f を空間 X から空間 Y の上への perfect map とすると、

$$X: \Sigma\text{-space} \iff Y: \Sigma\text{-space}.$$

定理 B (Nagami [5]). $X_n (n=1, 2, \dots)$ を全て paracompact Σ -spaces とすると、 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ も paracompact Σ -space である。

σ -space は closed, continuous map で移る事は知られている, ([8], [10]). しかし Σ -space に関しては移る必要がない事を Michael [1] が指摘し、次の様な空間を定義した。

定義 ([1]). 空間 X が上の定義の (b), (c) 及び次の (a₂) をみたす $\{\mathcal{F}_n: n=1, 2, \dots\}$ と $\mathcal{K}$ をもつ時、 X を $\Sigma^{\#}$ -space といいう。

(a₂) 各 $\mathcal{F}_n$ が closure-preserving である。

明らかに、 Σ -space は $\Sigma^\#$ -space であり、 $\Sigma^\#$ -space は closed, continuous map で移る事が分かる。ここで、 Σ -space と $\Sigma^\#$ -space の間にあるものとして、次の様な空間が定義出来る。

定義 ([2], [9]). 空間 X が上の定義の (b), (c) 及び次の (a₁) を満たす $\{\mathcal{F}_n: n=1, 2, \dots\}$ と $\mathcal{K}$ を持つ時、 X は Σ^* -space という。

(a₁) 各 $\mathcal{F}_n$ が hereditarily closure-preserving である。

ここで集合族 $\{A_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ が hereditarily closure-preserving とは $B_\lambda \subset A_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ なる任意の族 $\{B_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ が closure-preserving であるとする。

定義より、 Σ -space は Σ^* -space であり、 Σ^* -space は $\Sigma^\#$ -space である。

§ 2. 3つの空間の関連について。

定理 1. $f: X \rightarrow Y$: closed, continuous, onto map について、 X が Σ^* -space ならば Y も Σ^* -space である。

定理 2. $X_n (n=1, 2, \dots)$ が全て paracompact $\Sigma^\#$ -spaces ならば、 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ も $\Sigma^\#$ -space である。X paracompact Σ^* -space X

について、 $X \times I$ が Σ^* -space となるのは " X が Σ -space である。

定理3. Lindelöf Σ^* -space は Σ -space である。

定理4. 任意の開集合が F_σ -set であるような Σ^* -space は Σ -space である。

これらの結果は [9] で証明する。

更に、Michael [1] が $\text{paracompact } \Sigma^*$, non- Σ -space X の例をあげた。その時の X は $\text{paracompact } \Sigma$ -space からの closed, continuous map による image となっているので、定理1により、 X は Σ^* -space となる。この X に定理2を適用すると、 $X \times I$ は Σ^* , non- Σ^* -space の例となる。従って、 Σ^* -spaces の class は Σ -spaces の class より真に大きく、 Σ^* -spaces の class は Σ^* -spaces の class より真に大きい事が分かる。

又、上の空間 X について、 $X \times I$ から X への projection は perfect map となるので、§1 の定理 A は Σ^* -space に対しては成立しない事になる。

定理 B が2に関連して、次の問題は未解である。

問題 1. X_n : paracompact Σ^* -space ($n=1, 2, \dots$) の時, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ は paracompact か?

類似の問題として,

問題 1'. X_n : sub-paracompact Σ^* -space ($n=1, 2, \dots$) の時, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ は sub-paracompact か?

定理 3 に関連して, Σ^* -space を $\Sigma^\#$ -space に置きかえては成立しうる事が分かる. しかし定理 4 については, まだ分かっていない.

問題 2. 定理 4 で Σ^* -space を $\Sigma^\#$ -space に置きかえられるか?

§ 3. 連続閉写像に関連して.

位相的性質 $\mathcal{P}$ について, $\mathcal{P}$ をもつ空間の class を $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ で表わし, $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ の元からの closed, continuous map による image とある空間の class を $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^c$ で表わす. この時, § 1 での $\mathcal{P}$ の空間について, 次の様な関係が得られている.

$$(A) \quad \mathcal{C}_M \cap \mathcal{C}_\sigma = \mathcal{C}_{\text{metric}}.$$

$$(B) \text{ (Morita [4])}. \quad \mathcal{C}_M^c \cap \mathcal{C}_\sigma^c = \mathcal{C}_{\text{metric}}^c$$

$$\text{例 1. } \mathcal{C}_{\text{metric}} \neq \mathcal{C}_{\text{metric}}^c$$

$$S = \bigvee_{n=1}^{\infty} [0, 1]_n : \text{disjoint sum}, \quad A = \{0_n \mid n=1, 2, \dots\} \quad \text{と置き,}$$

$X = S/A \in \text{quotient space}$ とすると $X \in C_{\text{metric}}^i - C_{\text{metric}}$.

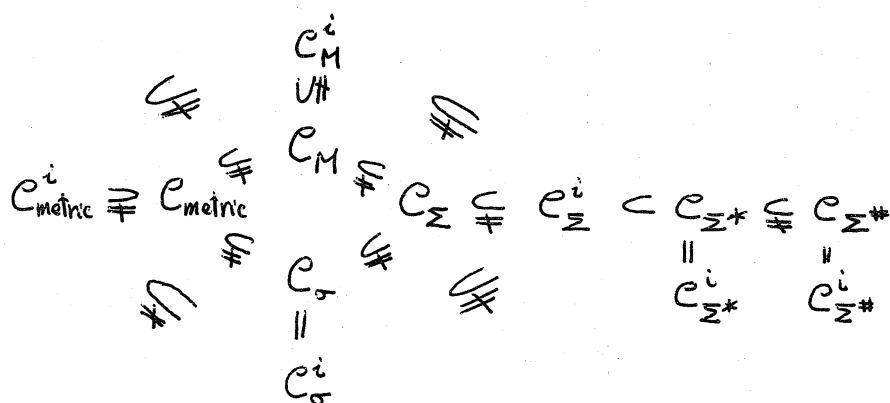
例2. $C_\sigma \neq C_M^i$.

$N \in \text{自然数全体}$, $\beta N \in N$ の Stone-Čech compactification とし, $p \in \beta N - N$ とする. $X = N \cup \{p\} \in \beta N$ の subspace とすると, $X \in C_\sigma - C_M^i$.

例3. $C_M \neq C_{\text{metric}}^i$.

$X = [0, \omega_1]$ を順序による位相を入れた空間とすると, $X \in C_M - C_{\text{metric}}^i$. 但し, ω_1 は非可算で最小の順序数.

以上をまとめると, 次の様に表わされる.



こゝで, 次の問題が残っている。

問題3. $C_{Z^*} = C_{Z^*}^i$ は成立するか?

References

1. E. Michael, On Nagami's Σ -spaces and some related matters, Proc. of the Washington State University Conference on General Topology, 15 - 19.
2. E. Michael and F. Slaughter, Jr., Σ -spaces with a point-countable separating open cover are σ -spaces, to appear.
3. K. Morita, Products of normal spaces with metric spaces, Math. Ann. 154 (1964), 365 - 382.
4. K. Morita, Results related to closed images of M-spaces III, to appear.
5. K. Nagami, Σ -spaces, Fund. Math. 65 (1969), 169 - 192.
6. J. Nagata, On a necessary and sufficient condition of metrizability, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. 1 (1950), 93 - 100.
7. A. Okuyama, Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, sect. A 9 (1967), 236 - 254.
8. A. Okuyama, σ -spaces and closed mappings I, Proc. Japan Acad., 44 (1968), 472 - 477.
9. A. Okuyama, On a generalization of Σ -spaces, to appear.
10. F. Siwiec and J. Nagata, A note on nets and metrization, Proc. Japan Acad. 44 (1968), 623 - 627.
11. Yu. M. Smirnov, A necessary and sufficient condition for metrizability of a topological space, Dokl. Acad. Nauk SSSR 77 (1951), 197 - 200.