

Matrix coefficients of the principal series representations of $Sp(2, \mathbb{R})$ as hypergeometric functions of C_2 -type

東京大学 数理科学研究科 飯田 正敏 (Masatoshi IIDA)

§ 0. Introduction.

[MO1]において, $Sp(2, \mathbb{R})$ の主系列表現の Whittaker model が求められた. そこで得られた微分方程式系 (rank 8 の holonomic system) は, Casimir operator (の radial part) と Schmid operator によって定義される shift operators であった.

また, 半単純リー群上の両側 K -不変, あるいは両側から K の 1 次元表現に従う球関数が満たす微分方程式系, およびその一般化についてさまざまな研究がある. ([H1], [HO], [OO], [Op1], [Op2], [Os], [OS] とそれらの references 参照)

この講演では [MO1] の手法により $Sp(2, \mathbb{R})$ の主系列表現の matrix coefficients (spherical functions) — K の 1 次元表現だけでなく, 2 次元表現に従うものも — が満たす微分方程式系を求め, さらに一般化された主系列表現の matrix coefficients を 2 変数超幾何関数を用いて具体的に求める.

§ 1. $Sp(2, \mathbb{R})$ の放物型部分群.

$G = Sp(2, \mathbb{R})$ とする. G の maximal compact subgroup を $K \simeq U(2)$, そして minimal parabolic subgroup $P = MAN$ と Jacobi parabolic subgroup $P_J = M_J A_J N_J$ を次で定義する.

まず, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, $\mathfrak{k} = \text{Lie}(K)$ とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解, $\mathfrak{p}$ の maximal abelian subspace として $\mathfrak{a} = \{\text{diag}(x, y, -x, -y) | x, y > 0\}$ をとる. この $\mathfrak{a}$ に対して, $A = \exp \mathfrak{a}$, $M = Z_K(\mathfrak{a}) = \{\pm I_2, \pm \gamma_2\}$ (ただし, $\gamma_2 = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$) と定める. $\mathfrak{a}$ の base $H_1 = \text{diag}(1, 0, -1, 0)$, $H_2 = \text{diag}(0, 1, 0, -1)$ の dual base を $e_1, e_2 \in \mathfrak{a}^*$ とすると, restricted root system は $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm 2e_1, \pm 2e_2, \pm(e_1 \pm e_2)\}$ で, その positive system を $\Delta^+ = \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{2e_1, 2e_2, e_1 \pm e_2\}$ とする. Δ^+ に対する root space を $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}(\alpha, \mathfrak{a})$, $N = \exp \mathfrak{n}$ と定義する.

また, $\mathfrak{a}_J = \mathbb{R}H_1$ なる $\mathfrak{a}$ の subspace をとり, $A_J = \exp \mathfrak{a}_J$, $M_J = M \cdot \exp \mathbb{R}H_2 \cdot \exp(\mathfrak{g}(2e_2, \mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{g}(-2e_2, \mathfrak{a})) \simeq \{\pm 1\} \times SL(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{n}_J = \sum_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \{2e_2\}} \mathfrak{g}(\alpha, \mathfrak{a})$, $N_J = \exp \mathfrak{n}_J$ と定義する.

§ 2. $Sp(2, \mathbb{R})$ の表現.

この section では, 以下で扱う二系列の $Sp(2, \mathbb{R})$ の表現を定義する.

定義 (2.1). σ を M の既約ユニタリ表現, $\mu \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha = 2e_1 + e_2$ とおく. P の表現 $\sigma \otimes \mathfrak{a}^{\mu+\rho} \otimes 1_N$ からの誘導表現 (π, H_π) を G の主系列表現と呼

ぶ. すなわち,

$$\begin{aligned} H_\pi &= \text{Ind}_P^G(\sigma \otimes a^{\mu+\rho} \otimes 1_N) \\ &= \{f \in C^\infty(G) \mid f(mang) = \sigma(m)a^{\mu+\rho}f(g), \\ &\quad \text{for } \forall g \in G, \forall m \in M, \forall a \in A, \forall n \in N\}. \end{aligned}$$

G の作用は $\pi(g)f(x) = f(xg)$ ($\forall f \in H_\pi, \forall g \in G$) である.

定義 (2.2). $\sigma_J = (\varepsilon, \xi)$ を $M_J \simeq \{\pm 1\} \times SL(2, \mathbb{R})$ の離散系列表現, $\nu_1 \in \mathfrak{a}_{J, \mathbb{C}}^*, \rho_J = \frac{1}{2}\{(e_1 - e_2) + 2e_1 + (e_1 + e_2)\} = 2e_1$ とする. ここで, $\varepsilon \in \widehat{\{\pm 1\}}$ で ξ は $SL(2, \mathbb{R})$ の離散系列表現. P_J の表現 $\sigma_J \otimes a_J^{\nu_1+\rho_J} \otimes 1_{N_J}$ からの誘導表現 (π_J, H_{π_J}) を G の一般化された主系列表現と呼ぶ. すなわち,

$$\begin{aligned} H_{\pi_J} &= \text{Ind}_{P_J}^G(\sigma_J \otimes a_J^{\nu_1+\rho_J} \otimes 1_{N_J}) \\ &= \{f : G \rightarrow V_{\sigma_J} \mid f \text{ は } C^\infty\text{-class, } f(m_J a_J n_J g) = \sigma_J(m_J) a_J^{\nu_1+\rho_J} f(g) \\ &\quad \text{for } \forall g \in G, \forall m_J \in M_J, \forall a_J \in A_J, \forall n_J \in N_J\}, \end{aligned}$$

G の作用は $\pi_J(g)f(x) = f(xg)$ ($\forall f \in H_{\pi_J}, \forall g \in G$) である.

定義 (2.3). K の有限次元既約表現は次の集合で parametrize される.

$$\{\lambda = (l_1, l_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \mid l_1 \geq l_2, \text{ i.e. } \lambda \text{ は dominant integral weight}\}.$$

各 λ に対して $d = l_1 - l_2 \geq 0$ とおくと λ に対応する K の既約表現 $(\tau_{(l_1, l_2)}, V_{(l_1, l_2)})$ は $d+1$ 次元表現で, $V_{(l_1, l_2)}$ の basis $\{v_k \mid 0 \leq k \leq d\}$ を, 各 v_k が weight vector, v_0 は the lowest weight vector, v_d は the highest weight vector となるように選んでおく.

H_π, H_{π_J} の K -finite vectors をそれぞれ $H_{\pi, K}, H_{\pi_J, K}$ と書き, $H_{\pi, K}, H_{\pi_J, K}$ を K -module と見た時に次の命題が成り立つ ([MO1], [MO2]).

命題 (2.4). $\sigma \in \widehat{M}$ として, $\varepsilon_1 = \sigma(-\gamma_2), \varepsilon_2 = \sigma(\gamma_2)$ と書くと次が成り立つ.

- (i) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ の時 (以下, even case と呼ぶ), $\varepsilon_1 = (-1)^l$ なる全ての $l \in \mathbb{Z}$ に対して $\tau_{(l, l)}$ は $H_{\pi, K}$ に multiplicity 1 で現れ, これ以外の 1 次元表現は現れない.
- (ii) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ の時 (以下, odd case と呼ぶ), $\forall l \in \mathbb{Z}$ に対して $\tau_{(l+1, l)}$ は $H_{\pi, K}$ に multiplicity 1 で現れ, 1 次元表現は現れない.

命題 (2.5). $\sigma_1 = (\varepsilon, \xi_l) \in \widehat{M}_1$ で, ξ_l を $SL(2, \mathbb{R})$ の Blattner parameter l ($l \geq 2$) の discrete series とする. また, $\nu_1 \in \mathfrak{a}_{J, \mathbb{C}}^*$ とすると次が成り立つ.

- (i) $\varepsilon(-\gamma_2) = (-1)^l$ の時 (以下 even case と呼ぶ), $\tau_{(k,k)} (k \in \mathbb{Z}, k \equiv l \pmod{2}, k \geq l)$ または $\tau_{(l,k)} (k \in \mathbb{Z}, k \equiv l \pmod{2}, k \leq l)$ は $H_{\pi_J, K}$ に multiplicity 1 で現れ, これ以外の 1 次元表現は現れない.
- (ii) $\varepsilon(-\gamma_2) = (-1)^{l+1}$ の時 (以下 odd case と呼ぶ), $\tau_{(k,k-1)} (k \in \mathbb{Z}, k \geq l)$ または $\tau_{(k,l)} (k \in \mathbb{Z}, k \equiv l \pmod{2}, k \leq l)$ は $H_{\pi_J, K}$ に multiplicity 1 で現れ, これ以外の 2 次元表現と 1 次元表現は現れない.

§ 3. Spherical functions.

$(\eta, V_\eta), (\tau, V_\tau) \in \widehat{K}$ に対して, 函数空間

$$\begin{aligned} C_\eta^\infty(K \backslash G) &= \{f : G \rightarrow V_\eta \mid f \text{ は } C^\infty\text{-class,} \\ &\quad f(kg) = \eta(k)f(g), \forall k \in K, \forall g \in G\}, \\ C_{\eta, \tau}^\infty(K \backslash G/K) &= \{f : G \rightarrow V_\eta \otimes V_{\tau^*} \mid f \text{ は } C^\infty\text{-class,} \\ &\quad f(k_1 g k_2) = \eta(k_1) \otimes \tau^*(k_2)^{-1} f(g), \forall k_1, k_2 \in K, \forall g \in G\} \end{aligned}$$

を定める (V_{τ^*} は V_τ の contragredient 表現). $C_\eta^\infty(K \backslash G)$ を right regular action により G -module と見なし,

$$\mathrm{Hom}_K(V_\tau, C_\eta^\infty(K \backslash G)) \simeq C_\eta^\infty(K \backslash G) \otimes_K V_{\tau^*} \simeq C_{\eta, \tau}^\infty(K \backslash G/K)$$

の元を type (η, τ) の球函数と呼ぶ.

H を admissible $(\mathfrak{g}, K)$ -module, V_τ が H に multiplicity 1 で現れるとし, injective K -map を $i : V_\tau \hookrightarrow H$ とする. $\psi \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(H, C_\eta^\infty(K \backslash G))$ に対して, $\psi \circ i \in \mathrm{Hom}_K(V_\tau, C_\eta^\infty(K \backslash G))$ は type (η, τ) の球函数であり, 以下では H が $H_{\pi, K}, H_{\pi_J, K}$ の時, この函数 $\psi \circ i$ について考察する.

Cartan 分解 $G = KAK$ により, $\phi \in C_{\eta, \tau}^\infty(K \backslash G/K)$ は A 上の制限で決まり, $A \simeq \mathfrak{a} = \mathbb{R}H_1 + \mathbb{R}H_2$ であるから, 以下 $\phi(x, y) = \phi(xH_1 + yH_2)$ により ϕ を $\mathbb{R}^2$ 上の函数と思う. また, D を G 上の微分作用素とした時, $\forall \phi \in C_{\eta, \tau}^\infty(K \backslash G/K)$ に対して $(D\phi)|_A = R(D)(\phi|_A)$ を満たす A 上の微分作用素 $R(D)$ を D の radial part と呼ぶ.

M と Weyl 群の作用を考えることにより, 容易に次の命題が導かれる.

命題 (3.1)(even case). $\eta = (k, k), \tau = (l, l)$ (ただし, $(-1)^k = (-1)^l = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$) とすると

- (i) $\phi(y, x) = \phi(y, x),$

$$(ii) \phi(x, -y) = \begin{cases} \phi(x, y) & \text{for } k-l \equiv 0 \pmod{4}, \\ -\phi(x, y) & \text{for } k-l \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

命題 (3.2)(odd case). $\eta = (k, k-1), \tau = (l, l-1)$ とし, $C_{\eta, \tau}^{\infty}(K \backslash G/K) \ni \phi = \sum_{0 \leq i, j \leq 1} \phi_{ij} v_i^{\eta} \otimes v_j^{\tau*}$ と書くと

$$(i) \begin{cases} \phi_{00} = \phi_{11} \equiv 0 & \text{for } k-l \equiv 0 \pmod{2}, \\ \phi_{01} = \phi_{10} \equiv 0 & \text{for } k-l \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} \phi_{10}(x, y) = -\phi_{01}(y, x) & \text{for } k-l \equiv 0 \pmod{2}, \\ \phi_{11}(x, y) = \phi_{00}(y, x) & \text{for } k-l \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

$$(iii) \phi(x, -y) = \begin{cases} \phi(x, y) & \text{for } k-l \equiv 0, 3 \pmod{4}, \\ -\phi(x, y) & \text{for } k-l \equiv 1, 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

§ 4 Casimir operator.

$H_{2e_i} = H_i$ ($i = 1, 2$), $H_{e_1 \pm e_2} = H_1 \pm H_2$ に対して E_{α} ($\alpha \in \Delta^+$) を $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ の base で, $[E_{\alpha}, {}^t E_{\alpha}] = H_{\alpha}$ を満たすものとする. $Sp(2, \mathbb{R})$ の Casimir operator L は, $L = H_1^2 + H_2^2 - 4H_1 - 2H_2 + 2E_{e_1-e_2}E_{-e_1+e_2} + 4E_{2e_1}E_{-2e_1} + 2E_{e_1+e_2}E_{-e_1-e_2} + 4E_{2e_2}E_{-2e_2}$ で与えられる.

補題 (4.1). $a \in A, \alpha \in \Delta^+$ に対して

$$\begin{aligned} E_{\alpha}E_{-\alpha} &= \frac{1}{(a^{\alpha} - a^{-\alpha})^2} (\text{Ad}(a^{-1})X_{\alpha})^2 - \frac{a^{\alpha} + a^{-\alpha}}{(a^{\alpha} - a^{-\alpha})^2} (\text{Ad}(a^{-1})X_{\alpha})X_{\alpha} \\ &\quad + \frac{a^{\alpha}}{a^{\alpha} - a^{-\alpha}} H_{\alpha} + \frac{1}{(a^{\alpha} - a^{-\alpha})^2} X_{\alpha}^2 \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $X_{\alpha} = E_{\alpha} - {}^t E_{\alpha} \in \mathfrak{k}$.

$X, Y \in U(\mathfrak{k}), H \in U(\mathfrak{a}), a \in A$ としたとき, $\phi \in C_{\eta, \tau}^{\infty}(K \backslash G/K)$ に対して

$$\begin{aligned} &(\text{Ad}(a^{-1})X \cdot H \cdot Y\phi)(a) \\ &= \frac{\partial^3}{\partial s \partial t \partial u} \Big|_{s=t=u=0} \phi(a \cdot \exp s \text{Ad}(a^{-1})X \exp tH \exp uY) \\ &= \frac{\partial^3}{\partial s \partial t \partial u} \Big|_{s=t=u=0} \phi(\exp sX \cdot a \cdot \exp tH \exp uY) \\ &= \frac{\partial^3}{\partial s \partial t \partial u} \Big|_{s=t=u=0} \eta(\exp sX) \otimes \tau^*(\exp uY)^{-1} \phi(a \cdot \exp tH) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \eta(X) \otimes (-\tau^*(Y)) \phi(a \cdot \exp tH) \end{aligned}$$

であるので, この補題を用いると, L の radial part が求まり, 次のようになる.

命題 (4.2)(even case). $\eta = (k, k), \tau = (l, l)$ の時, L は $C_{\eta, \tau}^{\infty}(K \backslash G/K)$ 上,

$$L\phi = \{L_0 - (k^2 + l^2)(\text{sh}^{-2}2x + \text{sh}^{-2}2y) \\ + 2kl(\text{ch}2x \cdot \text{sh}^{-2}2x + \text{ch}2y \cdot \text{sh}^{-2}2y)\}\phi$$

となる. ただし,

$$L_0 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \{2 \coth 2x + \coth(x+y) + \coth(x-y)\}\partial_x \\ + \{2 \coth 2y + \coth(x+y) - \coth(x-y)\}\partial_y$$

とおく ($\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$) .

命題 (4.3)(odd case). $\eta = (k, k-1), \tau = (l, l-1), k \equiv l \pmod{2}$ の時, L は $C_{\eta, \tau}^{\infty}(K \backslash G/K)$ 上, 命題 (4.2) の L_0 を用いて

$$L\phi = [\{L_0 - \text{sh}^{-2}(x+y) - \text{sh}^{-2}(x-y) - ((k-1)^2 + (l-1)^2) \text{sh}^{-2}2x \\ - (k^2 + l^2) \text{sh}^{-2}2y + 2(k-1)(l-1) \text{ch}2x \cdot \text{sh}^{-2}2x \\ + 2kl \text{ch}2y \cdot \text{sh}^{-2}2y\}\phi_{01}(x, y) \\ - \{\text{ch}(x+y) \cdot \text{sh}^{-2}(x+y) + \text{ch}(x-y) \cdot \text{sh}^{-2}(x-y)\}\phi_{10}(x, y)]v_0^{\eta} \otimes v_1^{\tau*} \\ + [\{L_0 - \text{sh}^{-2}(x+y) - \text{sh}^{-2}(x-y) - (k^2 + l^2) \text{sh}^{-2}2x \\ - ((k-1)^2 + (l-1)^2) \text{sh}^{-2}2y + 2kl \text{ch}2x \cdot \text{sh}^{-2}2x \\ + 2(k-1)(l-1) \text{ch}2y \cdot \text{sh}^{-2}2y\}\phi_{10}(x, y) \\ - \{\text{ch}(x+y) \cdot \text{sh}^{-2}(x+y) + \text{ch}(x-y) \cdot \text{sh}^{-2}(x-y)\}\phi_{01}(x, y)]v_1^{\eta} \otimes v_0^{\tau*}$$

となる.

§ 5 Shift operators.

$\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ の compact Cartan subalgebra, $\Sigma_n^+ \subset \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^+$ を noncompact positive roots とし, $\mathfrak{p}_{\pm} = \sum_{\beta \in \Sigma_n^+} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}, \pm\beta}$ と定義する. $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ は Ad による K -module としての既約分解で, $\mathfrak{p}_+ \simeq V_{(2,0)}, \mathfrak{p}_- \simeq V_{(0,-2)}$ である. これらをそれぞれ, $\text{Ad}_{\mathfrak{p}_{\pm}}$ と書くことにする ($\text{Ad}_{\mathfrak{p}_-} \simeq \text{Ad}_{\mathfrak{p}_+}^*$ に注意).

定義 (5.1)(Schmid operator). $\{X_i\}$ を $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の (Killing form による) 正規直交基底とする. Schmid operator ∇_{τ} を

$$\nabla_{\tau} : C_{\tau}^{\infty}(G/K) \ni \phi \rightarrow \sum_i R_{X_i} \phi \otimes X_i \in C_{\tau \otimes \text{Ad}_{\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}}}^{\infty}(G/K)$$

で定義する. ここで, $\phi \in C_r^\infty(G/K)$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C},\beta} = \mathbb{C}X_\beta$, $R_X\phi(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}f(x \exp tX)$ とする. この時 ∇ は $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の正規直交基底の取り方によらない.

$\mathbb{C}X_\beta = \mathfrak{g}_{\beta,\mathbb{C}}$ ($\beta \in \Sigma_n^+$), $X_{-\beta} = \bar{X}_\beta$ とすると, ある定数 $C > 0$ があって $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の直交基底として

$$\{C|\beta|(X_\beta + X_{-\beta}), \frac{C|\beta|}{\sqrt{-1}}(X_\beta - X_{-\beta}) | \beta \in \Sigma_n^+\}$$

がとれる. この基底に対して $\nabla_\tau = 2C(\nabla_\tau^+ + \nabla_\tau^-)$,

$$\nabla_\tau^\pm : C_r^\infty(G/K) \ni \phi \rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\beta \in \Sigma_n^+} |\beta|^2 R_{X_{\pm\beta}} \phi \otimes X_{\mp\beta} \in C_{\tau \otimes \text{Ad}_{\mathfrak{p}_{\pm}}}^\infty(G/K)$$

と分解することが分かる.

定義 (5.2) (Shift operators for even case). $\tau = (l, l)$ の時, $\tau \otimes \text{Ad}_{\mathfrak{p}_{\pm}} \otimes \text{Ad}_{\mathfrak{p}_{\pm}}$ は $\tau_\pm = (l \pm 2, l \pm 2)$ を重複度 1 で既約成分に持つ. そこで, $\text{pr}_e^\pm$ を

$$\text{pr}_e^\pm : C_{\tau \otimes \text{Ad}_{\mathfrak{p}_{\pm}} \otimes \text{Ad}_{\mathfrak{p}_{\pm}}}^\infty(G/K) \rightarrow C_{\tau_\pm}^\infty(G/K) : \text{projection}$$

で定め,

$$\begin{cases} D_l^+ = \text{pr}_e^+ \circ \nabla_{\tau \otimes \text{Ad}_{\mathfrak{p}_+}}^+ \circ \nabla_\tau^+ : C_{(l,l)}^\infty(G/K) \rightarrow C_{(l+2,l+2)}^\infty(G/K) \\ D_l^- = \text{pr}_e^- \circ \nabla_{\tau \otimes \text{Ad}_{\mathfrak{p}_-}}^- \circ \nabla_\tau^- : C_{(l,l)}^\infty(G/K) \rightarrow C_{(l-2,l-2)}^\infty(G/K) \end{cases}$$

なる 2 階の微分作用素を *Shift operator* と呼ぶ.

注意 (5.3). $D_{l-2}^+ \circ D_l^-$ は $C_{(l,l)}^\infty(G/K)$ から $C_{(l,l)}^\infty(G/K)$ への写像, 特に, $\tau = (l, l)$ として $C_{\eta,\tau}^\infty(K \backslash G/K)$ から $C_{\eta,\tau}^\infty(K \backslash G/K)$ への写像である.

定義 (5.4) (Shift operators for odd case). $\tau = (l, l-1)$ の時, $\tau \otimes \text{Ad}_{\mathfrak{p}_{\pm}}$ は $\tau_+ = (l+1, l)$, $\tau_- = (l-1, l-2)$ を重複度 1 で既約成分に持つ. そこで, $\text{pr}_o^\pm$ を

$$\text{pr}_o^\pm : C_{\tau \otimes \text{Ad}_{\mathfrak{p}_{\pm}}}^\infty(G/K) \rightarrow C_{\tau_\pm}^\infty(G/K) : \text{projection}$$

で定め,

$$\begin{cases} E_l^+ = \text{pr}_o^+ \circ \nabla_\tau^+ : C_{(l,l-1)}^\infty(G/K) \rightarrow C_{(l+1,l)}^\infty(G/K) \\ E_l^- = \text{pr}_o^- \circ \nabla_\tau^- : C_{(l,l-1)}^\infty(G/K) \rightarrow C_{(l-1,l-2)}^\infty(G/K) \end{cases}$$

なる 1 階の微分作用素 (を成分に持つ行列) を *Shift operator* と呼ぶ.

注意 (5.5). $E_{l-1}^+ \circ E_l^-$ は $C_{(l,l-1)}^\infty(G/K)$ から $C_{(l,l-1)}^\infty(G/K)$ への写像, 特に, $\tau = (l, l-1)$ として $C_{\eta,\tau}^\infty(K \setminus G/K)$ から $C_{\eta,\tau}^\infty(K \setminus G/K)$ への写像である.

以上で定義した Shift operator の radial part は次のようになる.

命題 (5.6)(even case). $\eta = (k, k), \tau = (l, l), \phi \in C_{\eta,\tau}^\infty(K \setminus G/K)$ とした時, $D_l^\pm$ の radial part は次で与えられる.

(i)

$$\begin{aligned} D_l^+ \phi = & [2\partial_x \partial_y + \{-2l \coth 2y + 2k \operatorname{sh}^{-1} 2y + \coth(x+y) - \coth(x-y)\} \partial_x \\ & + \{-2l \coth 2x + 2k \operatorname{sh}^{-1} 2x + \coth(x+y) + \coth(x-y)\} \partial_y \\ & + 2(l \coth 2x - k \operatorname{sh}^{-1} 2x)(l \coth 2y - k \operatorname{sh}^{-1} 2y) \\ & - (l \coth 2y - k \operatorname{sh}^{-1} 2y)(\coth(x+y) + \coth(x-y)) \\ & - (l \coth 2x - k \operatorname{sh}^{-1} 2x)(\coth(x+y) - \coth(x-y))] \phi. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} D_l^- \phi = & [2\partial_x \partial_y + \{2l \coth 2y - 2k \operatorname{sh}^{-1} 2y + \coth(x+y) - \coth(x-y)\} \partial_x \\ & + \{2l \coth 2x - 2k \operatorname{sh}^{-1} 2x + \coth(x+y) + \coth(x-y)\} \partial_y \\ & + 2(l \coth 2x - k \operatorname{sh}^{-1} 2x)(l \coth 2y - k \operatorname{sh}^{-1} 2y) \\ & + (l \coth 2y - k \operatorname{sh}^{-1} 2y)(\coth(x+y) + \coth(x-y)) \\ & + (l \coth 2x - k \operatorname{sh}^{-1} 2x)(\coth(x+y) - \coth(x-y))] \phi. \end{aligned}$$

命題 (5.7)(odd case). $\eta = (k, k-1), \tau = (l, l-1), \tau_+ = (l-1, l-2), (k \equiv l \pmod{2}), \phi = \phi_{01} v_0^\eta \otimes v_1^{\tau^*} + \phi_{10} v_1^\eta \otimes v_0^{\tau^*} \in C_{\eta,\tau}^\infty(K \setminus G/K), \phi^+ = \phi_{00}^+ v_0^\eta \otimes v_0^{\tau^*} + \phi_{11}^+ v_1^\eta \otimes v_1^{\tau^*} \in C_{\eta,\tau_+}^\infty(K \setminus G/K)$ とした時, E_{l-1}^+, E_l^- の radial part は次で与えられる.

(i)

$$\begin{aligned} E_{l-1}^+ \phi^+ = & [\{\partial_y - (l-2) \coth 2y + k \operatorname{sh}^{-1} 2y \\ & + \frac{1}{2}(\coth(x+y) - \coth(x-y))\} \phi_{00}^+ \\ & + \frac{1}{2}(\operatorname{sh}^{-1}(x+y) + \operatorname{sh}^{-1}(x-y)) \phi_{11}^+ v_0^\eta \otimes v_1^{\tau^*} \\ & + [-\{\partial_x - (l-2) \coth 2x + k \operatorname{sh}^{-1} 2x \\ & + \frac{1}{2}(\coth(x+y) + \coth(x-y))\} \phi_{11}^+ \\ & - \frac{1}{2}(\operatorname{sh}^{-1}(x+y) - \operatorname{sh}^{-1}(x-y)) \phi_{00}^+ v_1^\eta \otimes v_0^{\tau^*}]. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
E_l^- \phi = & [-\{\partial_y + l \coth 2y - k \operatorname{sh}^{-1} 2y + \frac{1}{2}(\coth(x+y) - \coth(x-y))\} \phi_{01} \\
& - \frac{1}{2}(\operatorname{sh}^{-1}(x+y) - \operatorname{sh}^{-1}(x-y)) \phi_{10}] v_0^\eta \otimes v_0^{\tau^*} \\
& + [\{\partial_x + l \coth 2x - k \operatorname{sh}^{-1} 2x + \frac{1}{2}(\coth(x+y) + \coth(x-y))\} \phi_{10} \\
& + \frac{1}{2}(\operatorname{sh}^{-1}(x+y) + \operatorname{sh}^{-1}(x-y)) \phi_{01}] v_1^\eta \otimes v_1^{\tau^*}.
\end{aligned}$$

§ 6 球函数の満たす微分方程式.

以上の準備のもとで, この section では球函数が満たす微分方程式を求める.

H_π の球函数については, Casimir operator L は $H_\pi = \operatorname{Ind}_P^G(\sigma \otimes a^{(\mu+\rho)} \otimes 1_N)$ ($\mu = (\mu_1, \mu_2)$) 上 infinitesimal character $\mu_1^2 + \mu_2^2 - 5$ で作用するので, $\phi \in C_{\eta, \tau}^\infty(K \backslash G/K)$ に対しても $\mu_1^2 + \mu_2^2 - 5$ 倍で作用する.

一方, $C_{\eta, \tau}^\infty(K \backslash G/K) \simeq \operatorname{Hom}_K(V_\tau, C_\eta^\infty(K \backslash G))$ と H_π において τ は multiplicity 1 (命題 (2.4)) であることから, $D_{l-2}^+ \circ D_l^-, E_{l-1}^+ \circ E_l^-$ も $\phi \in C_{\eta, \tau}^\infty(K \backslash G/K)$ に対して scalar で作用する. この scalar 値は K -type V_τ を具体的に $C^\infty(K)$ に実現して shift operator を実際に作用させることで得られる.

従って次の定理が得られた.

定理 (6.1)(even case). $\eta = (k, k), \tau = (l, l)$ ($k \equiv l \pmod{2}$) の時, H_π の球函数 $\phi \in C_{\eta, \tau}^\infty(K \backslash G/K)$ が満たす微分方程式は

- (i) $L\phi = (\mu_1^2 + \mu_2^2 - 5)\phi,$
- (ii) $D_{l-2}^+ \circ D_l^- \phi = 4\{\mu_1^2 - (l-1)^2\}\{\mu_2^2 - (l-1)^2\}\phi.$

定理 (6.2)(odd case). $\eta = (k, k-1), \tau = (l, l-1)$ ($k \equiv l \pmod{2}$) の時, H_π の球函数 $\phi \in C_{\eta, \tau}^\infty(K \backslash G/K)$ が満たす微分方程式は

- (i) $L\phi = (\mu_1^2 + \mu_2^2 - 5)\phi,$
- (ii) $E_{l-1}^+ \circ E_l^- \phi = \begin{cases} -\{\mu_1^2 - (l-1)^2\}\phi & \text{if } l: \text{odd} \\ -\{\mu_2^2 - (l-1)^2\}\phi & \text{if } l: \text{even} \end{cases}$

H_{π_J} 表現の球函数については, Casimir operator L は $H_{\pi_J} = \operatorname{Ind}_{P_J}^G(\sigma_J \otimes a_J^{\nu_1+\rho_J} \otimes 1_{N_J})$ 上, infinitesimal character $\nu_1^2 + (l-1)^2 - 5$ で作用するので, $\phi \in C_{\eta, \tau}^\infty(K \backslash G/K)$ に対しても $\nu_1^2 + (l-1)^2 - 5$ 倍で作用する.

一方, even case では, D_l^- は $C_{(l,l)}^\infty(G/K)$ から $C_{(l-2,l-2)}^\infty(G/K)$ への map であったが, 命題 2.5 より K -type $V_{(l-2,l-2)}$ は H_{π_J} に現れないので, H_{π_J} の球函

数は D_l^- の kernel に属する. また, odd case では, E_l^- は $C_{(l,l-1)}^\infty(G/K)$ から $C_{(l-1,l-2)}^\infty(G/K)$ への map であったが, 命題 2.5 より K -type $V_{(l-1,l-2)}$ は H_{π_J} に現れないので, H_{π_J} の球関数は E_l^- の kernel に属する.

従って次の定理が得られた.

定理 (6.3)(even case). $\eta = (k, k), \tau = (l, l) (k \equiv l \pmod{2})$ の時, H_{π_J} の球関数 $\phi \in C_{\eta, \tau}^\infty(K \backslash G/K)$ が満たす微分方程式は

- (i) $L\phi = \{\nu_1^2 + (l-1)^2 - 5\}\phi,$
- (ii) $D_l^- \phi = 0.$

定理 (6.4)(odd case). $\eta = (k, k-1), \tau = (l, l-1) (k \equiv l \pmod{2})$ の時, H_{π_J} の球関数 $\phi \in C_{\eta, \tau}^\infty(K \backslash G/K)$ が満たす微分方程式は

- (i) $L\phi = \{\nu_1^2 + (l-1)^2 - 5\}\phi,$
- (ii) $E_l^- = 0.$

注意 (6.5).

(i) $k = l = 0$ の時, 定理 (6.1) と 定理 (6.3) の微分方程式系は [DG1], [DG2] において root multiplicity を一般の parameter にして抽象的に (リーマン対称空間 G/K を持ち出さず) 定義され, 定理 (6.1) についてはその多項式解が [DG2] で, 定理 (6.3) については一般の analytic 解が [DG1] で得られている.

(ii) $k = l = 0$ の時, 定理 (6.1) の微分方程式系は B_2 型 Weyl 群不変な微分作用素系の一系列として, また 定理 (6.3) の微分方程式系がその可約系 (parameter が [DG1], [DG2] よりも, もっと多い形で) として [OO] で定義された.

§ 7 H_{π_J} の球関数.

この section では, 定理 (6.3), (6.4) で得られた微分方程式の解を求める. まず, $\delta(x, y; k, l) = (\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y)^{\frac{k+l}{2}} (\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y)^{-\frac{k-l}{2}}$ なる関数で微分方程式をねじった ($k = l = 0$ の場合に帰着することになる) 後, 変数変換して見やすい形にする. even case の Casimir operator の $k = l = 0$ の場合へ帰着については [H2], [Sh] で示されている.

命題 (7.1)(even case). $\phi \in C_{\eta, \tau}^\infty(K \backslash G/K)$ が 定理 (6.3) (i), (ii) を満たすとき, $\psi(x, y) = \delta(x, y; k, l)\phi(x, y)$ が満たす微分方程式を $x_1 = -\operatorname{sh}^2 x, x_2 = -\operatorname{sh}^2 y$ と変数変換すると ($\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ として)

$$(i) \quad \left[\sum_{i=1}^2 x_i(x_i - 1)\partial_{x_i}^2 + \left\{ (2-l)x_1 - 1 - \frac{k-l}{2} + \frac{x_1(x_1 - 1)}{x_1 - x_2} \right\} \partial_{x_1} \right. \\ \left. + \left\{ (2-l)x_2 - 1 - \frac{k-l}{2} - \frac{x_2(x_2 - 1)}{x_1 - x_2} \right\} \partial_{x_2} - \frac{1}{4}(\nu_1^2 - (l-2)^2) \right] \psi = 0,$$

$$(ii) [\partial_{x_1} \partial_{x_2} - \frac{1}{2} \frac{1}{x_1 - x_2} \partial_{x_1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x_1 - x_2} \partial_{x_2}] \psi = 0.$$

命題 (7.2)(odd case). $\phi = \phi_{01} v_0^\eta \otimes v_1^{r^*} + \phi_{10} v_1^\eta \otimes v_0^{r^*} \in C_{\eta, r}^\infty(K \backslash G/K)$ が定理 (6.4) (i), (ii) を満たすとき, $\psi_{01}(x, y) = \delta(x, y; k, l) \cdot (\text{ch } x)^{-1} \psi_{01}(x, y)$, $\psi_{10}(x, y) = \delta(x, y; k, l) \cdot (\text{ch } y)^{-1} \psi_{10}(x, y)$ が満たす微分方程式を $x_1 = -\text{sh}^2 x$, $x_2 = -\text{sh}^2 y$ と変数変換し, $\psi_{10}(y, x) = -\psi_{01}(x, y)$ を用いると

$$(i) \left[\sum_{i=1}^2 x_i (x_i - 1) \partial_{x_i}^2 + \left\{ (2-l)x_1 - 1 - \frac{k-l}{2} + \frac{x_1(x_1-1)}{x_1-x_2} \right\} \partial_{x_1} \right. \\ \left. + \left\{ -lx_2 - \frac{k-l}{2} - 3 \frac{x_2(x_2-1)}{x_1-x_2} \right\} \partial_{x_2} - \frac{1}{4} \{ \nu_1^2 - (l-1)^2 - 2 \} \right] \psi_{01} = 0,$$

$$(ii) [\partial_{x_1} \partial_{x_2} - \frac{1}{2} \frac{1}{x_1 - x_2} \partial_{x_1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x_1 - x_2} \partial_{x_2}] \psi_{01} = 0.$$

[DG1] で用いられたのと同様の方法で 定理 (7.2)(i), (ii) の解も調べることができる. 鍵となるのは次の補題である ($B_1 = B_2$ の時, [DG1]).

補題 (7.3). $B_1, B_2 > 0$ の時, (x_1, x_2) の近傍で analytic 関数 f で

$$[\partial_{x_1} \partial_{x_2} - B_2 \frac{1}{x_1 - x_2} \partial_{x_1} + B_1 \frac{1}{x_1 - x_2} \partial_{x_2}] f = 0$$

を満たすものは次の形の級数展開と積分表示を持つ.

$$(i) f(x_1, x_2) = \sum_{m_1, m_2 \geq 0} \frac{(B_1)_{m_1} (B_2)_{m_2} \xi(m_1 + m_2)}{m_1! m_2!} x_1^{m_1} x_2^{m_2}$$

ただし, $(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}$, ξ は任意関数.

$$(ii) f(x_1, x_2) = \int_0^1 F(tx_1 + (1-t)x_2) t^{B_1-1} (1-t)^{B_2-1} dt$$

ただし, F は原点の近傍で analytic な任意関数.

(iii) (i) と (ii) の 2 式が一致するとき,

$$F(s) = \frac{\Gamma(B_1 + B_2)}{\Gamma(B_1)\Gamma(B_2)} \sum_{n \geq 0} \frac{(B_1 + B_2)_n \xi(n)}{n!} s^n$$

が成立.

この補題を用いて以下の定理が証明できる.

定理 (7.4)(even case).

(i) 定理 (7.1) (i),(ii) の $(x_1, x_2) = (0, 0)$ の近傍で analytic な解の級数展開は次で与えられる.

$$\psi(x_1, x_2) = \sum_{m_i \geq 0} \frac{(\frac{1}{2})_{m_1} (\frac{1}{2})_{m_2} (-\mu_+)_{m_1+m_2} (-\mu_-)_{m_1+m_2}}{m_1! m_2! (1)_{m_1+m_2} (\frac{3+k-l}{2})_{m_1+m_2}} x_1^{m_1} x_2^{m_2}$$

ただし, $\mu_{\pm} = \frac{1}{2}(l-2 \pm \nu_1)$.

(ii) 定理 (7.1) (i),(ii) の $(x_1, x_2) = (0, 0)$ の近傍で analytic な解の積分表示は次で与えられる.

$$\psi(x_1, x_2) = \int_0^1 {}_2F_1(a, b; \frac{3+k-l}{2}; tx_1 + (1-t)x_2) t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

ただし, $a+b = 2-l$, $ab = \frac{1}{4}(\nu_1^2 - (l-2)^2)$, ${}_2F_1$ は原点の近傍で analytic な Gauss の超幾何関数.

注意 (7.5). 上で与えた解は, $\nu_1 = \pm l$ のとき $-\mu_{\mp} = 1$ となって, Lauricella の超幾何関数 $F_D(-l, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+k-l}{2}; x_1, x_2)$ となる.

定理 (7.6)(odd case).

(i) 定理 (7.2) (i),(ii) の $(x_1, x_2) = (0, 0)$ の近傍で analytic な解の級数展開は次で与えられる

$$\psi_{01}(x_1, x_2) = \sum_{m_i \geq 0} \frac{(\frac{3}{2})_{m_1} (\frac{1}{2})_{m_2} (-\mu_+)_{m_1+m_2} (-\mu_-)_{m_1+m_2}}{m_1! m_2! (2)_{m_1+m_2} (\frac{3+k-l}{2})_{m_1+m_2}} x_1^{m_1} x_2^{m_2}.$$

ただし, $\mu_{\pm} = \frac{1}{2}(l-2 \pm \sqrt{\nu_1^2 - 2l + 1})$.

(ii) 定理 (7.2) (i),(ii) の $(x_1, x_2) = (0, 0)$ の近傍で analytic な解の積分表示は次で与えられる.

$$\psi_{01}(x_1, x_2) = \int_0^1 {}_2F_1(a, b; \frac{3+k-l}{2}; tx_1 + (1-t)x_2) t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

ただし, $a+b = 2-l$, $ab = \frac{1}{4}(\nu_1^2 - (l+1)^2 - 2)$, ${}_2F_1$ は原点の近傍で analytic な Gauss の超幾何関数.

注意 (7.7). 上で与えた解は, $\nu_1 = \pm \sqrt{l^2 + 6l + 3}$ のとき $-\mu_+$ または $-\mu_- = 2$ となって, Lauricella の超幾何関数 $F_D(-l, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+k-l}{2}; x_1, x_2)$ となる.

REFERENCES

- [DG1] A. Debiard and B. Gaveau, *Représentation intégrale de certaines séries de fonctions sphériques d'un système de racines BC* , J. Funct. Anal. **96** (1991), 256–296.
- [DG2] ———, *Integral Formulas for the Spherical Polynomials of a Root System of Type BC_2* , J. Funct. Anal. **119** (1994), 401–454.
- [H1] G. J. Heckman, *Root system and hypergeometric functions II*, Comp. Math. **64** (1987), 353–373.
- [H2] ———, *Lectures on hypergeometric and spherical functions*, preprint (1992).
- [HO] G. J. Heckman and E. M. Opdam, *Root system and hypergeometric functions I*, Comp. Math. **64** (1987), 329–352.
- [Kn] A. W. Knap, *Representation Theory of Semisimple Groups An Overview Based on Examples*, Princeton Mathematical Series (1986), Princeton Univ. Press.
- [Ko] T. H. Koornwinder, *Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators. I, II, III, IV*, Indagationes Mathematicae **36** (1974), 48–58, 59–66, 357–369, 370–381.
- [MO1] T. Miyazaki and T. Oda, *Principal series Whittaker functions on $Sp(2, \mathbb{R})$ –Explicit formulae of differential equations–*, Proceedings of the 1993 Workshop, Automorphic Forms and Related Topics, The Pyungsan Institute for mathematical sciences.
- [MO2] ———, *Principal series Whittaker functions on $Sp(2, \mathbb{R})$ II*, Preprint (1994).
- [OO] H. Ochiai and T. Oshima, *Commuting differential operators of type B_2* , preprint (1994).
- [Op1] E. M. Opdam, *Root system and hypergeometric functions III*, Comp. Math. **67** (1988), 21–49.
- [Op2] ———, *Root system and hypergeometric functions IV*, Comp. Math. **67** (1988), 191–209.
- [Os] T. Oshima, *Completely integrable systems with a symmetry in coordinates*, preprint (1994).
- [OS] T. Oshima and H. Sekiguchi, *Commuting families of differential operators invariant under the action of a Weyl group*, preprint (1993).
- [Sc] W. Schmid, *On the realization of the discrete series of a semisimple Lie group*, Rice Univ. Studies **56** (1970), 99–108.
- [Sh] N. Shimeno, *The Plancherel formula for spherical functions with a one-dimensional K -type on a simply connected simple Lie group of Hermitian type*, J. Funct. Anal. **121** (1994), 330–388.