

一般化されたエントロピーによる発達乱流の解析

筑波大 物理 有光 敏彦¹
 横浜国大 環境 有光 直子²

発達乱流の基盤をなす統計が、一般化されたエントロピー（Renyi エントロピーあるいは Havrda-Charvat-Tsallis (HCT) エントロピー）に基づくものであると仮定して、速度構造関数のスケーリング指数を解析的かつ非摂動的に導いた。間欠性指数の実測値 $\mu = 0.220$ ($\pm 1\%$) により Renyi エントロピーあるいは HCT エントロピーに現れる指数をセルフ・コンシステントに算出し $q = 0.343$ を得た。その結果、速度構造関数のスケーリング指数が実験結果とよく一致することが示された。速度ゆらぎの確率密度関数の表式も導出する。

1 導入

発達乱流の研究は、慣性領域における乱雑速度場の自己相似性の仮説に基づいた Kolmogorov [1] の次元解析から始まった。その領域では、いかなる物理量も動粘性率とエネルギー輸送率によって決定される。Heisenberg [2] による予備的研究の後、自己相似性の破れ、すなわち、速度場における間欠性を扱う方法は主に二つの方向に発展した。一つは動力学的方法 [3,4] であり、もう一つは静力学的方法 [5-15] である。動力学的方法では確率的 Navier-Stokes 方程式を直接扱う。他方、静力学的方法では、構成する渦によるエネルギー・カスケードとして発達乱流を解析する。静力学的方法の中では、マルチフラクタル的解析 [9-13] が間欠性現象の解明に対して有望であるが、これは動力学的方法に対しても実り多い洞察を与えることが期待される。対数正規モデル [5-7] もマルチフラクタル的とみなせる。

以前の論文 [16] では、Renyi [17] あるいは Havrda-Charvat-Tsallis (HCT) [18,19] 型の局所散逸分布関数を提案した。そこに現れる RHCT 指数 q [17-20] として p モデルに対応する有効指数値を採用すると、その分布関数は p モデル [11,12] の二項分布関数とよく一致することが分かった。なお、 p モデルに対応する有効指数値 q は、スケーリング関係 [21,22]

$$1/(1-q) = 1/\alpha_{\min} - 1/\alpha_{\max} \quad (1)$$

を用いて、間欠性指数 μ の実測値より決定された。 $\alpha_{\max}$, $\alpha_{\min}$ は、それぞれ p モデルにおけるマルチフラクタル・スペクトル $f_B(\alpha)$ の引数の最大・最小値であり、 $f_B(\alpha) = 0$ を満たしている。この解析により、発達乱流系では $q < 1$ であることが明らかになった [16]。

本論文では、発達乱流の本質を明らかにするために、以前の論文 [16] の考え方を踏襲し、その方針をさらに発展させる [23-26]。すなわち、二つの条件（「確率の規格化」と後で定義する「 q 分散を一定にする」）の下に、一般化されたエントロピー（Renyi エントロピー [17] あるいは Havrda-Charvat-Tsallis (HCT) エントロピー [18,19]）の極大を与える適切な分布関数 $\Pi_{\text{dis}}(\epsilon_n)$ をセルフ・コンシステントに導出する。それをもって第 n 世代の渦の局所エネルギー散逸（単位質量当りのエネルギー輸送率） ϵ_n に対する確率密度関数とするのである。これは、乱流に関して得ることのできる情報は q 分散のみであるとしたことに相当する。Boltzmann-Gibbs（あるいは Shannon）

¹ E-mail: arimitsu@cm.ph.tsukuba.ac.jp

² E-mail: arimitsu@dnj.ynu.ac.jp

エントロピーに基づいた解析をした場合 ($q \rightarrow 1$), q 分散は, 間欠性指数 μ となる。一般に, Renyi エントロピーは加法的であり, HCT エントロピーは非加法的である。これらのエントロピーは, 特別な場合 (RHCT 指数 $q \rightarrow 1$ の極限) として Boltzmann-Gibbs エントロピーを含んでいる。得られた確率密度関数から発達乱流の基盤をなす統計が Boltzmann-Gibbs エントロピーではなく, 一般化されたエントロピー (Renyi エントロピーあるいは HCT エントロピー) であることが明らかになった。確率密度関数が与えられると, それに対応するマルチフラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ が分かる。そのマルチフラクタル・スペクトルを用いて, 速度構造関数 (定義は (20) を参照せよ) に対するスケーリング指数 ζ_m の解析的表式を非摂動的に導き, 実験結果 [27–29] や他の理論計算結果 (K41 [1], 対数正規 [5–7], β モデル [8], p モデル [11,12], 対数 Poisson [14,15]) と比べる。本論文で得られた ζ_m の解析的表式は, 広い範囲の m にわたって実験結果をよく説明している (Fig. 1, Table 3 を参照のこと)。なお, 解析的な表式を評価すると, $m \gg 1$ のとき, ζ_m に対数項が存在することも分かる [23–26]。このことは, 従来の理論的研究では認識されていなかったことである。

第2章では, 本論文における手法の定式化を行う。2.1 節で慣性領域における乱流の現象論に少し触れ, 2.2 節でマルチフラクタル的解析のための道具立てをする。発達乱流は様々な大きさの渦から成っている。同じサイズの渦を, クラスターの集合 (渦を構成する「粒子」数密度でグループ分けしたもの) へ, 分類することを考える。各グループに属するクラスターは, そのグループに特有なフラクタル次元で物理的空間を埋めているとする。2.3 節では, 渦をクラスターとみなすことにより, スケーリング関係式を導く。ここで言うスケーリング関係式とは, RHCT 指数とマルチフラクタル・スペクトルの零点を与える α の値との間に成り立つ関係式を指す。第3章では, セルフ・コンシステントな解析により一般化されたエントロピー (Renyi エントロピーあるいは HCT エントロピー) より導出された確率密度関数に現れるパラメータを決定する。その結果, 間欠性指数を与えさえすれば, パラメータの値はユニークに決定できることが分かる。間欠性指数の値としては, 実測値を採用する。第4章では, 速度構造関数のスケーリング指数に対する解析的な表式を導出し, 実験結果や発達乱流の他の理論による結果と比較する。第5章では, 速度差に対する確率密度関数を同様な手順で解析的に導く。第6章は考察に充てる。

2 定式化

2.1 慣性領域

発達乱流の系は, 非圧縮流体の Navier-Stokes 方程式 $\partial \vec{u} / \partial t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla (p/\rho) + \nu \nabla^2 \vec{u}$ で記述される。ただし, ρ , p , ν はそれぞれ, 質量密度, 圧力, 動粘性率である。本論文では, 網目の大きさが ℓ_0 である格子の後方に発生した一様等方乱流の流速成分 u (例えば, 流れの速度場 $\vec{u}$ の x 成分) の時系列を解析する。格子位置での流体の速度成分を u_0 とする。Taylor の凍結仮説の下では, 興味の対象となるのは距離 r 離れた2点間の同時刻における速度成分 u の差 $\delta u(r) = |u(x+r) - u(x)|$ である。

系の Reynolds 数 Re は, $Re = \delta u_0 \ell_0 / \nu = (\ell_0 / \ell_K)^{4/3}$ で与えられる。ただし, $\delta u_0 = (\epsilon \ell_0)^{1/3}$ の関係を用いた。 $\ell_K = (\nu^3 / \epsilon)^{1/4}$ は Kolmogorov スケールであり, 最大サイズ ℓ_0 の渦へのエネルギー流入率を ϵ とした。さらに, 距離が $r \sim \ell_n$ 離れた2点間の速度差を $\delta u_n = \delta u(\ell_n)$ と書いた。

発達乱流系に間欠性が見られるのは, 系が異なった大きさの渦で構成されているからである。 $\delta_n = \delta^{-n}$ ($\delta > 1$) とすると, 渦の直径は $\ell_n = \ell_0 \delta_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で表わされる [8]。渦の大きさはそのカスケードの世代数 n に依存している。それぞれのカスケードにおいて, 渦は $1/\delta$ の大きさに分割され δ 個になるものと仮定する。

高 Reynolds 数 $Re \gg 1$ の場合は, 広い慣性領域が存在する。その領域は $\ell_0 \gg \ell_n \gg \ell_K$ の関係を満たす渦サイズ ℓ_n で特徴付けられる。発達乱流系では, カスケード (ここではエネルギー・カスケード) が現れる領域において, 系の基礎方程式を不変に保つスケール変換が存在する。実際, Reynolds 数が高い場合, 慣性領域において右

辺の第2項が無視できるので、Navier-Stokes 方程式はスケール変換 [12]: $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \lambda \vec{r}$, $\vec{u} \rightarrow \vec{u}' = \lambda^{\alpha/3} \vec{u}$, $t \rightarrow t' = \lambda^{1-\alpha/3} t$, $(p/\rho) \rightarrow (p/\rho)' = \lambda^{2\alpha/3} (p/\rho)$ に対して不変である。ただし、 α は任意の実数であり、渦を色分けする指標となる。さらに $\delta u_n / \delta u_0 = (\ell_n / \ell_0)^{\alpha/3}$ の関係が得られる。 $\delta u_n / \ell_n^{\alpha/3} = \text{const.}$ であるので、 $\alpha < 3$ の場合に、速度勾配 $|\partial u(x) / \partial x| = \lim_{\ell_n \rightarrow 0} |u(x + \ell_n) - u(x)| / \ell_n = \lim_{\ell_n \rightarrow 0} \delta u_n / \ell_n$ に特異性が現れる [10]。指数 α は特異性の程度を表わす指標とみなせる。

$\delta u_n / \ell_n$ がサイズ $\sim \ell_n$ [8] における典型的な「ずれ」であることを考慮すると、サイズ $\sim \ell_n$ の渦がサイズ $\sim \ell_{n+1}$ の渦に分解するまでの特性時間は、渦のターン・オーバー時間として定義された量 $t_n \sim \ell_n / \delta u_n$ で与えられると考えるとよからう。この特性時間を用いると、 n 番目の渦から $(n+1)$ 番目の渦への単位質量あたりのエネルギー輸送率は、 $\epsilon_n = E_n / t_n \sim (\delta u_n)^3 / \ell_n$ と評価できる。ただし、サイズ $\sim \ell_n$ の渦が持つ単位質量あたりの運動エネルギー E_n は $E_n = (\delta u_n)^2 / 2$ であることを利用した。けっきょく、 $\epsilon_0 = \epsilon$ と記すことにすると、 ϵ_n は、 $\epsilon_n / \epsilon = (\ell_n / \ell_0)^{\alpha-1}$ に従ってスケールされることが分かる。

2.2 マルチフラクタル的側面

速度勾配における特異性の程度は、指数 α で特徴付けられることを見た。その特異性がフラクタル次元 $F(\alpha)$ で次元実空間を埋めているとする。ある地点に特異性 α を見出す確率 $P(\alpha) d\alpha$ は、 $P(\alpha) \propto \delta_n^{d-F(\alpha)}$ で与えられる。 $\epsilon_n / \epsilon = (\ell_n / \ell_0)^{\alpha-1}$ を考慮に入れると、この意味するところは、エネルギー輸送率 ϵ_n が実空間の場所ごとに揺らいでいるということである。

速度勾配の特異性と関連したエネルギー輸送率の分布関数 $\Pi_{\text{dis}}(\epsilon_n)$ は、 $\Pi_{\text{dis}}(\epsilon_n) d\epsilon_n = P(\alpha) d\alpha$ によりスケール指数の分布関数 $P(\alpha)$ で与えられる。そこで、以下では一般化されたエントロピーを利用して $P(\alpha)$ を導出することを考える。

エネルギーの保存より、 $\langle \epsilon_n \rangle = \epsilon$ である。また、間欠性指数 μ は $\langle \epsilon_n^2 \rangle = \epsilon^2 \delta_n^{-\mu}$ で定義される。ただし、 $\langle \dots \rangle = \int d\alpha \dots P(\alpha)$ である。ここで、

$$S_{\text{dis}}(\epsilon_n / \epsilon) = \langle (\epsilon_n / \epsilon)^{\bar{q}} \rangle = \langle \delta_n^{\bar{q}(\alpha-1)} \rangle = \delta_n^{1-\bar{q}-\tau(\bar{q})} \quad (2)$$

で定義される構造関数 $S_{\text{dis}}(\epsilon_n / \epsilon)$ を導入すると便利である。 $\tau(\bar{q})$ は、質量指数³ と呼ばれるものである。この質量指数を用いると、上の条件はそれぞれ

$$\tau(1) = 0, \quad (4)$$

$$\mu = 1 + \tau(2) \quad (5)$$

と書き換えられる。 $P(\alpha) \propto \delta_n^{d-F(\alpha)}$ を $\langle \delta_n^{\bar{q}(\alpha-1)} \rangle = \delta_n^{1-\bar{q}-\tau(\bar{q})}$ に代入し、極限 $\delta_n \ll 1$ における積分評価をすると $\delta_n^{1-\bar{q}-\tau(\bar{q})} = \int d\alpha' P(\alpha') \delta_n^{\bar{q}(\alpha'-1)} \sim \delta_n^{1-f(\alpha)+\bar{q}(\alpha-1)}$ が得られる。ただし、マルチフラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ を

$$f(\alpha) = F(\alpha) - (d-1) = \bar{q}\alpha + \tau(\bar{q}) \quad (6)$$

にて導入した。 α と $\bar{q}$ の関係は

$$\bar{q} = df(\alpha) / d\alpha \quad (7)$$

で与えられる。(6) と (7) から、

$$\alpha = -d\tau(\bar{q}) / d\bar{q} \quad (8)$$

³ 質量指数 $\tau(\bar{q})$ は、体積 ℓ_n^d における全散逸 $\epsilon_n \ell_n^d$ や体積 ℓ_0^d の領域にある体積 ℓ_n^d の箱の数 δ_n^{-d} を用いて

$$\delta_n^{-d} \langle (\epsilon_n \ell_n^d)^{\bar{q}} \rangle = (\epsilon \ell_0^d)^{\bar{q}} \delta_n^{-\tau(\bar{q}) + (\bar{q}-1)(d-1)} \quad (3)$$

で定義される。この定義は一般の d に対する参考文献 [16,23] におけるものと少し異なっている。

が得られる。(6), (7), (8) は、質量指数 $\tau(\bar{q})$ とマルチフラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ 間の「Legendre 変換」を構成している。以上より

$$P(\alpha) \propto \delta_n^{1-f(\alpha)} \quad (9)$$

が得られる。

2.3 クラスタとしての渦

渦を、それと同じ大きさのクラスタとみなそう。サイズの同じクラスタは、それを構成する粒子数密度に応じて、 α で特徴付けられるグループに分類される [16]。パラメータ α は、スケール変換 (2.1) で導入された指数である。カスケードの現れる領域では、そのスケール変換に対して系の基礎方程式は不変である。クラスタを構成する全粒子数 B_n は、

$$B_n = \delta_n^{-1} \int d\alpha P(\alpha) B_n(\alpha) \quad (10)$$

で与えられる。係数 δ_n^{-1} はサイズ ℓ_0 の領域におけるサイズ ℓ_n のセルの数である。 $B_n(\alpha) = \delta_n^\alpha B_n$ は α クラスタに含まれる粒子数であり、 $P(\alpha)$ はここでの議論にふさわしい確率分布関数を表す。(10) は (4) と同等である。

$B_n(\alpha) = (\ell_n/\ell_n(\alpha))^\alpha$ により α クラスタ中の粒子間平均距離 $\ell_n(\alpha)$ を導入すると、

$$1/B_n = (\ell_n(\alpha)/\ell_0)^\alpha \quad (11)$$

が得られる。これは $\ell_n(\alpha)^\alpha$ の大きさの箱にそれぞれ1個の粒子が含まれていることを示している。さらに、 $f(\alpha) = 0$ の解 $\alpha_\pm$ ($\alpha_- < \alpha_+$) を用いると、平均距離の最大値 $\ell_n(\alpha_-)$ と最小値 $\ell_n(\alpha_+)$ との関係

$$\ell_n(\alpha_+)/\ell_n(\alpha_-) = B_n^{1/\alpha_- - 1/\alpha_+} \quad (12)$$

が得られる。

他方、 α は B_n に依らないと仮定すると、(11) の B_n に関する微分から

$$\frac{d}{dB_n} \left(\frac{\ell_0}{\ell_n(\alpha)} \right) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\ell_0}{\ell_n(\alpha)} \right)^{1-\alpha} \quad (13)$$

が得られる。全粒子数 B_n の増分をその連続極限をとって時間の増分とみなすと、(13) は平均距離 $\ell_n(\alpha)$ の時間発展を記述する式とみなせる。これは系の背景をなすダイナミクスを反映した式のはずであるから、「2点に関する $\ell_0/\ell_n(\alpha)$ の時間依存性は、 α で色分けされたいかなるクラスタにおいても共通である」と仮定するのが妥当であろう。この仮定の下に、 $\ell_0/\ell_n(\alpha) = \ell_0/\ell(B_n)$ 、 $\alpha = 1-q$ とおくと時間発展方程式 (13) は $\frac{d}{dB_n} \left(\frac{\ell_0}{\ell(B_n)} \right) = \frac{1}{1-q} \left(\frac{\ell_0}{\ell(B_n)} \right)^q$ となる。この式の解は、 $\Delta B = B_- - B_+ \gg 1$ に対して

$$\frac{\ell(B_+)}{\ell(B_-)} = \left[1 + \left(\frac{\ell(B_+)}{\ell_0} \right)^{1-q} \Delta B \right]^{1/(1-q)} \sim \frac{\ell(B_+)}{\ell_0} \Delta B^{1/(1-q)} \quad (14)$$

を与える。

ある時刻 B_n における距離の比 (12) を、異なる時刻 $B_\pm$ 間の距離の比 (14) と同一視すると、スケーリング関係

$$1/(1-q) = 1/\alpha_- - 1/\alpha_+ \quad (15)$$

が得られる。ただし、 $\ell(B_+) \sim \ell_0$ を考慮に入れた。ここで、 $f(\alpha_\pm) = 0$ であることを改めて述べておく。このスケーリング関係は混合性の現れである。(15) が文献 [21,22] で導入されているスケーリング関係の一般化であることに注意されたい。今の場合、マルチフラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ は負となる場合も含んでいる [30]。

粒子数密度が同一のクラスターは、それに特有なフラクタル次元 $f(\alpha)$ で空間を占めている。 α で色分けされているすべてのクラスター（あるいは渦）の集まりを対象とするので、系はマルチフラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ で記述されるマルチフラクタル構造を呈すると考えられる。

3 一般化されたエントロピーに基づいたセルフ・コンシステントな解析

カスケードの各ステップは互いに独立であると仮定して、 n 番目のカスケードにおける局所散逸の確率密度関数 $P_T^{(n)}(\alpha) \propto [P_T^{(1)}(\alpha)]^n$ を導出する。 $P_T^{(1)}(\alpha)$ を決定するために、一般化されたエントロピーの極大をとる。その際、確率の保存: $\int d\alpha P(\alpha) = 1$ と q 分散 σ_q^2 を一定とする条件: $\sigma_q^2 = \langle (\alpha - \alpha_0)^2 \rangle_q = \left(\int d\alpha P(\alpha)^q (\alpha - \alpha_0)^2 \right) / \int d\alpha P(\alpha)^q$ の2つの制限を課す。Renyi エントロピー [17] あるいは Havrda-Charvat-Tsallis (HCT) エントロピー [18,19] を採用すると乱流の局所散逸を表わす確率密度関数

$$P_T^{(n)}(\alpha) d\alpha = \left(Z_T^{(n)} \right)^{-1} \left[1 - (1-q) \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2X/\ln 2} \right]^{n/(1-q)} d\alpha \quad (16)$$

が得られる。分配関数 $Z_T^{(n)}$ は $Z_T^{(n)} = \sqrt{2X/[(1-q)\ln 2]} B(1/2, 1+n/(1-q))$ で与えられる。ただし、 $B(a, b)$ は Beta 関数である。なお、 $q \rightarrow 1$ では一般化されたエントロピー（Renyi エントロピーや HCT エントロピー）は Boltzmann-Gibbs エントロピーになるので、一般化されたエントロピーから導かれる確率密度関数 (16) は同じ極限で Boltzmann-Gibbs 分布関数となる。

確率密度関数 (9) に対応するマルチフラクタル・スペクトルは

$$f_T(\alpha) = D_0 + (1-q)^{-1} \log_2 \left[1 - (1-q) \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2X/\ln 2} \right] \quad (17)$$

で与えられる。マルチフラクタル・スペクトルは、カスケードのステップ数 n によらないことに注意されたい。これは各ステップは独立であると仮定したことの現れである。 α_0 , X , RHCT 指数 q の値は、間欠性指数 μ より決定される。ところで、 $\bar{q}$ と α の関係は (7) により与えられる。それを解き、 $q \rightarrow 1$ の極限で有限な解を選ぶと

$$\alpha_{\bar{q}} - \alpha_0 = \left(1 - \sqrt{C_{\bar{q}}} \right) / [\bar{q}(1-q)\ln 2] \quad (18)$$

を得る。ただし、 $C_{\bar{q}} = 1 + 2\bar{q}^2(1-q)X\ln 2$ である。さらに、 $\alpha_{\max} - \alpha_0 = \alpha_0 - \alpha_{\min} = \sqrt{2X/[(1-q)\ln 2]}$ の関係より $\alpha_{\max} = \alpha(\bar{q} = -\infty)$ と $\alpha_{\min} = \alpha(\bar{q} = +\infty)$ が得られる。以上より $\sigma_q^2 = 2X/[(3-q)\ln 2]$ となることが分かる。

(6) に (17) と (18) を用いると、

$$\tau_T(\bar{q}) = 1 - \alpha_0 \bar{q} + \frac{2X\bar{q}^2}{1 + \sqrt{C_{\bar{q}}}} + \frac{1}{1-q} \left[1 - \log_2 \left(1 + \sqrt{C_{\bar{q}}} \right) \right] \quad (19)$$

が得られる。 $q \neq 1$ の場合は、大きい $|\bar{q}|$ に対して $\tau(\bar{q})$ に対数項が現れる。

α_0 , X , q の3つの値を決定するために、3つの独立の方程式 (4), (5), (15) を用いる。 $f_T(\alpha_{\pm}) = 0$ を満たす $\alpha_{\pm} = \alpha_0 \pm \sqrt{2bX}$ を (15) に代入して解くと、 $\sqrt{2X} = \left[\sqrt{\alpha_0^2 + (1-q)^2} - (1-q) \right] / \sqrt{b}$ あるいは $\alpha_0 = \sqrt{2bX + 2(1-q)\sqrt{2bX}}$ が得られる。ただし、 $b = (1 - 2^{-(1-q)}) / [(1-q)\ln 2]$ である。

間欠性指数 μ の値が与えられれば、上の3つの方程式により3つの値 α_0 , X , q が完全に決まる。

文献 [29] で観測された値 $\mu = 0.220 (\pm 1\%)$ を採用し、上記の3つの方程式をセルフ・コンシステントに解くと、 $q = 0.343$, $\alpha_0 = 1.127$, $X = 0.261$ となる。このとき $\alpha_+ - \alpha_0 = \alpha_0 - \alpha_- = 0.648$, $\alpha_{\max} - \alpha_0 = \alpha_0 - \alpha_{\min} = 1.071$,

$\bar{q}(\alpha_-) = -\bar{q}(\alpha_+) = 3.912$, $\sigma_q^2 = 0.283$ である。ここで採用した値 $\mu = 0.220$ [29] は, Taylor スケール Reynolds 数 $R_\lambda = 800$ (これは, $Re = 3 \times 10^5$ に対応する) の系において誤差 $\pm 1\%$ 以内で得られたものである。

他方, 以前の論文 [23–26] で採用した値 $\mu = 0.235$ [12] は, いくつかの Reynolds 数 ($R_\lambda = 70, 90, 209, 1500$ ($\pm 30\%$), それぞれ $Re = 12000, 18000, 93000, 8 \times 10^5$ に対応する) で得られた実験結果を重ね合わせたものである。また, 文献 [28] では値 $\mu = 0.26 \pm 0.03$ が報告されている。この値は $R_\lambda = 50, 110, 1500$ ($\pm 30\%$) (それぞれ $Re = 10000, 32000, 7 \times 10^6$ に対応している) での実験結果を重ね合わせて得られたものであるが, 先の $\mu = 0.235$ と誤差の範囲で矛盾していない。間欠性指数の値として $\mu = 0.235$ を採用すると, セルフ・コンシステントな値として, $q = 0.380$, $\alpha_0 = 1.136$, $X = 0.279$ を得る。その結果, $\alpha_+ - \alpha_0 = \alpha_0 - \alpha_- = 0.674$, $\alpha_{\max} - \alpha_0 = \alpha_0 - \alpha_{\min} = 1.139$, $\bar{q}(\alpha_-) = -\bar{q}(\alpha_+) = 3.709$, $\sigma_q^2 = 0.307$ となる。

m Power	ζ_m		
	Present Theory	Experiment [29]	Experiment [27]
1	0.36	0.37	-
2	0.69	0.70	0.71
3	1.00	1.00	1.00
4	1.28	1.28	1.33
5	1.54	1.54	1.65
6	1.78	1.78	1.80
7	2.00	2.00	2.12
8	2.21	2.23	2.22
9	2.40	-	2.52
10	2.58	-	2.59
11	2.76	-	-
12	2.92	-	2.84
13	3.07	-	-
14	3.22	-	3.28
15	3.36	-	-
16	3.49	-	3.49
17	3.62	-	-
18	3.74	-	3.71

Table 1: 本論文の理論により (21) で与えられるスケーリング指数 ζ_m と文献 [29] ($R_\lambda = 800, Re = 3 \times 10^5$) と文献 [27] ($R_\lambda = 852$) に示される実験結果との比較

4 スケーリング指数

m 次の速度構造関数

$$\langle (\delta u(\ell_n))^m \rangle = \langle (\delta u_n)^m \rangle \propto \delta_n^{\zeta_m} \quad (20)$$

のスケーリング指数 ζ_m は, (2) で導入した質量指数を用いて $\zeta_m = 1 - \tau_T(m/3)$ と表わせる。質量指数として (19) を採用すると, スケーリング指数の解析的表式

$$\zeta_m = \frac{\alpha_0 m}{3} - \frac{2Xm^2}{9(1 + \sqrt{C_{m/3}})} - \frac{1}{1-q} \left[1 - \log_2 \left(1 + \sqrt{C_{m/3}} \right) \right] \quad (21)$$

が得られる。ただし、 $C_{m/3}$ は $C_{\bar{q}} = 1 + 2\bar{q}^2(1-q)X \ln 2$ で定義されている。 $q \neq 1$ では、 $m \gg 1$ の極限でスケーリング指数 (21) に対数項が存在する:

$$\zeta_m = \frac{\alpha_{\min}}{3}m + \frac{1}{1-q} \left[\log_2 \left(\frac{\sqrt{X(1-q)\ln 2}}{3}m \right) + O\left(\frac{1}{m}\right) \right]. \quad (22)$$

この対数依存性は本論文の解析ではじめて明らかにされたことで、その実験的検証が強く望まれる。

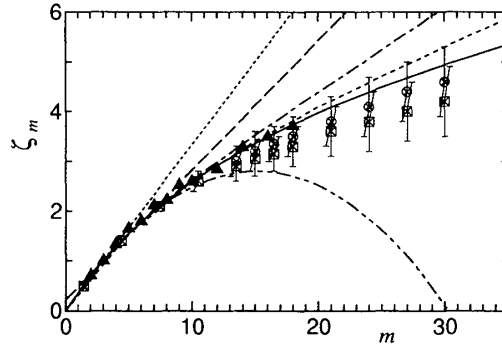


Fig. 1: 速度構造関数のスケーリング指数 ζ_m 。実線は $\mu = 0.220$ を採用した場合の本論文の結果。黒塗り三角 ($R_\lambda = 852$) [27], 四角形 ($R_\lambda = 50$, $Re = 10000$) [28], 丸 ($R_\lambda = 110$, $Re = 32000$) [28] は実験結果。点線は K41, 破線は β モデル ($\mu = 0.220$), 一点鎖線は p モデル ($\mu = 0.220$), 短い破線は対数 Poisson モデル, 二点鎖線は対数正規モデル ($\mu = 0.220$) の結果。

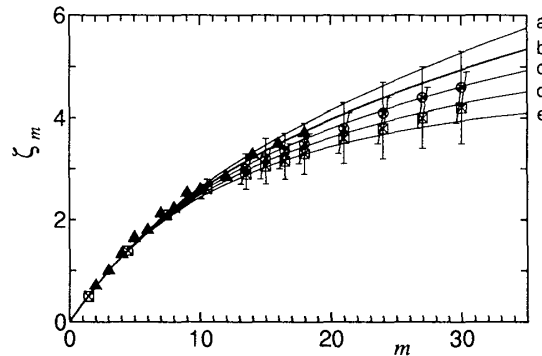


Fig. 2: 異なる μ の値 (a: 0.205, b: 0.220, c: 0.235, d: 0.250, e: 0.265) に対するスケーリング指数 ζ_m 。対応する q の値は, それぞれ a: 0.303, b: 0.343, c: 0.380, d: 0.413, e: 0.443。実験結果は Fig. 1 と同じ。

$\mu = 0.220$ を採用した場合のスケーリング指数 ζ_m , (21), を Fig. 1 の実線で示す。実験結果 [27,28] と他の理論による結果 (K41 [1], 対数正規モデル [5-7], β モデル [8], p モデル [11,12], 対数 Poisson [14,15]) も載せてある。実線が Re の値の大きい実験結果とよく一致していることが分かる。 $R_\lambda = 800$ ($Re = 3 \times 10^5$) に対する Benzi 等 [29] による実験結果 (ただし, この結果は Fig. 1 には載せていない) と本論文の結果 (21) とを Table 3 で比較する。また, この表には Anselmet 等 [27] の $R_\lambda = 852$ に対する実験結果も載せている。これは, Fig. 1 では黒塗り三角で示されている。 $\zeta_3 = 1$ はエネルギー保存を表す $\tau(1) = 0$ の条件によるものである。また, ζ_6 の値は, 間欠性指数との関係 $\zeta_6 = 2 - \mu$ から決まる。セルフ・コンシステントな方程式を解く際に, 間欠性指数として Benzi 等 [29] によって測定された値を採用したので, $\zeta_6 = 1.78$ となるのは当然である。 $\mu = 0.220$ は信頼性の

高い値であるが, Benzi 等 [29] は $m \leq 8$ の低次についてしか測定をしていない。(21) により計算されたスケーリング指数が, Anselmet 等 [27] による $m = 18$ までの実験結果すべてとほぼ一致していることは, 注目すべきことである。なお, Anselmet 等 [27] によって求められた値 $\zeta_6 = 1.80$ からは, 間欠性指数の値 $\mu = 0.20$ が得られる。他方, $\mu = 0.220$ を採用した本論文の結果は Meneveau と Sreenivasan [28] による実験結果とは一致していない。この不一致は, おそらく彼等の行った実験の Reynolds 数が低かった ($R_\lambda = 50$ と 110) ことに起因するのであろう。たとえば $R_\lambda \sim 800$ のように Reynolds 数が高い系で, 高次数 $m \geq 20$ に対して実験がなされたならば, その結果は Fig. 1 の実線とほぼ一致するものと予想される。その場合, $\text{Re} \gg 1$ の発達乱流系における間欠性指数の普遍値は, $\mu = 0.220$ であると結論付けることができる。この予想の正否を確認するために, 高 Reynolds 数の系で高次数 $m \geq 20$ に対する精度の高い測定の実施が望まれる。

Fig. 2 から分かるように, 本論文で得られたセルフ・コンシステントな表式は, Reynolds 数が低い系の場合にもスケーリング指数の測定値をよく説明していることは特筆に値する。実際, $\mu = 0.235$ に対する曲線 c が丸で示した実験結果 ($R_\lambda = 110$) [28] とよく一致し, $\mu = 0.250$ あるいは少し大きい μ に対する曲線 d が四角で示した実験結果 ($R_\lambda = 50$) [28] と高次 ($m \geq 20$) においてもよく一致している。Meneveau と Sreenivasan [28] によって得られた μ の値は $\mu = 0.26 (\pm 0.03)$ である。本論文で導出された実線を得るに当たって, 間欠性指数の実測値のみを投入したのであって, パラメータの人為的な操作は一切行っていないことを改めて強調しておく。

5 速度差確率密度関数

$\Pi_{\text{vel}}(\delta u_n) d\delta u_n = P(\alpha) d\alpha$ で定義される速度差の確率密度関数 $\Pi_{\text{vel}}(\delta u_n)$ は,

$$\Pi_{\text{vel}}(\delta u_n) = \frac{3}{\delta u_0 Z_T^{(n_K)} |\ln(\ell_n/\ell_0)|} G_{\text{vel}}(\delta u_n/\delta u_0) \quad (23)$$

$$G_{\text{vel}}(x) = \frac{1}{x} \left[1 - \left(\frac{\alpha_{\text{vel}}(x) - \alpha_0}{\alpha_{\text{max}} - \alpha_0} \right)^2 \right]^{n/(1-q)} \quad (24)$$

で与えられる。ただし, $\alpha_{\text{vel}}(x) = 3 \ln x / \ln \delta_n$ である。このとき $\alpha = \alpha_{\text{vel}}(\delta u_n/\delta u_0)$ は関係式 (2.1) に他ならない。

間欠性指数 μ を与えると q , α_0 , α_{max} の値は決まるが, 確率密度関数 $\Pi_{\text{vel}}(\delta u_n)$ は, なお ℓ_n/ℓ_0 , Re と δu_0 に依存している。実験において ℓ_n が, ℓ_0 ではなく Kolmogorov スケール ℓ_K で規格化される場合, $\ell_n/\ell_0 = \text{Re}^{-3/4} \ell_n/\ell_K$ の関係が必要となる。 δu_0 に揺らぎがある場合には, 揺らぎの適切な分布関数を導入して, 理論計算結果 $\Pi_{\text{vel}}(\delta u_n)$ の δu_0 に関する平均を取ってから, 実験結果と比較するべきである。

6 考察

本論文では, 「慣性領域におけるエネルギー・カスケードの各ステップは, 互いに独立である」と仮定して, Renyi エントロピーあるいは HCT エントロピーに基づいた確率密度関数 $P_T^{(n)}(\alpha)$ を求めた。さらに, $P_T^{(n)}(\alpha)$ に現れるパラメータ (RHCT 指標 q を含む) をセルフ・コンシステントに決定した。RHCT 指数の値は $q = 0.343$ となり, それが $q = 1$ (Boltzmann-Gibbs 分布の場合) と異なることから, 発達乱流系は **Gibbs** 系でないことが明らかになった。発達乱流系に対して q が唯一固有の値をとることは注目すべきことである。それは, この系がある種の「ユニバーサリティ・クラス」に属することの現れであると考えられる。すなわち, Renyi エントロピーあるいは HCT エントロピーで記述される系が, その系のトポロジカルな性質を反映した固有の RHCT 指標値を持つのである。

さらに、速度構造関数のスケーリング指数 ζ_m の解析的表式を得た。それは実験結果と良く一致した。 $m \gg 1$ の極限で、 ζ_m に特徴的なふるまい、すなわち対数項が現れることは、本論文での解析のひとつの特徴である。この存在が実験的に立証されれば、本研究の手法の妥当性が確認できたと言える。

$q \rightarrow 1$ の極限で、 $\tau_T(\bar{q})$ は $\tau_T(\bar{q})|_{q \rightarrow 1} = 1 - \alpha_0 \bar{q} + X \bar{q}^2/2$ となる。その場合、条件 (4), (5), (15) は、それぞれ

$$X = 2(\alpha_0 - 1), \quad \mu = X, \quad 2X = \alpha_0^2 \quad (25)$$

となる。最初と最後の式を解くと、 $\alpha_0 = 2$ と $X = 2$ が得られる。2 番目の式より、 $\mu = 2$ が得られる。質量指数の表式は $\tau_T(\bar{q})|_{q \rightarrow 1} = (1 - \bar{q})^2$ となる。これよりマルチフラクタル・スペクトルが $f_T(\alpha)|_{q \rightarrow 1} = -\alpha(\alpha - 4)/4$ で与えられることが分かる。

有限の n に対して、 $q \rightarrow 1$ の極限で、 $P_T^{(n)}(\alpha)$ は Gauss 分布関数となることが分かる。その際、 q 分散 ($q = 1$) は $\sigma_{q=1}^2 = 1/(2\beta) = \mu/\ln 2$ となり、マルチフラクタル・スペクトルを再現する。最後の式のはじめの等号は、等分配則を表わしている。 $q \rightarrow 1$ では、 $\bar{\beta} = \beta = (\ln 2)/4 = 0.173$ となる。

$q \rightarrow 1$ の場合は Gauss 分布を与える訳であるが、対数正規モデル [12] とは異なる。これは、(25) の 3 つの式により対数正規モデルとは違った μ の値が得られることから明らかである。この μ の値から判断して、発達乱流系においては、 $q = 1$ の場合が自然界で実現することは無いと結論付けられよう。なお、 $q \neq 1$ であっても、 $n \rightarrow \infty$ の極限では Gauss 分布となる。これは中央極限定理によるものと考えられる。

定義 (3) (あるいは (2)) を用いると、慣性領域に属するいかなる $n (= 0, 1, 2, \dots)$ 、すなわち、 $\ell_n \leq \ell_0$ を満たす ℓ_n に対して) に対しても成立する質量指数の表式を、Legendre 変換 (6) を介することなく求めることができる：

$$\tau_T(\bar{q}) = 1 - \alpha_{\min} \bar{q} + n^{-1} \log_2 F(\gamma, 2\gamma, z). \quad (26)$$

ただし、 $\gamma = 1 + n/(1 - q)$ 、 $z = (2\bar{q} \ln \delta_n)/(\alpha_{\max} - \alpha_0)$ とおいた。 $F(a, b, z)$ は合流型超幾何関数 (Kummer 関数) である。この質量指数の表式はエネルギー流入領域や Reynolds 数の小さな系など、Legendre 変換 (6) が使えない場合にも適用できる。

(16) の $P_T^{(n)}(\alpha)$ に基づいて、速度差の確率密度関数 $\Pi_{\text{vel}}(\delta u_n)$ (23) が導出された。これは δu_n というよりむしろ $\ln \delta u_n$ の依存性を持っており、Tsallis エントロピーに基づいた、発達乱流に対する他の解析 [31–33] と大きく異なる。この対数依存性は、本理論のもうひとつの大きな特徴である。文献 [31–33] の解析においては、速度差 δu_n の確率密度関数として、HCT 型の関数形がはじめから仮定されている。そこでは、RHCT 指数は 1 より大きく、またその値が ℓ_n に依存しているので、その指数は有効的指数と考えるべきであろう。確率密度関数に対する本論文の結果 (23) と実験結果を比較することは、本論文の解析の正否の確認ともなる、今後の興味深い問題である。予備的な比較では、よく一致することが認められている。これについては別途報告する。

本論文の解析では、Renyi あるいは HCT 型の確率密度関数の構造 (16) が本質的である。パラメータの定義が違う点を除けば、いずれの確率密度関数もその構造はまったく同じである。RHCT 指数の値は $q = 0.343$ となり、1 ではない。発達乱流の基盤を成す統計を Renyi と仮定した場合には、この q の値より、非 Gibbs 的であることが結論される。ただし、この場合は、系は常に加法的である。一方、その統計を HCT と仮定した場合には、系は非加法的 (その意味での非 Gibbs 的) であると結論される。熱力学的考察を発展させれば、Renyi エントロピーと HCT エントロピーのいずれが発達乱流系のエントロピーであるかを判定できるものと予想される。本論文では、渦をクラスター概念で解釈している。発達乱流系における間欠性が如何なるアンサンブルに基づくものであるかを探る際に、このクラスター概念は多くの手がかりを与えるであろう。分布関数 $P_T^{(n)}(\alpha)$ に対応した不変測度を与えるマップ関数が見つければ、一般化された統計力学の背景をなすダイナミクスを理解する上での試金石となるであろう。これらは、魅力的な今後の問題である。

謝辞

Constantino Tsallis 教授, 中野徹教授, 吉沢徹教授, 後藤俊幸教授, 木田重雄教授の有意義なコメントに感謝する。また, 梅垣壽春教授, 大矢雅則教授, が Renyi エントロピーに注意を向けるきっかけを与えてくださったことに感謝する。Petro Jizba 博士が Havrda-Charvat エントロピーの存在に気づかせてくださったことに感謝する。著者の一人 (T.A.) は, 筑波大学学内プロジェクトの経済的支援, ならびに日本学術振興会とブラジル科学アカデミー間の研究者交換プログラム (No. 2-162) によりブラジル国マセイオ市で開催された IUPAP 国際会議, FACS 2000, に参加できたことに感謝する。

参考文献

- 1) A. N. Kolmogorov, C. R. Acad. Sci. USSR **30**, 301; 538 (1941).
- 2) W. Heisenberg, Z. Phys. **124**, 628 (1948).
- 3) R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **5**, 497 (1959).
- 4) T. Nakano and F. Tanaka, Prog. Theor. Phys. **65**, 120 (1981) and the references therein.
- 5) A. M. Oboukhov, J. Fluid Mech. **13**, 77 (1962).
- 6) A. N. Kolmogorov, J. Fluid Mech. **13**, 82 (1962).
- 7) A. M. Yaglom, Sov. Phys. Dokl. **11**, 26 (1966).
- 8) U. Frisch, P-L. Sulem and M. Nelkin, J. Fluid Mech. **87**, 719 (1978).
- 9) G. Parisi and U. Frisch, in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics*, eds. M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi (North-Holland, Amsterdam, 1985) 84.
- 10) R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi and A. Vulpiani, J. Phys. A: Math. Gen. **17**, 3521 (1984).
- 11) C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. **59**, 1424 (1987).
- 12) C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **2**, 49 (1987).
- 13) I. Hosokawa, Phys. Rev. Lett. **66**, 1054 (1991).
- 14) Z-S. She and E. Leveque, Phys. Rev. Lett. **72**, 336 (1994).
- 15) Z-S. She and E. Waymire, Phys. Rev. Lett. **74**, 262 (1995).
- 16) T. Arimitsu and N. Arimitsu, Phys. Rev. E **61**, 3237 (2000).
- 17) A. Renyi, *Proc. 4th Berkley Symp. Maths. Stat. Prob.* **1**, 547 (1961).
- 18) J. H. Havrda and F. Charvat, Kybernetika **3**, 30 (1967).
- 19) C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
- 20) C. Tsallis, Braz. J. Phys. **29**, 1 (1999) and the references therein.
- 21) M. L. Lyra and C. Tsallis, Phys. Rev. Lett. **80**, 53 (1998).
- 22) U.M.S. Costa, M.L. Lyra, A.R. Plastino and C. Tsallis, Phys. Rev. E **56**, 245 (1997).
- 23) T. Arimitsu and N. Arimitsu, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, L235 (2000) [Corrigendum:**34**, 673 (2001)].
- 24) T. Arimitsu and N. Arimitsu, *Chaos, Solitons and Fractals* (2001) in press.
- 25) T. Arimitsu and N. Arimitsu, Prog. Theor. Phys. **105**, (2001) in press.
- 26) T. Arimitsu and N. Arimitsu, *Analysis of Fully Developed Turbulence by a Generalized Statistics* (2001) submitted.
- 27) F. Anselmetti, Y. Cagne, E. J. Hopfinger and R. A. Antonia, J. Fluid Mech. **140**, 63 (1984).
- 28) C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, J. Fluid Mech. **224**, 429 (1991).
- 29) R. Benzi, S. Ciliberto, C. Baudet and C. R. Chavarria, Physica D **80**, 385 (1995).
- 30) A.B. Chhabra and K.R. Sreenivasan, Phys. Rev. A **43**, 1114 (1991). Phys. Rev. Lett. **67**, 2299 (1991).
- 31) C. Beck, Physica A **277**, 115 (2000).
- 32) C. Beck, G. S. Lewis and H. L. Swinney, preprint (2000).
- 33) F. M. Ramos, C. Rodrigues Neto and R. R. Rosa, preprint (2000).