

ϵ -KKT 条件と具体例

富山大学経済学部 (Faculty of Economics, Toyama University)

横山一憲 (Kazunori Yokoyama)¹

白石俊輔 (Shunsuke Shiraishi)²

Abstract

不等式制約付の凸計画問題に対して ϵ -近似解を得るための Karush-Kuhn-Tucker (以下単に KKT という) タイプの条件を示す. よく知られているように (正確な) 解を得るための KKT タイプ条件は Slater の制約想定の下で示される. 本報告では, Slater の制約想定を仮定せず, 新たな条件を仮定して, KKT タイプの条件を示す.

1 準備

次の凸計画問題を考える.

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \text{minimize } f(x) \\ & \text{subject to } g_i(x) \leq 0 \ (i = 1, \dots, m) \\ & \text{where } f, g_i \ (i = 1, \dots, m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{convex.} \end{aligned}$$

次の条件が仮定されている.

Assumption. 許容集合 $K = \{x \mid g_i(x) \leq 0 \ (i = 1, \dots, m)\} \neq \emptyset$. 目的関数 $f : K$ 上で下に有界.

凸計画問題 (P) に対して ϵ -近似解を定義する.

Definition 1. $\bar{x} \in K$ が (P) に対して ϵ -近似解であるとは $f(x) + \epsilon > f(\bar{x})$ for any $x \in K$ を満たすことである.

recession cone および ϵ -subdifferential を定義する.

Definition 2. [6] $C \subset \mathbb{R}^n$ を convex set とする. recession cone 0^+C of C であるとは $0^+C = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in C, \forall \alpha \geq 0, x + \alpha d \in C\}$ を満たすことである.

¹e-mail: kazu@eco.toyama-u.ac.jp

²e-mail: shira@eco.toyama-u.ac.jp, Research supported partially by the Toyama Daiichi Bank Scholarship Foundation.

Definition 3. [3] $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を convex function とする. $\partial_\varepsilon h(x)$ が h の x における ε -subdifferential であるとは $\partial_\varepsilon h(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid h(x') \geq h(x) + \langle y, x' - x \rangle - \varepsilon \text{ for any } x' \in \mathbb{R}^n\}$ を満たすことである.

Strodoit et al (1983) によって示された ε -近似解を得るための KKT タイプの条件をあらわす. Slater の制約想定はつぎのようである.

Assumption (CQ) (Slater の制約想定). $g_i(y) < 0$ for any $i = 1, \dots, m$ となるような $y \in \mathbb{R}^n$ が存在する.

Theorem 0. [7] $\varepsilon \geq 0$, (CQ) が仮定される. このとき, $\bar{x} \in K$ が (P) に対する ε -近似解であるための必要十分条件は

$(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m) \neq \theta$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), and $\bar{\varepsilon}_i \geq 0$ ($i = 0, \dots, m$) が存在し以下を満たすことである

$$\theta \in \partial_{\bar{\varepsilon}_0} f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \partial_{\bar{\varepsilon}_i} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}), \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^m \bar{\varepsilon}_i - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \leq 0. \quad (2)$$

(ε)-KKT 条件における (CQ), duality gap と ε の符号による設定は以下のようによまとめられる.

	ε	(CQ)	duality gap
Rockafellar (1970)	$= 0$	yes	no
Strodoit et al. (1983)	≥ 0	yes	no
Yokoyama (1992)	≥ 0	no	yes
設定 (a)	> 0	no	no

設定 (a) で Strodoit et al (1983) と同一な KKT タイプの条件 (1)(2) を示すことはできない.

Example 0. (P) minimize $f(x_1, x_2) = e^{-x_1} - x_2$
subject to $g_1(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0$,
 $g_2(x_1, x_2) = x_2^2 \leq 0$.

を考える. 明らかに, f, g_1, g_2 は凸であり, $K = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$ であるから Slater の制約想定は成立しない. また (P) に対する (正確な) 解も存在しない.

$\varepsilon = 1$ とすると $\bar{x} = (0, 0) \in K$ は (P) に対する ε -近似解となる.

$0 \leq \eta \leq 1$ とすると

$$\partial_\eta f(0, 0) = \{(\xi_1, -1) \mid \xi_1 \leq 0 \text{ (} 0 \leq \eta \leq 1 \text{)} \xi_1 < 0 \text{ (} 0 \leq \eta < 1 \text{)}\} \quad (3)$$

が成立する. また $\eta \geq 0, \lambda > 0$ とすると

$$\begin{aligned}\partial_{\eta} g_1(0, 0) &= \{(-1, 0)\} \\ \partial_{\eta}(\lambda g_1)(0, 0) &= \{(-\lambda, 0)\} \\ \partial_{\eta} g_2(0, 0) &= \{(0, \xi) \mid -2\sqrt{\eta} \leq \xi \leq 2\sqrt{\eta}\} \\ \partial_{\eta}(\lambda g_2)(0, 0) &= \{(0, \xi) \mid -2\sqrt{\eta\lambda} \leq \xi \leq 2\sqrt{\eta\lambda}\} \\ \partial_0 g_2(0, 0) &= (0, 0)\end{aligned}$$

が成立する. ここで (1)(2) が成立したとすると, (1) より次式が成り立つ

$$(0, 0) = (\xi_1, -1) + (-\lambda, 0) + (0, \xi_2) \quad (4)$$

1. $\varepsilon_2 > 0$ の場合

(2) より $\varepsilon_0 \leq \varepsilon - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) < \varepsilon = 1$ となるので, (3) より $\xi_1 < 0$ となり,
(4) の第 x_1 成分は $0 = \xi_1 - \lambda < 0$ となって矛盾.

2. $\varepsilon_2 = 0$ の場合

(4) の第 x_2 成分は $0 = -1$ となって矛盾.

新たに以下の条件を仮定する.

Assumption 1. もし十分小さな $\eta > 0$ に対して $x \in K(\eta) \cap K_i^c$ のとき
次のような $x' \in K$ が存在する

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

但し $K_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0\}$, $K_i^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) > 0\}$ ($i = 1, \dots, m$), $K(\eta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq \eta, i = 1, \dots, m\}$.

Assumption 2. 2-1 A_ε : closed,
2-2 $0^+ A_\varepsilon \cap 0^+ B = \{\theta\}$

$$\begin{aligned}\text{但し } A_\varepsilon &= \{z \in \mathbb{R}^{m+1} \mid z_0 \geq f(x) + \varepsilon, z_i \geq g_i(x) (i = 1, \dots, m); x \in \mathbb{R}^n\}, \\ B &= \{z \in \mathbb{R}^{m+1} \mid z_0 \leq f(\bar{x}), z_i \leq 0 (i = 1, \dots, m)\}.\end{aligned}$$

2 ε -KKT 条件と例

Theorem 1. $\varepsilon > 0$, Assumption 1 を仮定する. このとき $\bar{x} \in K$ が (P) に対する ε -近似解であるための十分条件は (1)(2) が成立することである, また

必要条件は $(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m) \neq \theta$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), and $\bar{\varepsilon}_i \geq 0$ ($i = 0, \dots, m$) が存在して以下を満たすことである

$$(1) \text{ and } \sum_{i=0}^m \bar{\varepsilon}_i - 2\varepsilon \leq \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \leq 0.$$

Theorem 2. $\varepsilon > 0$, Assumption 2 を仮定する. このとき $\bar{x} \in K$ が (P) に対する ε -近似解 であるための必要十分条件は (1)(2) が成立することである.

Example 1. (P) minimize $f(x_1, x_2) = 2^{-x_1-x_2}$

$$\text{subject to } g_1(x_1, x_2) = |x_1| - x_2 \leq 0,$$

$$g_2(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 \leq 0.$$

を考える. 明らかに, f, g_1, g_2 は凸であり, $K = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 = x_1, x \geq 0\}$ であるから Slater の制約想定は成立しない. また (P) に対する (正確な) 解も存在しない. $\varepsilon = 1/2$ とすると $\bar{x} = (1, 1) \in K$ は (P) に対する ε -近似解となる. Assumption 1 が成立するのが確かめられる.

$\partial_\eta g_1(1, 1) = \{([1 - \eta, 1], -1)\}$, $\partial_\eta g_2(1, 1) = \{(-1, 1)\}$ for each $\eta \geq 0$, $\partial_\varepsilon f(1, 1) = \{([-0.62, 0], [-0.62, 0])\}$ なので $\bar{\lambda}_0 = 1$, $\bar{\lambda}_1 = 1$, $\bar{\lambda}_2 = 1$, $\bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon$, $\bar{\varepsilon}_1 = 0$, $\bar{\varepsilon}_2 = 0$ が存在して次が成立する

$$\theta \in \partial_\varepsilon f(1, 1) + \partial_0(1g_1)(1, 1) + \partial_0(1g_2)(1, 1),$$

$$\bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 - 2\varepsilon = -\varepsilon \leq 0 = 1g_1(1, 1) + 1g_2(1, 1).$$

Example 2. (P) minimize $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)/8$

$$\text{subject to } g_1(x_1, x_2) = \max(0, |x_1| - x_2) \leq 0,$$

$$g_2(x_1, x_2) = \max(0, -x_1 + x_2) \leq 0.$$

を考える. 明らかに, f, g_1, g_2 は凸であり, $K = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 = x_1, x \geq 0\}$ であるから Slater の制約想定は成立しない. $\varepsilon = 1/2$ とすると $\bar{x} = (1, 1) \in K$ は (P) に対する ε -近似解となる. Assumption 2 が成立することが確かめられる. $\eta \geq 0$ なので

$$\partial_\eta g_1(1, 1) = \{([\alpha_1 - \eta, \alpha_1], -\alpha_1) \mid 0 \leq \alpha_1 \leq 1, \eta_1 = \eta\},$$

$$\partial_\eta g_2(1, 1) = \{(-\alpha_2, \alpha_2) \mid \alpha_2 \leq 1, \eta_2 = \eta\},$$

$$\partial_0 f(1, 1) = \{(2/8, 2/8)\},$$

となり, $\bar{\lambda}_1 = 1$, $\bar{\lambda}_2 = 1$, $\bar{\varepsilon}_0 = 0$, $\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon$, $\bar{\varepsilon}_2 = 0$, $\alpha_1 = 2/8$, $\alpha_2 = 0$ が存在して次が成立する

$$\begin{aligned} \theta &\in \partial_0 f(1, 1) + \partial_\varepsilon(1g_1)(1, 1) + \partial_0(1g_2)(1, 1) \\ &= \{(2/8, 2/8) + (\xi, -2/8) + (0, 0) \mid 2/8 - 1/2 \leq \xi \leq 2/8\}, \\ \bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 - \varepsilon &= 0 \leq 0 = 1g_1(1, 1) + 1g_2(1, 1). \end{aligned}$$

References

- [1] AUSLENDER, A and CROUZEIX, J. -P., *Global Regularity Theorems*, Mathematics of Operations Research, Vol. 13, No. 2, 243–253, 1988
- [2] EKELAND, I., *Nonconvex Minimization Problems*, Bulletin of the American Mathematical Society (N.S.), Vol. 1, No. 3, pp. 443–474, 1979.
- [3] HIRIART-URRUTY, J. -B., and LEMARÉCHAL, C., *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Springer, 1993.
- [4] JEYAKUMAR, V., LEE, G. M. , and DINH, N., *New Sequential Lagrange Multiplier Conditions Characterizing Optimality without Constraint Qualification for Convex Programs*, SIAM Journal on Optimization, Vol. 14, no. 2, pp. 534–547, 2003.
- [5] LORIDAN, P., *Necessary Conditions for ε -Optimality*, Mathematical Programming Study, Vol. 19, pp. 140–152, 1982.
- [6] ROCKAFELLAR, R. T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [7] STRODIOT, J. J., NGUYEN, V. H., and HEUKEMES, N., *ε -Optimal Solutions in Nondifferentiable Convex Programming and Some Related Questions*, Mathematical Programming, Vol. 25, pp. 307–328, 1983.
- [8] YOKOYAMA, K., *ε -Optimality Criteria for Convex Programming Problems via Exact Penalty Functions*, Mathematical Programming, Vol. 56, pp. 233–243, 1992.