

Eisenstein series and E-polynomials

山形大学・地域教育文化学部 三枝崎 剛

Tsuyoshi Miezaki

Faculty of Education, Art and Science

Yamagata University

1 はじめに

有限群 G_8 と無限群 $SL_2(\mathbb{Z})$ を考える. G_8 は [9] のリストの 8 番目の群を表す. これらの群は, 下の表に与えられた空間へ自然に作用する. 作用が与えられると, それで “不変” な元を考えることは, 自然な問題で, それぞれ不変式とモジュラー形式と名付けられており, 数多くの研究を持つ.

	有限	$\leftrightarrow$	無限
群	$G_8 < GL(2, \mathbb{C})$	$\leftrightarrow$	$SL_2(\mathbb{Z})$
群の作用する空間	$\mathbb{C}[x_1, x_2]$	$\leftrightarrow$	$\mathbb{H}$ 上の正則関数

これら不変元の構成法の一つとして, 組合せ論対象である, 符号と格子を用いるものがある. Type II 符号 $C(< \mathbb{F}_2^n)$ が与えられたとしよう. ここで, Type II とは $C = C^\perp$ かつ全ての元の重さが 4 の倍数となる符号. ここで, 重さ $\text{wt}(c)$ とは c の座標で 1 のものの個数. 更に C_m を C の元で重さ m の集合とおくと

$$w_C(x, y) := \sum_{c \in C} x^{n-\text{wt}(c)} y^{\text{wt}(c)} = \sum_{m \geq 0} |C_m| x^{n-m} y^m$$

と斉次多項式が定義される. これが G_8 の不変式となる.

一方で, Type II 格子 L が与えられたとしよう. ここで, Type II とは $L = L^\#$ かつ全ての元のノルムが偶数となる格子. 更に L_m を L のノルム m の元の集合とおくと

$$\theta_L(\tau) := \sum_{x \in L} q^{(x,x)/2} = \sum_{m \geq 0} |L_m| q^m, \quad q^{2\pi i \tau}, \tau \in \mathbb{H}$$

のように, $\mathbb{H}$ 上の関数が定義される. これが $SL_2(\mathbb{Z})$ の “不変” 元, モジュラー形式である.

符号と格子は数多くの類似が存在し, それを通して, 不変式とモジュラー形式にも多くの類似が存在すると期待され, 実際いくつか発見されている. 講演では特別な不変式とモジュラー形式である, E-多項式と Eisenstein 級数の新たな類似性を報告した.

以下では, セクション 2 において, Eisenstein 級数と E-多項式の定義を述べ, 大浦学氏によって発見された, これらの概念に関するの類似を見る [7]. セクション 3 において, 講演の目的であった Eisenstein 級数と E-多項式の新たな類似を述べる [2].

2 Eisenstein 級数と E-多項式

2.1 Eisenstein 級数

Eisenstein 級数は以下で定義され、そのフーリエ展開は次のようになる：

$$\begin{aligned} E_k(z) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) = 1}} \frac{1}{(m\tau + n)^k} \\ &= 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n. \end{aligned}$$

ここで、 B_k は k 番目のベルヌーイ数、 $\sigma_{k-1}(n)$ は約数関数である。モジュラー形式の基本的な例である。

さて、Eisenstein 級数の著しい性質として次の体積公式がある。

事実 2.1 (Siegel). Let $k \equiv 0 \pmod{4}$.

$$E_k(\tau) = (\text{Const.}) \times \left(\sum_{\{\text{all } 2k\text{-dim. Type II lattices}\} / \sim} \frac{\theta_L(\tau)}{|\text{Aut}(L)|} \right).$$

例えば、 L を E_8 -格子とする。 L は rank 8 の Type II 格子として一意的であることを用いると、体積公式から

$$E_4(\tau) = \theta_L(\tau).$$

2.2 Eisenstein 多項式 (E-多項式)

群 $G_8 < GL(2, \mathbb{C})$ を考える。その定義や不変式環などを以下に纏めた：

- $G_8 = \left\langle T_1 = \frac{\zeta_8}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$.
- $|G_8| = 96$.
- $G_9 \curvearrowright \mathbb{C}[x, y]$.
- $\mathbb{C}[x, y]^{G_9} = \mathbb{C}[f_8, f_{12}]$, $f_8 = x^8 + 14x^4y^4 + y^8$, $f_{12} = x^{12} - 33x^8y^4 - 33x^4y^8 + y^{12}$.

大浦学氏は、[6] において Eisenstein 多項式 (E-多項式) という概念を導入した。

定義 2.1 ([6]). φ_n が Eisenstein 多項式 (E-多項式)^{def}

$$\varphi_n := \frac{1}{|G_8|} \sum_{\sigma \in G_8} \sigma \cdot x^n.$$

これが Eisenstein 多項式と名付けられた理由の一つは、事実 2.1 (体積公式) の類似である次の性質が成立する事による：

命題 2.1 ([5]). Assume $m \equiv 0 \pmod{8}$. Then

$$\varphi_m = (\text{Const.}) \left(\sum_{\substack{\{\text{all Type II codes} \\ \text{of length } m\} / \sim}} \frac{w_C(x, y)}{|\text{Aut}(C)|} \right).$$

これも体積公式と呼ぶことにしよう. 例えば, 長さ 8 に拡大ハミング符号 H_8 は Type II 符号として一意的なので,

$$\widetilde{\varphi}_8 = x^8 + 14x^4y^4 + y^8 = w_{H_8}(x, y).$$

ただし $\widetilde{\varphi}_m$ は, x^n の係数を 1 に正規化したものを表す.

2.3 Eisenstein 級数 $\leftrightarrow$ E-多項式

Eisenstein 級数と E-多項式の間には, 体積公式のような類似が数多く存在すると期待される. このセクションでは, 大浦学氏により発見されたものを紹介する [7]. そのために, theta map を以下の用に導入する:

- $M := \text{ring of modular forms for } SL(2, \mathbb{Z}).$
- $M = \mathbb{C}[E_4, E_6].$

事実 2.2 (Theta map).

$$\begin{array}{ccc} Th: \mathbb{C}[x, y]^{G_8} & \longrightarrow & M \\ \Psi & & \Psi \\ x & \longmapsto & \theta_{00}(2\tau) \\ y & \longmapsto & \theta_{10}(2\tau) \end{array}$$

Eisenstein 級数の零点に関して次が知られている:

事実 2.3. 1. E_k の零点は, 基本領域の円周上に存在 [8].

2. E_k の零点は E_{k+12} の零点とインターレースする [4].

これらに関する類似として, 大浦学氏は次の予想を提出した:

予想 2.1 ([7]). 1. φ_{24m} の零点は, 基本領域の円周上に存在.

2. $Th(\widetilde{\varphi_{24m}})$ の零点は $Th(\widetilde{\varphi_{24(m+1)}})$ の零点とインターレースする.

3 Eisenstein 級数と E-多項式の新たな類似

3.1 Zeros

講演では, E-多項式のゼータ多項式についても類似した性質を持つことを報告した. ここで, 斉次多項式のゼータ多項式とは次で定義される:

定義 3.1 ([1]). q を素数冪, $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ を斉次多項式とおく. このとき次を満たす多項式 $Z_f(T) \in \mathbb{C}[T]$ が唯一つ存在する:

$$\frac{Z_f(T)}{(1-T)(1-qT)}(y(1-T) + xT)^n = \dots \frac{f(x, y) - x^n}{q-1} T^{n-d} \dots$$

$Z_f(T)$ を $f(x, y)$ のゼータ多項式と呼ぶ.

定義 3.2 ([1]). $f(x, y)$ が Riemann hypothesis analogue (RHA) を満たす $\stackrel{\text{def}}{=} Z_f(T)$ の零点が $|z| = 1/\sqrt{q}$ 上に存在.

講演では, 事実 2.3 と予想 2.1 の類似である次の定理を紹介した:

定理 3.1 ([2]). 1. $Z_{Th(\varphi_m)}$ は RHA を満たす.

2. $Z_{Th(\varphi_m)}$ の零点は $Z_{Th(\varphi_{m+4})}$ の零点とインターレースする.

3.2 p -integral

Eisenstein 級数のフーリエ係数は, 次の性質を持つ: p を素数としたとき,

$$E_{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. (\because \text{Clausen-von Staudt.}) \quad (1)$$

大浦学氏は, この事実の類似である次の予想を提出した:

予想 3.1 ([7]). 1. $Th(\widehat{\varphi_m})$ のフーリエ係数の分母は p で割れない.

(1) の類似である次を証明することで, 予想 3.1 を証明することが出来る.

定理 3.2 ([2]). $\widehat{\varphi_{p+1}} \equiv x^{p+1} + y^{p+1} \pmod{p}$.

詳しくは, 論文 [2] を参照して頂きたい.

注意 3.1. • Hecke 作用素に関する Eisenstein 級数と E-多項式の類似もある. これについては [3] を参照のこと.

- 大浦学氏は, 2^g 個の変数に対する E-多項式の定義を与えている [6]. Siegel モジュラー形式と多変数 E-多項式の, ゼロ点やフーリエ係数に関する類似を探すのは興味ある問題である.

参考文献

- [1] I. Duursma, A Riemann hypothesis analogue for self-dual codes. Codes and association schemes (Piscataway, NJ, 1999), 115–124, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 56, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [2] T. Miezaki, Analogies between the Eisenstein series and the Eisenstein polynomials, preprint.
- [3] G. Nebe, Kneser-Hecke-operators in coding theory. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **76** (2006), 79–90.
- [4] H. Nozaki, A separation property of the zeros of Eisenstein series for $SL(2, \mathbb{Z})$. *Bull. Lond. Math. Soc.* **40** (2008), no. 1, 26–36.
- [5] A. Munemasa, Codes, invariant polynomials and modular forms(in Japanese), The first spring conference "The rings of automorphic forms" (Organizers:T.Ibukiyama, et al.), Hamana lake, Japan, 2002, 135–161.
- [6] M. Oura, Eisenstein polynomials associated to binary codes, *Int. J. Number Theory* **5** (2009), no. 4, 635–640.
- [7] M. Oura, モジュラー形式としての E-多項式, 組合せ論セミナー, 大分工業高等専門学校, 2012 年 3 月 1 日.
- [8] F.K.C. Rankin and H.P.F. Swinnerton-Dyer, On the zeros of Eisenstein series, *Bull. London Math. Soc.* **2** (1970), 169–170.
- [9] G.C. Shephard and J.A. Todd, Finite unitary reflection groups, *Canadian J. Math.* **6** (1954), 274–304.