

二次元表面波について

京大 数理解析 吉原英昭

時刻 $t \in \mathbb{R}$ 、流体領域 $G(t) = \{(y_1, y_2) \mid -\infty < y_1 < +\infty, -h + \eta(t, y_1) \leq y_2 \leq \eta(t, y_1)\}$, $h = \text{const} > 0$, を占めるものとする。 $\Gamma_s: y_2 = \eta(t, y_1)$ は自由境界, $\Gamma_b: y_2 = -h + \eta(t, y_1)$ は底である。流体は完全非可縮, 運動は渦なし, 重力場 $= (0, -1)$, 質量密度 $\rho = 1$ とすると, 速度ベクトル $v = (v_1, v_2)$, 圧力 p , 自由表面を表わす η は次の方程式を満たす。

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \frac{\partial}{\partial t} v + (v \cdot \nabla) v &= -(0, 1) - \nabla p \\ (2) \quad \text{div } v &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial y_2} v_1 - \frac{\partial}{\partial y_1} v_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq t \leq T, \quad y \in G(t)$$

$$(3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \right) (\eta - \eta(t, y_1)) = 0, \quad p = p_0 \quad \text{on } \Gamma_s$$

$$(4) \quad N \cdot v = 0 \quad \text{on } \Gamma_b$$

$\nabla = \text{grad}$, $v \cdot \nabla = v_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$, $p_0 = \text{const}$, N : outer normal である。 $t=0$ で初期値

$$(5) \quad \eta(0, y_1) = \eta_0(y_1), \quad v_1(0, y_1, \eta_0(y_1)) = v_{10}(y_1)$$

をとるものとする。

Lagrange 座標を使つて, 問題を Sobolev 空間であつた。

t に依存する Γ_s の parameter 表示; $y_1 = x + X_1(t, x)$, $y_2 = X_2(t, x)$,
 $-\infty < x < +\infty$ を $X_t(t, x) = v(t, x + X_1(t, x), X_2(t, x))$ とみたすように
 とる。 $p = p_0$ on Γ_s より, $\nabla p \cdot X_x = 0$, (X_x は Γ_s の接ベクトル
 で, ∇p は normal に平行であるから)。 $X_{tt} = v_t + (v \cdot \nabla)v = -(0, 1)$
 $- \nabla p$ であるから, $0 = X_x \cdot \nabla p = X_{x1} \cdot (X_{tt} + (0, 1)) = (1 + X_{1x})X_{1tt} + X_{2x}(1 +$
 $X_{2tt})$ となる。(2)より, $v_1 - i v_2$ は $y_1 + i y_2$ について holomorphic
 である。 $v_1 - i v_2 \rightarrow 0$ ($y_1 + i y_2 \rightarrow \infty$) であるから, $v_1|_{\Gamma_s} \rightarrow v_2|_{\Gamma_s}$
 なる線型作用素が存在する。 $v_t|_{\Gamma_s} = X_t$ であるから, これを
 $X_{2t} = K X_{1t}$ と表示する。($y_1 + i y_2$ 空間で Cauchy の積分定理を使い,
 $v_1|_{\Gamma_s}$ と $v_2|_{\Gamma_s}$ の関係式を導き, Γ_s の parameter 表示を使うと K の具
 体的な表現を得る。)

記号 $H^s = H^s(\mathbb{R}^1)$, $-\infty < s < +\infty$, と norm $\|u\|_s = \left(\frac{1}{2\pi} \int |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$
 $\hat{u}(\xi) = \int u(x) e^{-i\xi x} dx$, とする Sobolev 空間とする。 $w = (w_1, \dots, w_m) \in H^s$
 とは, $w_j \in H^s$, $j=1, \dots, m$ を意味し, $\|w\|_s = \left(\sum_{j=1}^m \|w_j\|_s^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ とする。
 K の性質についてのべる。 K は X, h, h に依存する線型作
 用素で, $\forall$ integer $m \geq 2$, $\exists c > 0$ s.t. $X, X' \in H^m, h \in H^{m+6}$,
 $\|h\|_{m+6}, \|X\|_m, \|X'\|_m \leq c \Rightarrow K = K(X, h, h) : H^2 \rightarrow H^m$, linear cont.
 $\| \{K(X, h, h) - K(X', h, h)\} u \|_m \leq C \|X - X'\|_m \|u\|_2$, $u \in H^2$,
 $C = C(m, c, h) > 0$, $K(0, 0, h) = -i \tanh(hD)$, $D = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ 。

定理 $m: \text{integer} \geq 6$, $h \in H^{m+6}$ は小とする。もし, $U, V \in H^m$ が小であれば, 以下の様な $T > 0$ が存在する: 初期値問題は

$$(6) \quad \begin{cases} (1+X_{1x})X_{1tt} + X_{2x}(1+X_{2tt}) = 0 \\ X_{2t} = KX_{1t} \end{cases}$$

$$(7) \quad X = U, \quad X_t = V, \quad t=0$$

は, $X \in C^2([0, T]; H^{m-2}) \cap C^1([0, T]; H^{m-1})$ とする解 X を唯一つ持つ。

注 (i) $h = \infty$ の場合, 上記の定理は V.I. Malimov によって証明された。 (ii) $0 < h < \infty$, $P_b: y_2 = -h$ の場合, L.V. Orsjannikov, 鹿野・西田が, 空間変数にかんして real-analytic な函数空間での一意的存在を示した。

証明の要点 $Y = X_{tt}$, $Z = X_x$, $W = (X, Y, Z)$, $W' = (X, Y_t)$ とおくと, 方程式 (6) は, 次の方程式に変換される。

$$(8) \quad X_{tt} = Y, \quad Y_{1tt} + a|D|Y_1 = f_1, \quad Y_{2t} = f_2, \quad Z_{1t} = f_3, \quad Z_{2t} = f_4$$

$$\text{ここで, } a = a(W) = ((1+Z_1)(1+Y_2) - Z_2Y_1)((1+Z_1)^2 + Z_2^2)^{-1}, \quad f_j = f_j(W, W', h)$$

で, $m \geq 3$. $h \in H^{m+6}$, $W, W_t' \in H^m$ が小であれば, $f_j \in H^m$ であり,

かつ, W, W_t' にかんして Lipschitz cont. である。初期値 $W(0), W_t'(0)$

は (6), (7) より得られる。(8) の解を逐次近似法で得る。すな

わち, j 番目の解 W^j を (8) の右辺と a に代入し, W^{j+1} について

線型方程式を考えよ。次の補題により, W^{j+1} が存在する。

補題 $m \geq 2$, $A(t, x): \text{real}$. $A \in C^0([0, T]; H^m)$, $A_t \in C^0([0, T]; H^2)$

$\sup_{t, x} |A(t, x)| < 1$ とする。

もし, $u_0 \in H^{m+\frac{1}{2}}$, $u_1 \in H^m$, $g \in C^0([0, T], H^m)$ ならば, 初期問題

$$u_{tt} + (1 + A(x))|D|u = g, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1 \text{ は}$$

$(\frac{\partial}{\partial t})^j u \in C^0([0, T], H^{m+\frac{1}{2}-\frac{j}{2}})$, $j=0, 1, 2$ とする解 u を唯一つ持つ。

エネルギー不等式を用いて, W^j , $j=1, 2, \dots$ が収束列であることを示され, 次の補題が成立する。

補題 $m \geq 4$, $u \in H^{m+\frac{1}{2}}$ は小とする。もし, 初期値 $W(0), W_t'(0)$ が, $W(0), W_t'(0) \in H^m$, $Y_1(0) \in H^{m+\frac{1}{2}}$ かつ小であるようなものならば, $0 \leq t \leq T$ で, $X \in C^2([0, T], H^m)$, $Y_2, Z \in C^1([0, T], H^m)$,

$(\frac{\partial}{\partial t})^j Y_1 \in C^0([0, T], H^{m+\frac{1}{2}-\frac{j}{2}})$, $j=0, 1, 2$ とするならば (8) の解 W が唯一存在するような $T > 0$ がとれる。

参考文献

В. И. Наминов: Задача Коши-Пуассона, Динамика сплошной среды 18 (1974) 104-210.

L. V. Ovsjannikov: To the shallow water theory foundation, Archives of Mechanics 26, 3, 407-422 (1974)

T. Kano, T. Nishida: Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde, J. Math. Kyoto Univ. 19-2 (1979) 335-370