

スクイズドチャネルの情報伝送効率について
(On the efficiency of the information transmission for squeezed channel)

佐藤 友彦 渡邊 昇 大矢 雅則

東京理科大学理工学部情報科学科

〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641

TEL 0471-24-1501(内 3319)

E-mail: watanabe@is.noda.sut.ac.jp

Abstract. 従来の通信過程は、入・出力系、雑音・損失系にコヒーレント状態を用いたチャネルによって構成されている[2]。最近では、コヒーレント状態をさらに応用した、スクイズド状態を用いた通信の研究が盛んになっている。スクイズド状態を用いた通信の伝送効率は、スクイズングの効果を高めるほど、従来のコヒーレント状態を用いた通信の伝送効率に比べ飛躍的に良くなることが知られている。

本稿では、スクイズド状態を用いた量子チャネルのモデルとなるスクイズドチャネルを定義し、このチャネルにおける情報伝送の効率を、相互エントロピー、または量子通信路容量を用いて計算する。

1. スクイズド状態

光子の消滅作用素 a と、光子生成作用素 a^* に対して、 $|\lambda|^2 - |\mu|^2 = 1$ をみたす複素数 λ, μ を用いて、

$$\begin{aligned} b &\equiv \lambda a + \mu a^* \\ b^* &\equiv \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} a \end{aligned}$$

で、新たな生成・消滅作用素 b^*, b を定める。この b の固有状態をスクイズド状態ベクトルといい、 $|\theta; \lambda, \mu\rangle$ で表す。すなわち

$$b|\theta; \lambda, \mu\rangle = (\lambda\theta + \mu\bar{\theta})|\theta; \lambda, \mu\rangle$$

である。このスクイズド状態によってつくられる状態

$$\rho_{sq} = |\theta; \lambda, \mu\rangle\langle\theta; \lambda, \mu|$$

がスクイズド状態である。スクイズド状態ベクトルを光子数確定状態のCONSでフーリエ展開すると、

$$|\theta; \lambda, \mu\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} s_n |n\rangle$$

となる。ここで、定数 s_n は

$$\begin{aligned} s_n &= \langle n | \theta; \lambda, \mu \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda n!}} \left(\frac{\mu}{2\lambda} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left(-\frac{|\theta|^2}{2} + \frac{\bar{\mu}\theta^2}{2\lambda} \right) H_n \left(\frac{\theta}{\sqrt{2\lambda\mu}} \right) \end{aligned}$$

であり、 $H_n(x)$ は、 n 次のエルミート多項式である[6], [8]。

消滅作用素 a を二つのエルミート作用素 $a_x = \frac{1}{2}(a + a^*)$ と $a_y = \frac{1}{2i}(a - a^*)$ に分けると、スクイズド状態における複素振幅の分散は

$$\begin{aligned} (\Delta a_x)^2 &= \frac{|\lambda - \mu|^2}{4} \\ (\Delta a_y)^2 &= \frac{|\lambda + \mu|^2}{4} \end{aligned}$$

となるから、パラメータ λ, μ を変化させることにより、一方の分散 $(\Delta a_y)^2$ をコヒーレント状態におけ

る，複素振幅の分散より小さくすることができる．

2. 量子チャネル

量子入力状態の全体 $\mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$ から量子出力状態の全体 $\mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$ への写像 Λ^* を量子チャネルと呼ぶ． $\mathcal{H}_2$ 上の有界線形作用素の全体 $\mathbf{B}(\mathcal{H}_2)$ から， $\mathcal{H}_1$ 上の有界線形作用素の全体 $\mathbf{B}(\mathcal{H}_1)$ への写像 Λ が Λ^* の共役写像であるとは，任意の $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$ と任意の $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_2)$ に対して，

$$\mathrm{tr} \Lambda^*(\rho) A = \mathrm{tr} \rho \Lambda(A)$$

が成り立つことをいうが，この Λ が完全正写像であるとき， Λ^* を完全正チャネルと呼ぶ[2], [3]．なお， Λ が完全正写像であるとは，任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $A_j \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_2)$ と任意の $B_k \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_1)$ に対して，

$$\sum_{j,k=1}^n B_k^* \Lambda(A_j^* A_k) B_k \geq 0$$

を満たす場合をいう[2], [3]．

いま，雑音系と損失系を表す 2 つのヒルベルト空間をそれぞれ $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ とする． $\mathcal{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ を雑音状態とすると，雑音と損失を考慮した量子チャネルは，任意の入力状態 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$ に対して，

$$\Lambda^*(\rho) = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}_2} \pi^*(\rho \otimes \varsigma)$$

で定められる[2]．ここで π^* はチャネルの物理的特性によって決まる $\mathcal{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ から $\mathcal{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ への量子系のチャネルである．

3. スクイズドチャネル

本節では，スクイズド状態をスクイズド状態へ移すスクイズドチャネルを定義する．

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1$ から $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2$ への変換 V_{sq} を次のように定める．

$$\begin{aligned} & V_{sq}(|\theta_1; \lambda_1, \mu_1\rangle \otimes |\theta_2; \lambda_2, \mu_2\rangle) \\ &= |\alpha\theta_1 + \beta\theta_2; f_{\alpha', \beta'}(\mu_1, \mu_2), \alpha'\mu_1 + \beta'\mu_2\rangle \otimes |-\beta\bar{\theta}_1 + \alpha\bar{\theta}_2; g_{\alpha', \beta'}(\mu_1, \mu_2), -\beta'\bar{\mu}_1 + \alpha'\bar{\mu}_2\rangle \end{aligned}$$

この変換 V_{sq} を用いて $\mathcal{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ から $\mathcal{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ への完全正チャネル π_{sq}^* を

$$\pi_{sq}^*(\cdot) = V_{sq}(\cdot) V_{sq}^*$$

で定める．入力のスクイズド状態 ρ_{sq} に対して，雑音のあるスクイズドチャネル Λ_{sq}^* は

$$\Lambda_{sq}^*(\rho_{sq}) = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}_2} V_{sq}(\rho_{sq} \otimes \varsigma_{sq}) V_{sq}^*$$

で定義される．ここで $\varsigma_{sq} \in \mathcal{S}(\mathcal{K}_1)$ は雑音源を表すスクイズド状態である．

なお，この V_{sq} を用いて与えられる量子チャネル π_{sq}^* による状態変化を図示すると次のようになる．

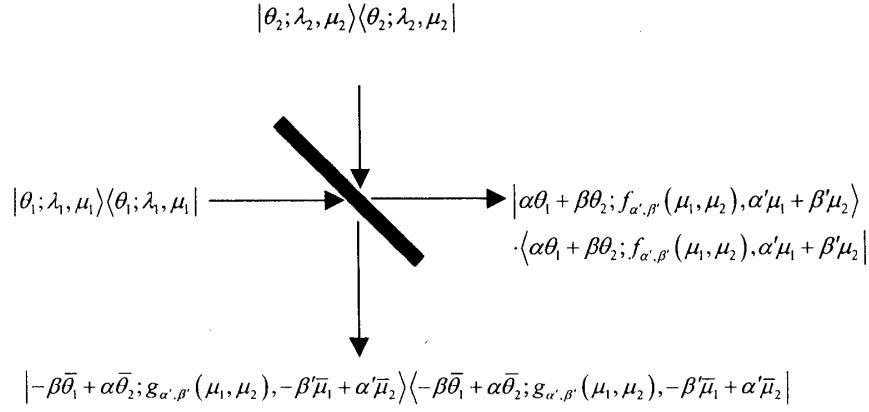


図 3.1 量子チャネル π_{sq}^*

この状態変化は、スクイジング性を保つ。すなわち、 $f_{\alpha', \beta'}(\mu_1, \mu_2) g_{\alpha', \beta'}(\mu_1, \mu_2)$ は

$$\begin{aligned} |f_{\alpha', \beta'}(\mu_1, \mu_2)|^2 - |\alpha' \mu_1 + \beta' \mu_2|^2 &= 1, \\ |g_{\alpha', \beta'}(\mu_1, \mu_2)|^2 - |-\beta' \mu_1 + \alpha' \mu_2|^2 &= 1 \end{aligned}$$

をみたす。また、計算の便宜上、 $\alpha_1^2 = \eta$ ($\alpha_1 = \sqrt{\eta}$, $\beta_1 = \sqrt{1-\eta}$), $\alpha_2^2 = s$ ($\alpha_2 = \sqrt{s}$, $\beta_2 = \sqrt{1-s}$) とおき、 η を光子の透過率、 s をスクイジング変化率と呼ぶ。

4. 量子相互エントロピー

量子系の von Neumann エントロピーは、量子系の状態が、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の密度作用素 ρ で表される状態に対して、

$$S(\rho) = -\text{tr} \rho \log \rho$$

で定義される[1].

いま、入力状態 ρ のシャッテン分解を

$$\rho = \sum_k \lambda_k E_k$$

とする[4]. 入力状態 ρ と出力状態 $\Lambda^* \rho$ の間の相関を表す合成状態 σ_E は $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上に

$$\sigma_E = \sum_n \lambda_n E_n \otimes \Lambda^* E_n$$

で定められる。このシャッテン分解は $E = \{E_n\}$ の選び方に依存するので添え字 E を付けて表している。

入力状態 ρ とチャネル Λ^* に関する量子系の相互エントロピーは、合成状態 σ_E と相対エントロピーを用いて、

$$I(\rho; \Lambda^*) = \sup_E S(\sigma_E, \sigma_0)$$

で定められる[2]. ただし, σ_0 は入力状態 ρ と出力状態 $\Lambda^*\rho$ の合成状態

$$\sigma_0 = \rho \otimes \Lambda^*\rho$$

で与えられ, 相対エントロピーは, 2つの状態 $\rho, \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対して

$$S(\rho, \sigma) = \text{tr} \rho (\log \rho - \log \sigma) (s(\rho) \leq s(\sigma))$$

で与えられる[7].

5. 量子通信路容量(Capacity)

ある条件を満たす入力状態の集合を $\mathbf{s} \subset \mathcal{S}(\mathcal{H})$ とする. この $\mathbf{s}$ に対して, 量子チャネル Λ^* がどれだけの情報の量を正しく出力系に伝達する能力をもっているかを表す尺度として量子通信路容量(Capacity)がある. 量子通信路容量は量子相互エントロピーを用いて以下のように表される[5].

$$C^s(\Lambda^*) \equiv \sup \{ I(\rho; \Lambda^*); \rho \in \mathbf{s} \}$$

6. スクイズドチャネルにおける量子通信路容量の計算

入力状態 ρ_{SQ} , 雑音状態 ς をそれぞれ

$$\begin{aligned} \rho_{SQ} &= p|0; \lambda_0, \mu_0\rangle\langle 0; \lambda_0, \mu_0| + (1-p)|\theta_1; \lambda_1, \mu_1\rangle\langle \theta_1; \lambda_1, \mu_1| \quad (\forall p \in [0, 1]) \\ \varsigma &= |\theta_2; \lambda_2, \mu_2\rangle\langle \theta_2; \lambda_2, \mu_2| \end{aligned}$$

とする. 各パラメータを変化させて, 入力状態 ρ_{SQ} に対するスクイズドチャネル Λ_{SQ}^* の量子通信路容量を計算することができる. 以下のグラフはその一例である.

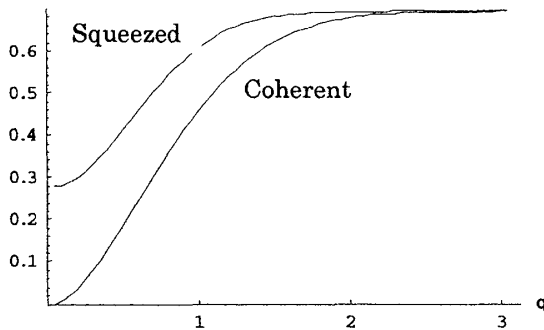


図 6.1: The quantum capacity for squeezing channel

$$(\eta = 0.9, \theta_0 = 0, \theta_2 = 0, \mu_0 = 0)$$

上のグラフは, 入力状態がコヒーレントである場合と, λ_1, μ_1 を大きくした場合, すなわちスクイズド状態である場合の量子通信路容量の比較である. このように, スクイズングの効果を強めることで, 量子通信路容量がより良い結果を得ることが確かめられた.

Reference

- [1] J.von.Neumann, "Die Mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik", Springer-Berlin, 1932.
- [2] M.Ohya, "On compound state and mutual information in quantum information theory. "IEEE Transactions of Information Theory IT-29, 770-774, 1983.
- [3] M.Ohya, "Some aspects of quantum information theory and their applications to irreversible processes", Reports on Mathematical Physics, 27, 19-47, 1989.
- [4] M.Ohya, D.Petz, "Quantum Entropy and its Use", Springer-Verlag, 1993.
- [5] M.Ohya, D.Petz and N.Watanabe, "On capacities of quantum channels", Probability and Mathematical Statistics, Vol.17, pp.179-196, 1997.
- [6] 大矢雅則, 渡邊昇, "量子通信理論の基礎 量子情報から光通信へ", 牧野書店, 1998.
- [7] H.Umegaki, "Conditional expectation in an operator algebra, IV, (entropy and information)", Kodai.Math.Sem.Rep., Vol.14, pp.59-85, 1962.
- [8] H.P.Yuen, "Two-photon coherent states of the radiation field", Phys. Rev. A13, no.6, pp.2226-2243, June 1976.