

1

The coincidence of fields of moduli for non-hyperelliptic
curves and for their jacobian varieties

中大理工 関 口 力

Field of moduli の概念は、松阪氏により導入され、志村氏により、ほとんど正標数の場合であるが、curve あるいは polarized abelian variety 等についていろいろの結果が出されている。しかしながら、正標数の場合、考察はこれといったものの inseparability の部分が明確でなく、その明確な定義は小泉 [3] により始めて導入され、お蔭により正標数の場合にも考察がし易くなったのである。ここでは、正標数の場合に non-hyperelliptic curve とその polarized jacobian variety の field of moduli の一致することを示す。

§ 1. Field of moduli

以下、universal domain Ω を固定する。 Ω の部分体 K 、 K 上定義された曲線あるいは偏極アーベル多様体 E と E' について、geometric isomorphism

$$P/k \sim P'/k' \stackrel{\text{def.}}{\iff} \Omega \supset K \supset K' \text{ st. } P \otimes_K K' \simeq P' \otimes_{K'} K$$

で定義する。このとき、 P の field of moduli k_P は次のように定義される。

$$\Omega \supset k_P : \text{field of moduli for } P \stackrel{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} \text{i) } k_P = \bigcap_{P'/k' \sim P} k' \\ \text{ii) for } \forall \sigma \in \text{Aut}(\Omega), \\ P \sim P^\sigma \iff \sigma|_{k_P} = \text{id}_{k_P} \end{cases}$$

Field of moduli に関して、次の定理が基本的である。

定理. complete non-singular curve ある Ω は polarized abelian variety に対し、field of moduli が存在する。
(例えば、Koizumi [3] 参照。)

§ 2. 問題と結果

以下、 M_g を genus g の complete non-singular curve の coarse moduli scheme, $A_{g,d}$ を degree d の polarization をもつ次元 g の abelian variety の coarse moduli scheme とする ([4] 参照)。

問題 1. C を genus g の complete non-singular curve, x をそれに対応する M_g 上の点とした

とき,

$$k_c = k(x)$$

となるか。但し, $k(x)$ は M_g における x の剰余体である。

問題 2. P を degree d の polarization を持つ次元 g の abelian variety とし, x をそれに対応する $A_{g,d}$ 上の点としたとき,

$$k_P = k(x)$$

となるか。

この二つの問題に関しすぐわかることは

命題. P を curve あるいは polarized abelian variety とし, それに対応する moduli scheme 上の点を x としたとき, k_P は $k(x)$ 上高々 purely inseparable である。

これから, 上の問題は標数 0 の場合成り立つのであるが, 正標数の場合は今正解がわかっていない。尚, 標数 0 の場合, Bailey, Shimura により論じられておりよく知られた事実である。

Field of moduli は定義体の下限であり, 次に

問題に在るものはそれが最初かどうかである。

問題 3 P を complete non-singular curve あるいは polarized abelian variety としたとき, P の field of moduli k_P 上定義された P' で, $P' \sim P$ となるものが存在するか。

この問題に関しては, Shimura [7] により, 一般には否定的な結果が出ている。

定理 (Shimura) P を標数 0 の体上定義された次元 g の generic polarized abelian variety とする。このとき,

$$g: \text{奇数} \implies \exists P'/k_P \text{ s.t. } P \sim P',$$

$$g: \text{偶数} \implies \nexists P'/k_P \text{ s.t. } P \sim P'.$$

問題 1, 2, 3 は coarse moduli scheme がどのくらい coarse であるかを示唆するものであり, 基本的に重要な問題である。

我々の取り扱う問題は, 最初に述べたように, 次の問題である。

問題 4 C を genus g (≥ 2) の complete non-singular curve, $P = (J(C), \chi(C))$ をその polarized jacobian variety としたとき,

$$h_C = h_P$$

であるが、標数 0 の場合、これは簡単なことであり、field of moduli は (ii) だけで特徴づけられ、Torelli map が injective であることを用いれば等号の成り立つことがわかる（これは小泉氏の指摘による）。正標数の場合にも同様に成立することが望まれるのであるが、残念ながら今のところ non-hyperelliptic に限らざるを得ない。尚、Oort と Steenbrink が、Torelli map が π を locally closed immersion かと調べてあり、従って、locally closed immersion となる点では、問題 1, 2 より自動的に問題 4 が肯定的に得られることを注意しておく。次が我々の主定理である。

定理 I. $\mathbb{C}$ を標数 p (> 0) の体上定義された complete non-singular curve とし、 $(J(C), \lambda(C))$ をその polarized jacobian variety とするとき、

$$h_C = h_{(J(C), \lambda(C))}$$

が成り立つ。

genus g を 3 以下に限るならば、Oort-Ueno の結果

定理 (Oort-Veno). P を 2 ある 11 は 3次元の principally polarized abelian variety としたとき, good stable curve C が存在し,

$$(\mathcal{J}(C), \lambda(C)) \sim P$$

が成り立つ

([6] 参照).

があるが, [6] の方法を精密化することにより $g=3$ の場合に定義体も含めた次の結果を得る.

定理 II. P を体 K 上の 3次元 principally polarized abelian variety としたとき, K 上の good stable curve C が存在し,

$$(\mathcal{J}(C), \lambda(C)) \simeq P$$

となる.

§ 3. 定理の証明.

まず, Oort-Veno の補題の精密化から始める.

命題 1. (Oort-Veno). (A, m) を discrete valuation ring, その剰余体を $k = A/m$, 商体を $K = \text{f.f.}(A)$ とおく. $(\mathcal{X}, \lambda)$ を $\text{Spec } A$ 上の principally polarized abelian

scheme, C を K 上の genus g (≥ 2) の good stable curve とし, 同型

$$\phi: (J(C), \lambda(C)) \simeq (\mathfrak{X}, \lambda) \otimes_A K$$

が与えられているとする。このとき, $\text{Spec } A$ 上の good stable curve $\mathcal{C}$ で, 次の条件を満足するものが存在する。

$$\mathcal{C} \otimes_A K \simeq C,$$

$$\exists \phi: (J(\mathcal{C}), \lambda(\mathcal{C})) \simeq (\mathfrak{X}, \lambda) \quad \text{すなわち} \quad \phi \otimes K = \phi_0.$$

証明の方針. K が十分大きい時には, C が $J(C) \simeq \mathfrak{X} \otimes_A K$ に埋め込まれ, $\mathfrak{X}$ の中で C の scheme-theoretic な closure を取れば, それが求める $\text{Spec } A$ 上の good stable curve となる ([6] 参照). 一般には, 一旦, K を適当な有限次拡大体 K' に拡張, $C \otimes K'$ を $J(C) \otimes K' \simeq \mathfrak{X} \otimes_A K'$ に埋め込み, $C \otimes K'$ を上の議論で $\text{Spec } A'$ 上の good stable curve $\mathcal{C}'$ に拡張する. 但し, A' は A の K' における integral closure を 1 つの maximal ideal で localization したものである. ここで, $\mathcal{C}'$ は generic fibre で K 上への descent data を持っているわけであるが, これを [1], Theorem 2.4 の証明と同じ論法により, $\text{Spec } A'$ から

$\text{Spec } A$ の descent data に伸ばすことが出来、 $\mathcal{C}'$ は $\text{Spec } A$ 上の good stable curve にあつてことが出来る。

この命題より、簡単に次の系を得る。

系 2. (A, m) を regular local ring, $k = A/m$, $K = \text{f.f.}(A)$ とする。 $(\mathcal{X}, \lambda)$ を $\text{Spec } A$ 上の principally polarized abelian scheme, C を K 上の good stable curve とし、 $(J(C), \lambda(C)) \simeq (\mathcal{X}, \lambda) \otimes_A K$ とする。このとき、 k 上の good stable curve C_0 が存在し、

$$(J(C_0), \lambda(C_0)) \simeq (\mathcal{X}, \lambda) \otimes_A k$$

となる。

次の命題が、我々の議論の道具になるものであり、non-hyperelliptic に制限する理由はここにある。

命題 3. (A, m_A) を complete discrete valuation ring, $k = A/m_A$, $K = \text{f.f.}(A)$ とする。 K' を K の finite algebraic extension とし、 A' を A の K' における integral closure, $k' = A'/m_{A'}$ とおく。 $(\mathcal{X}, \lambda)$ を $S = \text{Spec } A$ 上の principally polarized abelian scheme, C' を K' 上の complete non-singular curve, C_0 を k 上の non-hyperelliptic

curve とし, 同型写像

$$\psi: (J(C'), \lambda(C')) \simeq (\mathfrak{x}, \lambda) \otimes_A K',$$

$$(J(C_0), \lambda(C_0)) \simeq (\mathfrak{x}, \lambda) \otimes_A K$$

が与えられているものとする。このとき, 命題 1 により C' の $S' = \text{Spec } A'$ 上の deformation $\mathcal{C}'$ が存在するか, その special fibre $\mathcal{C}'_{A'}$ は

$$\mathcal{C}'_{A'} \simeq C_0 \otimes_A K'$$

となることを仮定する。このとき, S 上の curve $\mathcal{C}$ と同型

$$\phi: (J(\mathcal{C}), \lambda(\mathcal{C})) \simeq (\mathfrak{x}, \lambda),$$

$$f: \mathcal{C} \otimes_{A'} A' \simeq \mathcal{C}'$$

が存在し, $\phi \otimes_A K' = \psi$, $J(f) = \phi \otimes_A A'$ となる。

証明. 任意の整数 n (≥ 0) に対し, $A_n = A/\pi_A^{n+1}$, $S_n = \text{Spec } A_n$, $A'_n = A'/\pi_A^{n+1}A'$, $S'_n = \text{Spec } A'_n$ とおく。また, $C'_n = \mathcal{C}' \times_{S'} S'_n$, $(X_n, \lambda_n) = (\mathfrak{x}, \lambda) \times_S S'_n$, $(X'_n, \lambda'_n) = (\mathfrak{x}, \lambda) \times_S S'_n$ とおく。 $n=0$ のとき, C_0 が与えられているゆえに, n に関する帰納法により, n に対し, S_n 上の curve C_n について $C_n \times_{S_n} S'_n \simeq C'_n$, $(J(C_n), \lambda(C_n)) \simeq (X_n, \lambda_n)$ となるものが得られたとする。このとき, $\mathcal{L}(*; S_n \rightarrow S_{n+1})$, $\mathcal{L}(*; S'_n \rightarrow S'_{n+1})$ によりそれぞれ, $*$

の S_{n+1} 上への lifting 全体, A' の S'_{n+1} 上への lifting 全体とすれば, Grothendieck の議論 (SGA 1, Ex. III) によつて, lifting space の base point を適当に決めることにより, $\mathcal{R}$ の可換な図式

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{L}(C'_n; S'_n \rightarrow S'_{n+1}) & \xrightarrow{J} & \mathcal{L}(X'_n; S'_n \rightarrow S'_{n+1}) \\
 \nearrow \text{SI} & & \nearrow \text{SI} \\
 H^1(C_0, \check{\Omega}_{C_0}) \otimes_{\mathbb{R}} (\pi_A^{n+1} A' / \pi_A^{n+2} A') & \xrightarrow{j \otimes 1} & H^1(X_0, \check{\Omega}_{X_0}) \otimes_{\mathbb{R}} (\pi_A^{n+1} A' / \pi_A^{n+2} A') \\
 \nearrow \text{SI} & & \nearrow \text{SI} \\
 \mathcal{L}(C_n; S_n \rightarrow S_{n+1}) & \xrightarrow{J} & \mathcal{L}(X_n; S_n \rightarrow S_{n+1}) \\
 \nearrow \text{SI} & & \nearrow \text{SI} \\
 H^1(C_0, \check{\Omega}_{C_0}) \otimes_{\mathbb{R}} (\pi_A^{n+1} A' / \pi_A^{n+2} A') & \xrightarrow{j \otimes 1} & H^1(X_0, \check{\Omega}_{X_0}) \otimes_{\mathbb{R}} (\pi_A^{n+1} A' / \pi_A^{n+2} A')
 \end{array}$$

を得る。ここで, J は Torelli map, j は積写像

$$H^0(C_0, \Omega_{C_0}) \otimes H^0(C_0, \Omega_{C_0}) \longrightarrow H^0(C_0, \Omega_{C_0}^{\otimes 2})$$

を dualize したものであり, C_0 が non-hyperelliptic であることから, injective である。この図式において, $H^1(X_0, \check{\Omega}_{X_0}) \otimes_{\mathbb{R}} (\pi_A^{n+1} A' / \pi_A^{n+2} A')$ の中で,

$$\begin{aligned}
 & \left(H^1(C_0, \check{\Omega}_{C_0}) \otimes_{\mathbb{R}} (\pi_A^{n+1} A' / \pi_A^{n+2} A') \right) \cap \left(H^1(X_0, \check{\Omega}_{X_0}) \otimes_{\mathbb{R}} (\pi_A^{n+1} A' / \pi_A^{n+2} A') \right) \\
 &= H^1(C_0, \check{\Omega}_{C_0}) \otimes_{\mathbb{R}} (\pi_A^{n+1} A' / \pi_A^{n+2} A') ;
 \end{aligned}$$

即ち, $\mathcal{L}(X'_n; S'_n \rightarrow S'_{n+1})$ の中において,

$$\mathcal{L}(C'_n; S'_n \rightarrow S'_{n+1}) \cap \mathcal{L}(X'_n; S'_n \rightarrow S'_{n+1}) = \mathcal{L}(C'_n; S'_n \rightarrow S'_{n+1})$$

であるから, S_{n+1} 上の curve C_{n+1} で

$$C_{n+1} \times_{S_{n+1}} S_n \simeq C_n, \quad C_{n+1} \times_{S_{n+1}} S'_{n+1} \simeq C'_{n+1},$$

$$(J(C_{n+1}), \lambda(C_{n+1})) \simeq (X_{n+1}, \lambda_{n+1})$$

なるものが存在する。以上により curve の系 $\{C_n/S_n\}$ が得られたわけであり、この系は S 上の curve を決める。

この命題より、容易に次の系を得る。

系 4. $(A, \mathfrak{m}_A)$ を discrete valuation ring, $R = A/\mathfrak{m}_A$, $K = \text{f.f.}(A)$ とし、 A は条件 “ K の有限な finite algebraic extension M において、その integral closure は finite A -module である” を満たすものと仮定する。 L を与えられた K 上の finite algebraic extension, B を A 上の L における discrete valuation ring であり、 $\mathfrak{l} = B/\mathfrak{m}_B$ とおく。更に、 R' を R 上有限生成な拡大で、 R の R' における algebraic closure は R 上 separable であるとし、 $\mathfrak{l}'$ は R' と $\mathfrak{l}$ を含み $\mathfrak{l}' = R'\mathfrak{l}$ とする。

(X, λ) を $\text{Spec } A$ 上の principally polarized abelian scheme, C' を L 上の complete non-singular curve, C_0 を R' 上の complete non-singular non-hyperelliptic curve とし、同型字像

$$\psi: (J(C'), \lambda(C')) \longrightarrow (X, \lambda) \otimes_A L$$

が与えられているとする。このとき、命題 1
により、 C' の $\text{Spec } B$ 上の deformation C'' が存在す
るが、その special fibre を

$$C_0' = C' \otimes_B k$$

とおくとき、

$$C_0 \otimes_k k' \simeq C_0' \otimes_k k',$$

$$(X, \lambda) \otimes_{A'} B' \simeq (J(C_0), \lambda(C_0))$$

となるものとする。このとき、その中
に於ける K の algebraic closure が K 上 separable と
なる K の有限生成拡大体 K' と、 K' 上の curve
 C で、 $C' = K' C$ とおくとき、

$$C' \otimes_{L'} L' \simeq C \otimes_K L',$$

$$(J(C), \lambda(C)) \simeq (X, \lambda) \otimes_{A'} K'$$

となるものが存在する。

定理 I の証明. k を標数 p (> 0) の体上定
義された genus g (≥ 2) の complete non-singular
non-hyperelliptic curve とする。明らかに、 $\mathcal{H}_C$ は
 $\mathcal{H}_{(J(C), \lambda(C))}$ 上の高々 purely inseparable な拡大であ
り、従って、求める等式を得る為には、この

inseparability があてはめられる。

(X, λ) を K 上定義された principally polarized abelian variety で, $(X, \lambda) \sim (J(C), \lambda(C))$ となるものとする。このとき, C は K 上有限次拡大体 L 上定義されているものと仮定して差し支えない。ここで, $H_{g,1}$ を linear rigidification を g 次元の principally polarized abelian scheme の fine moduli scheme ([4] 参照) としたとき, (X, λ) の linear rigidification を適当に決めることにより, それは $H_{g,1}$ 上の K -rational point x を決める。ここで $K = k(x)$ とし差し支えない。 T を x の $H_{g,1}$ における locus とし, $H_{g,1}$ 上の universal abelian scheme を T 上に制限したものを (Z, λ) とおく。このとき,

$$(Z, \lambda)_x \simeq (X, \lambda)$$

である。ここで, T の simple closed point t で, $(Z, \lambda)_t$ が non-hyperelliptic curve の polarized jacobian variety と geometrically isomorphic となっているものを選ぶ。 $A = \mathcal{O}_{T,t}$ とおけば, A は regular local ring であり, $A/\mathfrak{m}_A$ は有限体 (それを $\mathbb{F}_q$ ($q=p^n$)) と

おく), $f.f.(A) = K$ となつてゐる。更に,
 $(\mathfrak{X}, \Lambda) = (Z, \Lambda) \times_T \text{Spec } A$ とし, $\{t_1, \dots, t_r\}$ を A の regular
parameter とするとし,

$$A^{(r)} = A_{(t_r)}, \quad A_r = A/(t_r), \quad f.f.(A_r) = K_r,$$

$$A^{(r-1)} = (A_r)_{(t_{r-1})}, \quad A_{r-1} = A_r/(t_{r-1}) = A/(t_r, t_{r-1}), \quad f.f.(A_{r-1}) = K_{r-1},$$

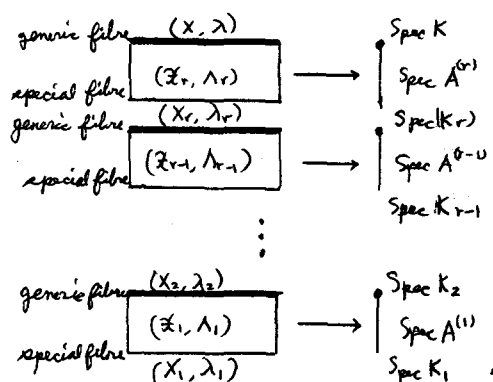
$$A^{(1)} = (A_2)_{(t_1)}, \quad A_1 = A_2/(t_1) = A/(t_r, \dots, t_1) = \mathbb{F}_q, \quad f.f.(A_1) = K_1 = \mathbb{F}_q$$

とあつて,

$$(\mathfrak{X}_i, \Lambda_i) = (\mathfrak{X}_i, \Lambda) \otimes_A A^{(i)},$$

$$(X_i, \lambda_i) = (\mathfrak{X}, \Lambda) \otimes_A K_i$$

とおく。このとき, 次の様な deformation の金貨を
得る。



次に, $B^{(r)}$ を discrete valuation ring $A^{(r)}$ の $L \wedge \mathfrak{o} - \mathfrak{o}$
の拡張とし, $L_r = B^{(r)}/\mathfrak{m}_{B^{(r)}}$ とおく。 $B^{(r-1)}$ を $A^{(r-1)}$ の

L_r の拡張とし, $L_{r-1} = B^{(r-1)}/\mathfrak{m}_{B^{(r-1)}}$ とおき, 以下同様にし, 体と valuation ring

$$L_r, L_{r-1}, \dots, L_1; B^{(r)}, B^{(r-1)}, \dots, B^{(1)}$$

を得る. 更に, 命題 1 を用いれば, 次に, smooth curve

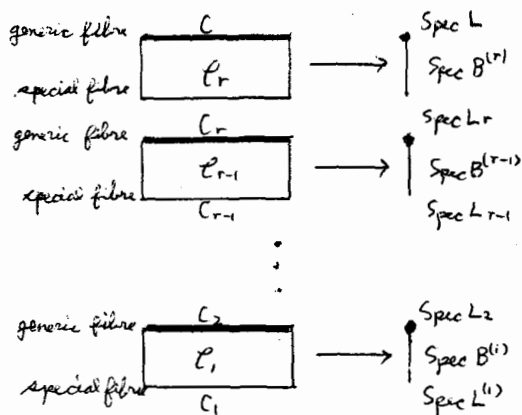
$$\mathcal{C}_r/\mathrm{Spec} B^{(r)}, \mathcal{C}_{r-1}/\mathrm{Spec} B^{(r-1)}, \dots, \mathcal{C}_1/\mathrm{Spec} B^{(1)}$$

を得,

$$\mathcal{C}_r \otimes_{B^{(r)}} L \simeq \mathcal{C}, \mathcal{C}_r \otimes_{B^{(r)}} L_r \simeq \mathcal{C}_{r-1} \otimes_{B^{(r-1)}} L_r, \dots, \mathcal{C}_2 \otimes_{B^{(1)}} L_2 \simeq \mathcal{C}_1 \otimes_{B^{(1)}} L_2,$$

$$(\mathcal{I}(\mathcal{C}_r), \lambda(\mathcal{C}_{r-1})) \simeq (\mathfrak{x}_r, \lambda_r) \otimes_{A^{(r)}} B^{(r)}, \dots, (\mathcal{I}(\mathcal{C}_1), \lambda(\mathcal{C}_1)) \simeq (\mathfrak{x}_1, \lambda_1) \otimes_{A^{(1)}} B^{(1)}$$

となる. 従って, $\mathcal{C}_2 \otimes_{B^{(1)}} L_2 = \mathcal{C}_2$ とおけば, 次の様な鎖を得る.



ここで, $C_1, (\mathfrak{x}_1, \lambda_1)$ と separable extension L_1/K_1 は系 4 を適用すれば, その中で K_2 の algebraic closure

が K_2 上 separable であるような K_2 上有限生成な拡大体 K_2' と, K_2' 上定義された curve C_2' を得, $L_2' = K_2' L_2$ とするとき,

$$C_2 \otimes_{L_2} L_2' \simeq C_2' \otimes_{K_2'} L_2',$$

$$(J(C_2'), \lambda(C_2')) \simeq (x_2, \lambda_2) \otimes_{A_2} K_2'$$

となる。再び, $(C_2, (x_2, \lambda_2))$ に K_2'/K_2 に系 4 を適用し, 同様の議論を続けねば, 最終的に, その中の K の algebraic closure が K 上 separable であるような, K 上有限生成な拡大体 K' と, K' 上定義された curve C' で,

$$(J(C'), \lambda(C')) \simeq (x, \lambda) \otimes_K K'$$

となるものが得られ, 我々の証明が完了する。

定理 II を証明する為に, 次の命題を準備する。

命題 5. C を標数 0 の体上定義された complete non-singular curve とし, C は automorphism ≠ identity 以外に持たないとする。このとき, $(x, \lambda)_K \sim (J(C), \lambda(C))$ なる K 上の curve C' が存在し, $C' \sim C$ かつ $(J(C'), \lambda(C')) \simeq (x, \lambda)$ となる。

証明. C の定義体を L とするとき, L は K

K の finite Galois extension としてよい。 $\text{Gal}(L/K) = G$ とおく。このとき、任意の $\sigma \in G$ に対し、

$$(J(C^\sigma), \lambda(C^\sigma)) \simeq (J(C), \lambda(C))$$

であり、従って、Torelli の定理により、geometric isomorphism

$$\lambda_\sigma : C \rightarrow C^\sigma$$

を得る。ところで、 C は identity 以外に automorphism を持たないことから、 λ_σ は L 上定義され、更に cocycle condition

$$\lambda_\tau \cdot \lambda_\sigma = \lambda_{\tau\sigma} \quad (\tau, \sigma \in G)$$

が成り立つ。従って、descent の理論により、 K 上の curve C' の存在を得る。

定理 II の証明. (X, λ) を k 上定義された 3 次元の principally polarized abelian variety とする。定理 I における証明と同様に、 $H_{3,1}$ を linear rigidification をもつ 3 次元の principally polarized abelian scheme の fine moduli scheme とする。 (X, λ) の linear rigidification ϕ を適当に決め、 (X, λ, ϕ) の決める $H_{3,1}$ の k -rational point を α とおく。ここで、また $k = K(x)$ としてよい。 $A = \mathcal{O}_{H_{3,1}, \alpha}$ とおき、

$H_{3,1}$ の universal abelian scheme を $\text{Spec } A$ に制限したものを (X, λ) とおけば, $(X, \lambda) \otimes_A R \simeq (X, \lambda)$ であり, (X, λ) の generic fibre は, generic な genus 3 の curve の polarized jacobian variety と geometrically isomorphic になっている。従って, 命題 5 と系 2 を用いて, 我々の結果を得る。尚, この証明の基本的なアイデアは Oort-Ueno [6] のそれと同じものである。

文 献

- [1] P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ. Math. 36 (Volume dedicated to O. Zariski), I.H.E.S. (1969), 75-109.
- [2] A. Grothendieck et al, Séminaire de géométrie algébrique 1, Lecture notes in Math. 224, Springer-Verlag, Heidelberg, 1971. Referred to as SGA1.
- [3] S. Kaizumi, The fields of moduli for polarized abelian varieties and for curves, Nagoya Math. J., 48 (1972), 37-55.
- [4] D. Mumford, Geometric invariant theory, Ergebnisse, Springer-Verlag, Heidelberg, 1965.
- [5] F. Oort, Finite group schemes, local moduli for

abelian varieties and lifting problems, algebraic geometry, Oslo 1970, Proceedings of the 5th Nordic Summer School in Math., edited by F. Oort.

- [6] F. Oort and K. Ueno, Principally polarized abelian varieties of dimension two or three are Jacobian varieties, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Section IA, Math. 20 (1973), 377-381.
- [7] G. Shimura, On the field of rationality for an abelian variety, Nagoya Math. J., 45 (1972), 167-178.