

$\Sigma\mathbb{C}$ -スタイン多様体について

東大・教養 藤本佳久

序. 我々は可算無限次元空間 $\Sigma\mathbb{C}$ 上の正則函数について調べてきた。そして、 $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合に対する $\mathbb{C}$ -係数のコホモロジー群の消滅すること、 $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合の analytic subvariety V の $\mathbb{C}$ -係数のコホモロジー群が消滅することはすでに得られている。ここでは、得られている結果を、 $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合をモデルとする無限次元の複素多様体、それを、 $\Sigma\mathbb{C}$ -複素多様体と呼ぶことにするが、この場合に拡張した結果を報告する。我々は、有限次元の理論の場合のスタイン多様体と類似の概念を導入し、それを $\Sigma\mathbb{C}$ -スタイン多様体と呼ぶことにするが、これに対して、多変数函数論での基本定理である岡-カルタンの定理 B と類似の定理を示す。即ち、次の定理が成り立つ。

[定理] X を $\Sigma\mathbb{C}$ -スタイン多様体とする。このとき、

$$H^k(X, \mathbb{C}) = 0 \quad (k \geq 1)$$

か成りたつ。

§0 準備

後で使う。すでに得られている結果を復習しておく。(この内容については [1] [2] を参照したい。)

まず $\Sigma\mathbb{C}$ の定義から始める。

$$\Sigma\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_n \{\mathbb{C}^n : \mathcal{U}_{n+1}^n\}$$

但し、

$\mathcal{U}_{n+1}^n : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$: 標準的うめこみ写像とする。

次に、 $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合 U 上の正則関数 f とは、任意の自然数 n に対して、制限 $f|_{\mathbb{C}^n}$ が通常の意味で $U \cap \mathbb{C}^n$ において正則なときをいう。正則関数の簡単な例をあげておこう。

$$(1) f(z) = z_1^k + z_2^k + z_3^k + \dots \quad \text{多項式}$$

$$(2) f(z) = e^{z_1 + z_2 + \dots} \quad \text{指数型}$$

さて、 $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合に対しては次の定理が成りたつ。

定理 1. U を $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合とする。このとき、

$$H^k(U, \mathcal{O}) = 0 \quad (k \geq 1)$$

か成りたつ

次に $\Sigma\mathbb{C}$ の意味での analytic subvariety の概念を導入しよう。

定義 1. D を $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合とする。 D の部分集合 V が D の

analytic subvariety であるとは、任意の $z \in D$ に対して、 z の近傍 U と U 上の正則関数の族 F が存在して

$$V \cap U = \{z \in D : f(z) = 0 \quad f \in F\}$$

かつ任意の自然数 n に対して、 $V_n \cap U_n$ が $F|_{U_n}$ の有限個の零点で表わされているときをいう。

今、 $\mathcal{I}$ を V のイデアルの層とすると、

定理2. D を $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合とし、 V を analytic subvariety とする。このとき、

$$H^k(D, \mathcal{I}) = 0 \quad (k \geq 1)$$

が成り立つ。

ここで、

$${}_V\tilde{\mathcal{O}}_D = \mathcal{O}_D / \mathcal{I}$$

とおくと、 $({}_V\tilde{\mathcal{O}}_D)_z = 0 \quad (z \in D - V)$ であるから、

$${}_V\mathcal{O} = {}_V\tilde{\mathcal{O}}_D|_V$$

とおく。このとき、

定理3. D を $\Sigma\mathbb{C}$ の擬凸開集合とし、 V を D の analytic subvariety とする。このとき、

$$H^k(V, {}_V\mathcal{O}) = 0 \quad (k \geq 1)$$

が成り立つ。

§1 $\Sigma\mathbb{C}$ -複素多様体

Hausdorff 空間 X は、各点が $\Sigma\mathbb{R}^k$ の開集合と位相同型な近傍を持つときに、 $\Sigma\mathbb{R}^k$ -多様体とよぼう。

X の開集合 U から $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合 $\tilde{U}$ の上への位相同型写像 $\phi: U \rightarrow \tilde{U}$ に対して、 $(U, \phi, \tilde{U})$ の組を chart と呼ぶことにして、このとき、 $\Sigma\mathbb{C}$ -複素多様体を次のように導入しよう。

定義 2. $\Sigma\mathbb{R}^2$ -多様体 X が開被覆 $\mathcal{U} = \{U_k\}$ でおおわれ、各 U_k がすべて $\text{chart}(U_k, \phi_k, \tilde{U}_k)$ をなしているとき、次の条件をみたすならば、 X を $\Sigma\mathbb{C}$ -複素多様体とよぶ。

(1) 任意の $U_k, U_{k'} \in \mathcal{U}$ に対して、写像

$$\phi_{k'} \circ \phi_k^{-1} : \phi_k(U_k \cap U_{k'}) \rightarrow \phi_{k'}(U_k \cap U_{k'})$$

は $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合の間の写像として双正則である。

(2) ϕ が開集合 $U \subset X$ から $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合への位相同型であり、任意の $U_k \in \mathcal{U}$ に対して写像

$$\phi_k \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap U_k) \rightarrow \phi_k(U \cap U_k)$$

が双正則ならば、 $U \in \mathcal{U}$ である。

さて、 X_1, X_2 を $\Sigma\mathbb{C}$ -複素多様体として、写像 $\psi: X_1 \rightarrow X_2$ が X_1 の任意の座標近傍 U_{k_1} と X_2 の任意の座標近傍 U_{k_2} に対して、 $\phi_{k_2}^{-1} \circ \psi \circ \phi_{k_1}$ が $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合の間の写像として、正則であるとき、正則と呼ぶ。

$\Sigma\mathbb{C}$ -複素多様体 X が σ -コンパクト としよう。 $\mathcal{O}(X)$ で X 上の正則関数のなす空間を表わすとき、 $\mathcal{O}(X)$ は Fréchet 空間になる。($X = \Sigma\mathbb{C}$ の開集合のとき、 $\mathcal{O}(X)$ が Fréchet 空間になることは、例えば [1] をみればよい。)

$\Sigma\mathbb{C}$ -複素多様体において、2つの交わる charts かどうかは、
 りあわせられているかを見よう。そのために、 $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合の間の正則写像を調べよう。

命題4. U, V を $\Sigma\mathbb{C}$ の開集合とし、写像 $\psi: U \rightarrow V$ が正則とする。このとき、任意の自然数 n に対して、ある自然数 m が存在して、

$$\psi(U \cap \mathbb{C}^n) \subset V \cap \mathbb{C}^m$$

が成り立つ。

注意 次の写像 ψ は $\Sigma\mathbb{C}$ から $\Sigma\mathbb{C}$ への写像にさえなっていない： $\Sigma\mathbb{C}$ の座標系 (z_i) とすると、 $w_k = \sum_{i=1}^k z_i$ とおく。このとき、写像 ψ を $\psi(z_1, z_2, \dots) = (w_1, w_2, \dots)$ で定義する。

命題4により次の命題が成り立つ。

命題5. X を $\Sigma\mathbb{C}$ -複素多様体とする。($U_1, \phi_1 = (z_j), \tilde{U}_1$)
 ($U_2, \phi_2 = (w_j), \tilde{U}_2$) を連結な charts とする。このとき、任意の自然数 n に対して、ある自然数 m が存在して、 U_1 の U_2' 上、 $z_j = 0$ 、($j > m$) となる。但し、

$$U_2' = \{x \in U_2 : 0 = W_{n+1}(x) = W_{n+2}(x) = \dots\}.$$

最後に、 $\Sigma\mathbb{Q}$ -複素多様体においては、 σ -コンパクトならば、パラコンパクトになる。局所コンパクト空間のときには、 σ -コンパクトからパラコンパクトが導かれることはよく知られているが、この場合は、局所コンパクトでない場合の例を与えている点で興味深いと思う。

命題6. X を $\Sigma\mathbb{Q}$ -複素多様体とする。このとき、 X が σ -コンパクトならば、パラコンパクトである。

§2. $\Sigma\mathbb{Q}$ -スタイン多様体

$\Sigma\mathbb{Q}$ -スタイン多様体の概念を導入し、序でも述べた次の定理の証明の概略を以下与えよう。

定理7. X を $\Sigma\mathbb{Q}$ -スタイン多様体とする。このとき、

$$H^k(X, \mathbb{Q}) = 0 \quad (k \geq 1)$$

が成り立つ。

まず、 $\Sigma\mathbb{Q}$ -スタイン多様体の定義をしよう。

定義3 σ -コンパクトな $\Sigma\mathbb{Q}$ -複素多様体 X が、 $\Sigma\mathbb{Q}$ -スタイン多様体であるとは、次の条件をみたすときをいう。

(i) (正則凸性) X の任意のコンパクト集合 K に対して、 K の正則包

$$\hat{K} = \{x \in X; |f(x)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)|, f \in \mathcal{O}(X)\}$$

がコンパクトになる。

(ii) (分離条件) X の相異なる 2 点 x, y に対して, X 全体で正則な函数で $f(x) \neq f(y)$ となるものが存在する。

(iii) X の各点 x に対して, x において局所座標系 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots)$ の各座標 ϕ_i が X 全体で正則な函数として選べる。

この定義は, 有限次元の場合のスタイン多様体の定義と同様の (i) (ii) (iii) の 3 条件以外の余分な条件は何も仮定していない。

さて, ここで定理の証明のスケッチに入, ていくわけであるが, その前に証明のアイディアについて触れておこう。まず X をとりつくす, $\Sigma \mathbb{C}$ の多重円板の analytic subvariety に双正則な領域 W_i (それを, $\Sigma \mathbb{C}$ -Oka-Weil 領域と呼ぶ) の増大列が存在することを示す。一方, 我々は, $\Sigma \mathbb{C}$ の擬凸開集合の analytic subvariety V に対しては, §0 で述べたように, $\mathbb{C}^0$ -係数のコホモロジー群は消滅すること分かっているから, W_i のコホモロジー群も消滅する。あとは, これらをグローバルにはりあわせることによつて, X 全体の $\mathbb{C}^0$ -係数コホモロジー群の消滅を示す, 1 -コホモロジー群の消滅を示すときに, 近似定理が必要である。

$\Sigma \mathbb{C}$ -Oka-Weil 領域の概念を導入しよう。

定義4 X を $\Sigma\mathbb{C}$ -スタイン多様体とする。開集合 W が X の中の $\Sigma\mathbb{C}$ -Oka-Weil 領域であるというのは、次の条件をみたすときをいう。

- (i) 以下の条件をみたす有限次元相対コンパクト analytic spaces から成る列 $\{Y_i\}$ がとれ、 $Y = \bigcup Y_i$ と表わせるような $\overline{W}$ の開近傍 Y が存在する；
- ① $W \cap Y_i$ は Y_i で相対コンパクト開集合。
 - ② Y_i は Y_{i+1} の analytic subvariety。
- (ii) $\overline{W}$ で正則な $\Sigma\mathbb{C}$ への写像 ψ が存在して、 ψ は W を $\Sigma\mathbb{C}$ の多重円板 $\Delta(r) = \{(x_i) \in \Sigma\mathbb{C} : |x_i| \leq r_i\}$ (但し、 $0 < r_i \leq \infty$) の閉 subvariety V に双正則にうつめこむ。

この定義より、定理3とあわせると次の命題を得る。

命題8 X を $\Sigma\mathbb{C}$ -スタイン多様体とし、 W を $\Sigma\mathbb{C}$ -Oka-Weil 領域とする。このとき、

$$H^k(W, \mathbb{C}) = 0 \quad (k \geq 1)$$

が成り立つ。

次の命題は、この定理の証明の中で最も本質的な部分を成している。

命題9 X を $\Sigma\mathbb{C}$ -スタイン多様体とする。このとき、 X をとりつくす、 $\Sigma\mathbb{C}$ -Oka-Weil 領域の増大列 $\{W_i\}$ で、 $\overline{W_i} \subset W_{i+1}$ となるものが存在する。

この命題には、命題5を、 $\Sigma\mathbb{C}$ -スタイン多様体の場合に refine した次の命題が重要な道具になる。

命題10 U_1, U_2 を X の連結な座標近傍で、 $\phi_1 = (z_i), \phi_2 = (w_i)$ を各々に対応した、 X 全体で定義された正則函数からなる局所座標系とする。このとき、任意の自然数 n に対して、自然数 m が存在して、函数 z_j ($j > m$) は、

$$U_2' = \{x \in U_2 : 0 = w_{n+1}(x) = w_{n+2}(x) = \dots\}$$

上 0 になる。

$\Sigma\mathbb{C}$ の集合を特徴付ける一つの方法は、有限次元空間で切ったときの切り口のよせあつめとして扱うことであったが、多様体の場合も、同様のアイディアをいかそうということである。多様体は曲っているからグローバルにはダメかも知れないが、ローカルに、 X のコンパクト集合の近傍で、命題10を『はしご』のように使って、次元の壁をよじのぼりながら、「ハムをスライスするように」有限次元 analytic spaces として薄く切りとっていかうというのである。

我々は、次の“近似定理”を必要とする。

命題11 X を $\Sigma\mathbb{C}$ -スタイン多様体とし、 W を $\Sigma\mathbb{C}$ -Oka Weil 領域とする。このとき、 $\bar{W}$ で正則な函数 f は X で正則な函数により、 $\bar{W}^{(n)}$ 上-様に近似される。但し、 $W^{(n)} = W \cap Y_n$ 。

この命題は、定理2を使うことによって得られる。

以上の結果を合わせることによって、定理7の証明ができるわけであるが、最後に、 $k=1$ の場合だけ示そう。

[定理7の $k=1$ の場合の証明]

U を X の開被覆とし、各開集合は擬凸開集合としてよい。
(定理1を見よ。) $\alpha \in X$ の開被覆 U に対する 1-コサイクルとする。今、 $\Sigma C-Oka-Weil$ 領域のとりつくし列を $\{W_i\}$ とすると、各 W_i に対しては $H^1(W_i, \mathcal{O}) = 0$ だから、 W_i での $\mathcal{O}$ -コチェイン β_i が存在して、 $\delta \beta_i = \alpha|_{W_i}$ 、 $\beta_i - \beta_{i+1} \in \Gamma(W_i, \mathcal{O})$ だから命題11よりある $g_i \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ が存在して、

$$\|\beta_i - \beta_{i+1} - g_i\|_{\overline{W}_i^{(1)}} \leq 2^{-i}.$$

但し、 $\|f\|_W = \sup_W |f(z)|$ とする。

$$\tilde{\beta}_i = \beta_i + g_1 + \dots + g_{i-1} \text{ とおくと、}$$

$$\|\tilde{\beta}_i - \tilde{\beta}_{i+1}\|_{\overline{W}_i^{(1)}} \leq 2^{-i}$$

$\tilde{\beta}_k - \tilde{\beta}_j$ において、 $k \rightarrow \infty$ のとき、 $\mathcal{O}(W_{i-1})$ の完備性より、 W_{i-1} で正則な函数 s_j に収束する。 W_{i-2} 上 $\tilde{\beta}_i + s_i = \tilde{\beta}_{i+1} + s_{i+1}$ となるから、

$$\beta = \tilde{\beta}_i + s_i \quad (W_{i-1} \text{ 上})$$

とおくと、 $\delta \beta = \delta \tilde{\beta}_i = \alpha|_{W_i}$ (W_i 上) となり、 β が求めるものとなり、 $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ が示せた。 [Q.E.D.]

以下参考文献をあげる。

参考文献

- [1] Y. Fujimoto: Analytic functionals on a countably infinite dimensional topological vector space. Tokyo J. Math. Vol. 3. No. 2 (1980)
- [2] Y. Fujimoto & M. Noumi.: Vanishing of the cohomology groups in $\Sigma\mathbb{C}$. To appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.
- [3] Y. Fujimoto: Infinite dimensional Stein manifolds in preparation.

↓↓↓ Key Word: $\Sigma\mathbb{C}$ -Stein manifold. ↑↑↑

— <1> — <2> — <1> — <5> — <おわり> — <!> —
 Kondo.