

Sparse tree 上のグラフラプリアンに付随する スペクトル測度の Hausdorff 次元

九州大学大学院 数理学府 博士課程 宇治野 広大

Kota Ujino

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1 導入と主結果

可算集合 V とその部分集合族 E が $E \subset \{p \in 2^V \mid \#p = 2\}$ を満たすとき (V, E) をグラフという. V, E の元をグラフの頂点, 辺という. 頂点 a, b が $\{a, b\} \in E$ を満たすとき a, b は隣接するといい, $a \sim b$ と書く. 頂点 $a_1, a_2, \dots, a_n$ が $j = 1, 2, \dots, n-1$ に対して a_j, a_{j+1} が隣接するとき a_1, a_n は結ばれるといい, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ を a_1, a_n の道という. 任意の頂点が結ばれるときグラフは連結であるという. 頂点 a の次数を $\deg(a) = \#\{b \in V \mid a \sim b\}$ とする. $G = (V, E)$ をグラフとし任意の頂点の次数が有限のとき G を局所有限であるという. グラフ $G = (V, E)$ が連結かつ任意の頂点 a, b の道が一意的に定まるとき G は tree という. Tree G の頂点 o を一つ指定したとき G を rooted tree, o を root という. Rooted tree $G = (V, E)$ に対して V 上の距離 $d(\cdot, \cdot)$ を次のように定義する: 頂点 a, b に対して

$$d(a, b) = \begin{cases} 0, & a = b, \\ \#p(a, b) - 1, & a \neq b. \end{cases}$$

V の部分集合 $S_n, n = 0, 1, \dots$ を $S_n = \{a \in V \mid d(o, a) = n\}$ とする. G を rooted tree とし S_n の任意の頂点の次数が等しいとき G を spherically homogeneous tree という. G を spherically homogeneous tree とし S_n の頂点の次数を d_n とする. このとき G は次の数列 $(g_n)_{n=0}^\infty$ で一意的に定まる:

$$g_n = \begin{cases} d_0, & n = 0, \\ d_n - 1, & n \geq 1. \end{cases}$$

定義 1.1. $L_n = 2^{n\Gamma}, n = 1, 2, \dots, \Gamma \in (0, 1)$ とする. 次の数列 $(g_n)_{n=0}^\infty$ で定まる spherically homogeneous tree G を Γ -sparse tree という:

$$g_n = \begin{cases} \lfloor n^{\frac{1-\Gamma}{1-\Gamma}} \rfloor, & n \in \{L_m \mid m \in \mathbb{N}\}, \\ 1, & n \notin \{L_m \mid m \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

$G = (V, E)$ を局所有限なグラフとし V 上の二乗可積分関数空間を $l^2(V)$ とする. このとき $l^2(V)$ は次の内積 $(\cdot, \cdot)$ でヒルベルト空間となる:

$$(f, g) = \sum_{u \in V} \overline{f(u)}g(u).$$

$l^2(V)$ の部分空間 $\mathcal{D}$ を $\mathcal{D} = \{f : V \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{supp} f < \infty\}$ とする. $L, A, D : l^2(V) \rightarrow l^2(V)$ を次のように定義

する : $f \in \mathcal{D}$ に対して

$$\begin{aligned} Lf(u) &= \sum_{v \sim u} (f(v) - f(u)), \\ Af(u) &= \sum_{v \sim u} f(v), \\ Df(u) &= \sum_{v \sim u} f(u) = \deg(u)f(u). \end{aligned}$$

L, A, D をグラフラプラシアン, 隣接行列, 次数行列という. L は本質的自己共役である.

(X, d_X) を距離空間, $\mathcal{B}(X)$ を (X, d_X) のボレル集合族とする. A を X の部分集合とし $d_X(A) = \sup\{d_X(x, y) \mid x, y \in A\}$ とする. X の部分集合族 $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ が $A \subset \cup_{i=1}^\infty A_i$ かつ $\sup_{i=1}^\infty d_X(A_i) \leq \delta$ を満たすとき $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ は A の δ -cover という.

定義 1.2. $\alpha \in [0, \infty)$ とする. $h_\delta^\alpha, h^\alpha : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ を次のように定義する :

$$\begin{aligned} h_\delta^\alpha(A) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty d_X(A_i)^\alpha \mid \{A_i\}_{i=1}^\infty \text{ is a } \delta\text{-cover of } A \right\}, \\ h^\alpha(A) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} h_\delta^\alpha(A). \end{aligned}$$

h^α を X の α 次元 Hausdorff 測度という. 実際に h^α を $\mathcal{B}(X)$ に制限したものは測度となる. X の部分集合 A の Hausdorff 次元 $\dim A$ を次のように定義する :

$$\dim A = \sup \{ \alpha \mid h^\alpha(A) \neq 0 \}.$$

測度 $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, \infty]$ の下側 Hausdorff 次元 $\dim_* \mu$, 上側 Hausdorff 次元 $\dim^* \mu$ を次のように定義する :

$$\begin{aligned} \dim_* \mu &= \inf \{ \dim A \mid A \in \mathcal{B}(X) \text{ such that } \mu(A) \neq 0 \}, \\ \dim^* \mu &= \inf \{ \dim A \mid A \in \mathcal{B}(X) \text{ such that } \mu(\mathbb{R} \setminus A) = 0 \}. \end{aligned}$$

$\dim_* \mu = \dim^* \mu = \alpha$ を満たすとき μ は Hausdorff 次元を持つといい, α を μ の Hausdorff 次元という.

補題 1.3 (J.Bruer [2]). $G = (V, E)$ を Γ -sparse tree, $H : l^2(V) \rightarrow l^2(V)$ を $H = -\overline{L}$ とする. E を H に付随するスペクトル測度, E を $(0, 4)$ に制限したものを $\tilde{E}$ とする. このとき次が成り立つ :

- (1) $\sigma_{ac}(H) = \emptyset$, $\sigma_{pp}(H) \cap (0, 4) = \emptyset$, $\sigma_{sc}(H) \cap (0, 4) = (0, 4)$,
- (2) $\Gamma \leq \dim_* \tilde{E} \leq \dim^* \tilde{E} \leq \frac{2\Gamma}{1+\Gamma}$.

定理 1.4. 補題 1.3 と同じように仮定する. このとき $\Gamma \leq \dim_* \tilde{E} \leq \dim^* \tilde{E} \leq \Gamma$ が成り立つ. $\tilde{E}$ は Hausdorff 次元を持ち $\tilde{E}$ の次元は Γ である.

2 グラフラプラシアンの直和分解

$G = (V, E)$ を数列 $(g_n)_{n=0}^\infty$ で定まる spherically homogeneous tree とする. $\pi_n : l^2(S_n) \rightarrow l^2(S_{n+1})$, $n = 0, 1, \dots$, を次のように定義する :

$$\pi_n f(u) = \sum_{v \in S_n : v \sim u} f(v), \quad u \in S_{n+1}.$$

このとき $\pi_n^* : l^2(S_{n+1}) \rightarrow l^2(S_n)$ は次のようになる :

$$\pi_n^* g(u) = \sum_{v \in S_{n+1} : v \sim u} g(v), \quad u \in S_n.$$

補題 2.1. $f, g \in l^2(S_n)$ に対して $(\pi_n f, \pi_n g) = g_n(f, g)$.

$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ なので $l^2(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} l^2(S_n)$ が成り立つ. $\Pi: l^2(V) \rightarrow l^2(V)$ を $\Pi = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \pi_n$ とする.

補題 2.2. $f \in \mathcal{D}$ に対して $Af = (\Pi + \Pi^*)f$.

数列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $\alpha_n = \#S_n = \dim(l^2(S_n))$, $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^{\alpha_n}$ を $l^2(S_n)$ の完全正規直交系とする. このとき以下の方法で $l^2(S_{n+1})$ の完全正規直交系 $\{e_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{\alpha_{n+1}}$ が得られる: $e_k^{(n+1)} \in l^2(S_{n+1})$ を $e_k^{(n+1)} = \|\pi_n e_k^{(n)}\|^{-1} \pi_n e_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots, \alpha_n$ とする. 補題 2.1 より $\{e_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{\alpha_n}$ は $l^2(S_{n+1})$ の正規直交系である. もし $\alpha_n = \alpha_{n+1}$ ならば $\{e_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{\alpha_n}$ は $l^2(S_{n+1})$ の完全正規直交系である. もし $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ ならばグラム・シュミットの直交化法より $l^2(S_{n+1})$ の正規直交系 $e_k^{(n+1)} \in l^2(S_{n+1})$, $k = \alpha_n + 1, \dots, \alpha_{n+1}$ が得られ, $\{e_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{\alpha_n} \cup \{e_k^{(n+1)}\}_{k=\alpha_n+1}^{\alpha_{n+1}}$ は $l^2(S_{n+1})$ の完全正規直交系になる.

$l^2(S_0)$ の完全正規直交系が与えられたとき, 上の方法で $l^2(S_n)$ の完全正規直交系 $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^{\alpha_n}$, $n = 0, 1, \dots$ が帰納的に得られる. このとき $\bigcup_{n=0}^{\infty} \{e_k^{(n)}\}_{k=1}^{\alpha_n}$ は $l^2(V)$ の完全正規直交系である.

$\sup_{n=0,1,\dots} \alpha_n = \infty$ と仮定し $\alpha_{-1} = 0$ とする. 数列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ は非減少なので, 与えられた $k \in \mathbb{N}$ に対して $N(k) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ が存在し $\alpha_{N(k)-1} < k \leq \alpha_{N(k)}$ が成り立つ. このとき

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \{e_k^{(n)} \mid k = 1, 2, \dots, \alpha_n\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{e_k^{(n)} \mid n = N(k), N(k) + 1, \dots\}.$$

補題 2.3. $l^2(V)$ の閉部分空間 M_k , $k = 1, 2, \dots$, を

$$M_k = \overline{\{e_k^{(n)} \mid n = N(k), N(k) + 1, \dots\}}$$

とする. このとき M_k は A, D, H で不変である.

補題 2.3 より H, A, D を M_k に制限したものを $H^{(k)}, A^{(k)}, D^{(k)}: M_k \rightarrow M_k$, $k = 1, 2, \dots$ とする. このとき $H^{(k)}$ は自己共役かつ $H = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H^{(k)}$ が成り立つ.

$G = (V, E)$ を Γ -sparse tree とする. $k \geq 2$ のとき次が成り立つ: $n, m \geq N(k)$ に対して

$$\begin{aligned} (e_k^{(n)}, H^{(k)} e_k^{(n)}) &= (e_k^{(n)}, D^{(k)} e_k^{(n)}) = g_n + 1, \\ (e_k^{(n)}, H^{(k)} e_k^{(n+1)}) &= -(e_k^{(n)}, A^{(k)} e_k^{(n+1)}) = -\sqrt{g_n}, \\ (e_k^{(n)}, H^{(k)} e_k^{(m)}) &= 0, \text{ if } |n - m| \geq 2. \end{aligned}$$

更に次が成り立つ: $n, m \geq N(1) = 0$ に対して

$$\begin{aligned} (e_1^{(n)}, H^{(1)} e_1^{(n)}) &= (e_1^{(n)}, D^{(1)} e_1^{(n)}) = \begin{cases} g_0 & (n = 0), \\ g_n + 1 & (n \geq 1), \end{cases} \\ (e_1^{(n)}, H^{(1)} e_1^{(n+1)}) &= -(e_1^{(n)}, A^{(1)} e_1^{(n+1)}) = -\sqrt{g_n}, \\ (e_1^{(n)}, H^{(1)} e_1^{(m)}) &= 0, \text{ if } |n - m| \geq 2. \end{aligned}$$

定義 2.4. $k \in \mathbb{N}$ として数列 $d_k = (d_k(n))_{n=1}^{\infty}$, $a_k = (a_k(n))_{n=1}^{\infty}$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} d_k(n) &= (e_k^{(n+N(k)-1)}, D^{(k)} e_k^{(n+N(k)-1)}), \\ a_k(n) &= (e_k^{(n+N(k))}, A^{(k)} e_k^{(n+N(k)-1)}). \end{aligned}$$

以降では $H^{(k)} : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$, $k = 1, 2, \dots$, を次の Jacobi 行列と同一視する :

$$H^{(k)} = \begin{pmatrix} d_k(1) & -a_k(1) & & & \\ -a_k(1) & d_k(2) & -a_k(2) & & \\ & -a_k(2) & d_k(3) & -a_k(3) & \\ & & -a_k(3) & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

同様に $A^{(k)}, D^{(k)} : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$ を次の Jacobi 行列と同一視する :

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & a_k(1) & & & \\ a_k(1) & 0 & a_k(2) & & \\ & a_k(2) & 0 & a_k(3) & \\ & & a_k(3) & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, D^{(k)} = \begin{pmatrix} d_k(1) & & & & \\ & d_k(2) & & & \\ & & d_k(3) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

3 Intermittency 関数と Hausdorff 次元

3.1 Hölder 連続性と Fourier 変換

定義 3.1. $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ を測度, $f \in L^1(\mathbb{R}, d\nu)$, $\alpha \in (0, 1)$ とする. $\widehat{f\nu}(\xi)$ を次のように定義する : $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\widehat{f\nu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} \nu(dx).$$

定数 $C > 0$ が存在し, 区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{L}(I) < 1$ ならば $\nu(I) < C\mathcal{L}(I)^\alpha$ を満たすとき ν は α -Hölder 連続であるという. ここで $\mathcal{L}(\cdot)$ は一次元 Lebesgue 測度である.

補題 3.2 (Strichartz, Robert S[5]). 有限測度 ν が α -Hölder 連続とする. このとき $C_1 = C_1(\alpha, \nu) > 0$ が存在し, 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}, d\nu)$ に対して

$$\sup_{T \geq 1} T^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{T}} |\widehat{f\nu}(t)|^2 dt \leq C_1 \|f\|^2.$$

3.2 Intermittency 関数と上側 Hausdorff 次元

定義 3.3. $\psi \in l^2(\mathbb{N})$, $E^{(k)}$ を $H^{(k)}$ に付随するスペクトル測度とする. 有限測度 $\mu_\psi^{(k)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ を次のように定義する : $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\mu_\psi^{(k)}(A) = (\psi, E^{(k)}(A)\psi).$$

$t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ に対して $\psi_k(t) = e^{-itH^{(k)}} \psi$, $\psi_k(t, n) = (\delta_n, \psi_k(t))$ とする. $a_\psi^{(k)}(n, T)$, $\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T)$, $\beta_\psi^{(k)}(p)$ を次のように定義する: $n \in \mathbb{N}, T > 0, p > 0$ に対して

$$\begin{aligned} a_\psi^{(k)}(n, T) &= \frac{1}{T} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{T}} |\psi_k(t, n)|^2 dt, \\ \langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) &= \sum_{n=1}^\infty n^p a_\psi^{(k)}(n, T), \\ \beta_\psi^{(k)}(p) &= \frac{1}{p} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T)}{\log T}. \end{aligned}$$

$\beta_\psi^{(k)}$ を intermittency 関数という.

補題 3.2 より次の補題が導かれる.

補題 3.4 (Barbaroux, J. M., J. M. Combes, R. Montcho[1]). $\alpha = \dim^*(\mu_\psi^{(k)}), \epsilon > 0$ とする. このとき $C_2 = C_2(\epsilon, \psi) > 0$ が存在し, 任意の $T > 0$ に対して

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \geq C_2 T^{p(\alpha - \epsilon)}.$$

特に任意の $p > 0$ に対して

$$\dim^*(\mu_\psi^{(k)}) \leq \beta_\psi^{(k)}(p).$$

4 Intermittency 関数の評価

この節は Tcheremchantsev, Serguei[6] を参考にしている.

定義 4.1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を可測関数, $0 < l < 4, B_l = [l, 4 - l] \subset \mathbb{R}$ とする. f が第一種関数であるとは $L > 0, x_0 \in B_L$ が存在し $f \in C_0^\infty(B_L)$ かつ $f(x_0) \neq 0$ を満たすことである. f が第二種関数であるとは f は有界かつ $E_0 \in (0, 4), L > 0$ が存在し $[E_0 - L, E_0 + L] \subset B_L$, $f \in C^\infty([E_0 - L, E_0 + L])$ かつ $x \in [E_0 - \nu, E_0 + \nu]$ に対して $|f(x)| \geq c > 0$ を満たすことである.

$\psi \in l^2(\mathbb{N})$ とし $m_\psi^{(k)}: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$ を次のように定義する:

$$m_\psi^{(k)}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_\psi^{(k)}(d\lambda)}{\lambda - z} = (\psi, (H^{(k)} - z)^{-1} \psi).$$

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \epsilon > 0$ に対して

$$I_\psi^{(k)}(\epsilon, B) = \epsilon \int_B dE |\operatorname{Im} m_\psi^{(k)}(E + i\epsilon)|^2$$

と定義する.

補題 4.2. f を有界な第一種関数, $\psi = f(H^{(k)})\delta_1, p > 0$ とする. このとき N を十分大きくすれば定数 $C_3 > 0$

と数列 $(q_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ が存在して $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$ かつ $\frac{L_N}{4} < T < \frac{L_{N+1}}{4}$ に対して

$$\begin{aligned} \langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) &\geq C_3 I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1}, B_L)^{-p} \\ &\quad + C_3 \left(L_N^{p+1+q_N} + T^{p+1} L_N^{\frac{p-1}{T-1}+q_N} \right) I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1}, B_L). \end{aligned}$$

補題 4.3. f を有界な第一種関数, $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$ とする. このとき $p > 0$ に対して

$$\beta_\psi^{(k)}(p) \geq \frac{p+1}{p+\frac{1}{T}}.$$

証明. 補題 4.2 より $x = I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1}, B_\nu)$ とすると

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \geq C_8 x^{-p} + C_8 \left(L_N^{p+1-q_N} + T^{p+1} L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}-q_N} \right) x.$$

$g(x) = x^{-p} + Kx, x > 0$ とすると $\inf_{x>0} g(x) = c(p)K^{\frac{p}{p+1}}, c(p) = p^{-\frac{p}{p+1}} + p^{\frac{1}{p+1}}$ となる. $\frac{L_N}{4} \leq T \leq \frac{L_{N+1}}{4}$ とすると $C'_3 = C'_3(p) > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} \langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) &\geq c(p)C_3 \left(L_N^{p+1-q_N} + T^{p+1} L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}-q_N} \right)^{\frac{p}{p+1}} \\ &\geq C'_3 L_N^{-\frac{p}{p+1}q_N} \left(L_N^{p+1} + T^{p+1} L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}} \right)^{\frac{p}{p+1}}. \end{aligned}$$

$\frac{L_N}{4} \leq T \leq L_N^A, A = \frac{p+\frac{1}{\Gamma}}{p+1}$ とすると

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \geq C'_3 L_N^{-\frac{p}{p+1}q_N} L_N^p \geq C'_3 L_N^{-\frac{p}{p+1}q_N} T^{\frac{p}{A}}. \quad (1)$$

$L_N^A \leq T \leq \frac{L_{N+1}}{4}$ とすると

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \geq C'_8 L_N^{-\frac{p}{p+1}q_N} T^p L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}-\frac{p}{p+1}} \geq C'_8 L_N^{-\frac{p}{p+1}q_N} T^{\frac{p}{A}}. \quad (2)$$

(1), (2) より $T > 0$ を十分大きくすると任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \geq C'_8 T^{\frac{p}{A}-\epsilon}$$

が成り立ち, 次が得られる:

$$\beta_\psi^{(k)}(p) = \frac{1}{p} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T)}{\log T} \geq \frac{p+1}{p+\frac{1}{\Gamma}} - \frac{\epsilon}{p}.$$

□

補題 4.4. f を第一種関数, $\psi = f(H^{(k)})\delta_1, p > 0$ とする. このとき $C_4 = C_4(p) > 0$ が存在し, N を十分大きくすると $L_N \leq T \leq L_N^{\frac{1}{\Gamma}}$ に対して

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \leq C_4 L_N^p + C_4 T^{p+1} L_N^{-\frac{1}{\Gamma}}.$$

補題 4.5. f を第一種関数, $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$ とする. このとき $p > 0$ に対して

$$\beta_\psi^{(k)}(p) \leq \frac{p+1}{p+\frac{1}{\Gamma}}.$$

証明. $L_N \leq T = L_N^A \leq L_N^{\frac{1}{\Gamma}}, A = \frac{p+\frac{1}{\Gamma}}{p+1}$ とする. 補題 4.4 より

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(L_N^A) \leq C_4 L_N^p$$

が成り立ち, 次が得られる:

$$\beta_\psi^{(k)}(p) \leq \frac{1}{p} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(L_N^A)}{\log L_N^A} \leq A^{-1} = \frac{p+1}{p+\frac{1}{\Gamma}}.$$

□

5 定理 1.4 の証明

補題 5.1. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とする. このとき $E(A) = 0$ が成り立つための必要十分条件は任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\mu_{\delta_1}^{(k)}(A) = 0$ が成り立つことである.

証明. $E(A) = 0$ と仮定すると $E^{(k)}(A) = 0$ であり

$$\mu_{\delta_1}^{(k)}(A) = (\delta_1, E^{(k)}(A)\delta_1) = 0.$$

次に任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\mu_{\delta_1}^{(k)}(A) = 0$ と仮定する. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $E^{(k)}(A) = 0$ であることを示せば十分である. p を多項式とすると

$$\mu_{p(H^{(k)})\delta_1}^{(k)}(A) = (p(H^{(k)})\delta_1, E^{(k)}(A)p(H^{(k)})\delta_1) = \int_A |p(\lambda)|^2 \mu_{\delta_1}^{(k)}(d\lambda) = 0.$$

これは $E^{(k)}(A)p(H^{(k)})\delta_1 = 0$ を示している. δ_1 は $H^{(k)} : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$ の cyclic vector なので, $\{p(H^{(k)})\delta_1 \in l^2(\mathbb{N}) \mid p \text{ は多項式}\}$ は $l^2(\mathbb{N})$ で稠密である. よって $E^{(k)}(A) = 0$ である. $\square$

補題 5.2. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A \subset (0, 4)$ とする. このとき $\tilde{E}(A) = 0$ が成り立つための必要十分条件は任意の $k \in \mathbb{N}$, 第一種関数 f に対して, $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$ としたとき $\mu_{\psi}^{(k)}(A) = 0$ が成り立つことである. 更に $\dim_* \tilde{E} = \dim_* \mu_{\psi}^{(k)}, \dim^* \tilde{E} = \dim^* \mu_{\psi}^{(k)}$ が成り立つ.

証明. $\tilde{E}(A) = 0$ と仮定すると補題 5.1 より $E^{(k)}(A) = 0$ なので

$$\mu_{\psi}^{(k)}(A) = (\psi, E^{(k)}(A)\psi) = 0.$$

任意の $k \in \mathbb{N}$ と第一種関数 f に対して $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$ としたとき $\mu_{\psi}^{(k)}(A) = 0$ と仮定する. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $E^{(k)}(A) = 0$ であることを示せば十分である. $f_n \in C_0^\infty(\frac{1}{n}, 4 - \frac{1}{n})$ は $|f_n| \leq 1$ かつ区間 $(\frac{2}{n}, 4 - \frac{2}{n})$ 上で $f_n = 1$ が成り立つとする. $\psi_n = f_n(H^{(k)})\delta_1$ とすると f_n は第一種関数であり, 仮定より

$$\mu_{\psi_n}^{(k)}(A) = (f_n(H^{(k)})\delta_1, E^{(k)}(A)f_n(H^{(k)})\delta_1) = \int_A |f_n(\lambda)|^2 \mu_{\delta_1}^{(k)}(d\lambda) = 0.$$

Lebeasgue の優収束定理より

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\psi_n}^{(k)}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A |f_n(\lambda)|^2 \mu_{\delta_1}^{(k)}(d\lambda) = \mu_{\delta_1}^{(k)}(A).$$

補題 5.1 より $E^{(k)}(A) = 0$. 後半の主張は測度の上側 (下側) Hausdorff 次元の定義より明らかである. $\square$

定理 1.4 の証明. 補題 5.2 より任意の $k \in \mathbb{N}$, 第一種関数 f に対して $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$ として $\dim_* \mu_{\psi}^{(k)} = \dim^* \mu_{\psi}^{(k)} = \Gamma$ が成り立つことを示せば十分である. 補題 1.3 より

$$\Gamma \leq \dim_* \mu_{\psi}^{(k)} \leq \dim^* \mu_{\psi}^{(k)}.$$

補題 3.4, 4.5 より任意の有界な第一種関数 $f, p > 0$ に対して

$$\dim^*(\mu_{\psi}^{(k)}) \leq \beta_{\psi}^{(k)}(p) = \frac{p+1}{p+\frac{1}{\Gamma}}.$$

$\square$

謝辞

研究代表者 安藤和典先生, 研究副代表者 森岡悠先生には発表の機会を頂き感謝申し上げます. この研究は JST SPRING, 助成番号 JPMJSP2136 の支援を受けて行われました.

参考文献

- [1] Barbaroux, J. M., J. M. Combes, and R. Montcho. "Remarks on the relation between quantum dynamics and fractal spectra." *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 213.2 (1997): 698-722.
- [2] Breuer, Jonathan. "Singular continuous spectrum for the Laplacian on certain sparse trees." *Communications in mathematical physics* 269.3 (2007): 851-857.
- [3] Jitomirskaya, Svetlana, and Yoram Last. "Power-law subordinacy and singular spectra I. Half-line operators." *Acta Mathematica* 183.2 (1999): 171-189.
- [4] Simon, Barry, and Günter Stolz. "Operators with singular continuous spectrum, V. Sparse potentials." *Proceedings of the American Mathematical Society* 124.7 (1996): 2073-2080.
- [5] Strichartz, Robert S. "Fourier asymptotics of fractal measures." *Journal of functional analysis* 89.1 (1990): 154-187.
- [6] Tcheremchantsev, Serguei. "Dynamical analysis of Schrödinger operators with growing sparse potentials." *Communications in mathematical physics* 253.1 (2005): 221-252.