

局所環の分離超積

名大・理 吉野 雄二 (Yuji Yoshino)

数学基礎論で、しばらく話題となっていた超積の概念は、
やっと最近になって、可換環の分野でも用いられ始め、2, 3の論文
が既に現われている。([2], [3]) しかし、一般的にいうと超積
とは非常に大きな"もの"であるため、その理論的取り扱いには、
回苦ハ苦する場合が多々。例えば、ネータ環の超積は、一
般的にいうと、もはやネータでな。そこで筆者は可換環とく
に、局所環の理論に非常に都合の良い分離超積というものを
考えた。それは、本質的には、[2], [3]の中に現われている
が、本稿の目的は、それについて系統的に述べ、将来の
応用に備えようというものである。実際、いくつかの応用例
も考えられているが、本稿の最後では、その一つを紹介する。

§1. N の ultrafilter

以下、 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ とする。 N の部分集合の族 $\mathcal{F}$ が、

filter であるとは、次の3つの条件を満している時である。

- (i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ (ii) $A, B \in \mathcal{F}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{F}$ (iii) $A \in \mathcal{F}$, $A \subset B \subset \mathbb{N}$ ならば $B \in \mathcal{F}$.

たとえば、 $A \subset \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{F}_A = \{B \subset \mathbb{N} \mid B \supset A\}$ とおくと $\mathcal{F}_A$ は filter である。このような形の filter を principal filter, そうでないものを non-principal filter と呼ぶ。また、 $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ が有限}\}$ とおくと、これも filter である。この $\mathcal{F}$ を Freché filter という。

$\mathbb{N}$ の filter $\mathcal{F}$ が、filters の集合の中で包含関係で極大の時、ultrafilter という。任意の filter に対して、それを含む ultrafilter が存在することは、Zorn の補題から容易である。また次の Lemma も証明は易しい。

Lemma (1.1) filter $\mathcal{F}$ について次は同値である。

- (1) $\mathcal{F}$ は ultrafilter (2) $A \in \mathcal{F}$ ならば $\mathbb{N} - A \notin \mathcal{F}$ が成立する。
 (3) $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{N}$ に対して、もし $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow$ ある A_i は $\mathcal{F}$ の元。

Lemma (1.2) ultrafilter $\mathcal{F}$ について、次は同値である。

- (1) $\mathcal{F}$ は non-principal (2) $\mathcal{F}$ は Freché filter を含む。

とくに、(1.2) より non-principal ultrafilter は、必ず存在する。以下の話では、non-principal ultrafilter を一つ取っておき、それを固定しておく。 また、それを $\mathcal{F}$ と書くことにする。

Notation (1.3) $i \in \mathbb{N}$ を変数にもつ命題 $P(i)$ に対して.

$\{i \in \mathbb{N} \mid P(i) \text{ が成立する}\} \in \mathcal{F}$ となるとき, $P(i)$ は殆んど全ての i について成立するということにする。記号として.

$P(i)$ for almost all i 又は略して, $P(i)$ for a. a. i と書くことにする。この記号法は筆者の発明によるもので、他の文献には使われていないので注意してほしい。

§2. 環の超積.

可算個の環の族 $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が与えられた時, R_i の超積 $\prod_i^* R_i$ は次のように定義される:

$$\prod_i^* R_i = \prod_i R_i / \sim$$

ここで, " $\sim$ " は次で与えられる同値関係である。

$$(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \sim (b_i)_{i \in \mathbb{N}} \stackrel{\text{def.}}{\iff} a_i = b_i \text{ for a. a. } i.$$

" $\sim$ " が実際に同値関係であることや, $\prod_i^* R_i$ が再び環となることは容易に確かめられる。直積の元 $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ の $\prod_i^* R_i$ における class を $(a_i)^*$ と書く。

Example (2.1) (1) $\{k_i\}$ が体の族の時, $\prod_i^* k_i$ も体である。

(2) $\{k_i\}$ が体の族で, 素数 p に対して, $\text{ch}(k_i) \neq p$ for a. a. i ならば, $\text{ch}(\prod_i^* k_i) = 0$

(Proof) (1) は容易なので略す。(2) もよく知られているし、易しいが、

あとで使うので、証明しておく。もし $p = \text{ch}(\Pi^* k_i) > 0$ とすると、 p は 体 $\Pi^* k_i$ の中で 0 である。定義にもとづいてこれをいふのは、
 $p = 0$ in k_i for a.a. i となる。これは仮定に反する。■

以下では、local rings の族 $\{(R_i, m_i, k_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ についてのみ考えることにする。このとき、 $\Pi^* R_i$ の subset m^* を、
 $m^* = \{(a_i)^* \in \Pi^* R_i \mid a_i \in m_i \text{ for a.a. } i\}$ とおくと、すぐに分かるように、 m^* は $\Pi^* R_i$ の ideal となる。また定義から $\Pi^* R_i / m^* \cong \Pi^* k_i$ である。 m^* に属する $\Pi^* R_i$ の元は、unit であることが、易しく分かるから、結局次の Lemma を得る。

Lemma (2.2) $\Pi^* R_i$ は、maximal ideal m^* , residue field $\Pi^* k_i$ をもつ quasi-local ring である。

$\Pi^* R_i$ について重要なことは次の事実である。

Lemma (2.3) [2; §1 (iii)] $\Pi^* R_i$ は m^* -adically (non-separated) complete である。即ち、
 $a^{(j)} = (a_i^{(j)})^* \in \Pi^* R_i$ に対し、 $a^{(j+1)} \equiv a^{(j)} \pmod{m^{*j}}$
 が全ての $j \in \mathbb{N}$ について成り立つなら、 $z \in \Pi^* R_i$ が存在して、
 $z \equiv a^{(j)} \pmod{m^{*j}}$ for $\forall j \in \mathbb{N}$

証明は、[2] を参照してください。

§3. 局所環の分離超積

以下でも. 引き続き $\{(R_i, m_i, k_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ は local rings の族とする. R_i の 分離超積 $\tilde{\prod} R_i$ を次のように定義する.

Def. (3.1) $\tilde{\prod} R_i := \prod R_i / \approx$

但し, $\approx$ は次によって与えられる $\prod R_i$ の元の間の同値関係である.

$(a_i) \approx (b_i) \iff$ 任意の $N > 0$ に対し, $a_i - b_i \in m_i^N$ for a.a.i

この定義から分るように, $\tilde{\prod} R_i$ は $\prod^* R_i$ の m^* -adic での分離化となっている. 即ち.

$$(3.2) \quad \tilde{\prod} R_i = \prod^* R_i / \bigcap_{N=1}^{\infty} m^{*N}$$

直積 $\prod R_i$ の元 (a_i) が与える $\tilde{\prod} R_i$ の元 $(a_i)^\sim$ とおくことにする. (2.3) と (3.2) の直接の結果として次を得る.

Lemma (3.3) $(\tilde{\prod} R_i, \tilde{m}, \prod^* k_i)$ は, $\tilde{m}$ -adically separated and complete local ring である. 但し, ここで

$$\tilde{m} = m^*(\tilde{\prod} R_i) \text{ である.}$$

$\tilde{\prod} R_i$ のネータ性を問題にすると次の定理を得る.

Theorem (3.4) 次は同値である.

(1) $\tilde{\prod} R_i$ は Noetherian

(2) $\exists r \in \mathbb{N}$ s.t. $\text{emb } R_i \leq r$ for a.a.i

(3) $\exists r \in \mathbb{N}$ s.t. $\text{emb } R_i = r$ for a.a.i

更に (3) が成立する時, $\text{emb } \tilde{\prod} R_i = r$ となる.

(proof) (2) と (3) の同値性は, (1.1) より明らか.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\tilde{\prod} R_i$ が Noetherian を示すためには, (3.3) より.

$\tilde{m}$ が有限生成であればよい。仮定より、 $A \in \mathcal{F}$ が存在して、 $i \in A$ ならば、 $m_i = (x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(r)}) R_i$ とかける。 $i \notin A$ ならば、 $x_i^{(j)} = 0$ とおき、 $x^{(j)} = (x_i^{(j)})_i \in \prod R_i$ ($j = 1, \dots, r$) とする。定義より、 $\tilde{m} = (x^{(1)}, \dots, x^{(r)}) \cdot \prod R_i$ が直ちに合る。
 (1) $\Rightarrow$ (2) も同様。 ■

次に、 $\prod R_i$ が Noetherian となる時、その次元について考えてみる。このために、

Def (3.5) $\{R_i\}$ が good family of local rings of dim. d .

とは、 i) $\exists r \in \mathbb{N}$ s.t. $\text{emb } R_i \leq r$ for a.a.i.

ii) $\dim R_i = d$ for a.a.i.

iii) $\exists s \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu(R_i) \leq s$ for a.a.i.

但し、local ring (R, m) に対して、 $\mu(R) = \inf \{n \mid m^n \text{ が } R \text{ のある parameter ideal に含まれる.}\}$ とおく。

$\{R_i\}$ が good family なら、(3.4) より $\prod R_i$ が Noetherian local ring となるか。その次元についてもこの場合は合る。

Proposition (3.6) $\{R_i\}$ が good family of local rings of dim. d ならば、 $\dim(\prod R_i) = d$.

(proof.) 仮定より $\exists A \in \mathcal{F}$ s.t. $\text{emb } R_i \leq r, \dim R_i = d$ &

$\mu(R_i) \leq s$ for $\forall i \in A$. $\forall i \in A$ の時、 R_i の s.d.p. $\{x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(d)}\}$

$\in m_i^s \subseteq (x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(d)}) R_i$ となるように選んでおく。 $i \notin A$ なら

ば、 $x_i^{(j)} = 0$ とし、 $x^{(j)} = (x_i^{(j)})_i$ ($j = 1, \dots, d$) とおく。

定義 5.1. $\tilde{m}^s \subset (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \cdot \tilde{\Pi} R_i$ となる s がある。 $\dim(\tilde{\Pi} R_i) \leq d$ を得る。 次に、 $z^{(1)}, \dots, z^{(t)} \in \tilde{m}$ について、

$\tilde{m}^n \subset (z^{(1)}, \dots, z^{(t)}) \cdot \tilde{\Pi} R_i$ for some $n > 0$ が成立するところ。 $t \geq d$ が示せれば、これより $\dim(\tilde{\Pi} R_i) \geq d$ が得られる。

$$(3.2) \text{ より } (m^*)^n \subset (z^{(1)}, \dots, z^{(t)}) \Pi^* R_i + \bigcap_{v \geq 0} (m^*)^v \\ \leq (z^{(1)}, \dots, z^{(t)}) \Pi^* R_i + (m^*)^{n+1}$$

したがって、 $m_i^n \subset (z_i^{(1)}, \dots, z_i^{(t)}) R_i + m_i^{n+1}$ for a. a. i.

$\therefore m_i^n \subset (z_i^{(1)}, \dots, z_i^{(t)}) R_i$ for a. a. i.

これより $\dim R_i \leq t$ for a. a. i. かつ $t \geq d$ を得る。 $\blacksquare$

(3.4) (3.6) を合わせて、次を得る。

Corollary (3.7) $\{R_i\}$ が good family of regular local rings of dim. d ならば、 $\tilde{\Pi} R_i$ は regular local ring of dim. d である。

Example (3.8) $R_i = k_i[x_1, \dots, x_n]_{(x_1, \dots, x_n)}$ (k_i : 体)

とすると、 $\tilde{\Pi} R_i \cong (\Pi^* k_i) \llbracket x_1, \dots, x_n \rrbracket$

Notation (3.9) $R = R_i$ for $\forall i \in N$ の時、 $\tilde{\Pi} R_i \in \tilde{R}$ とかくことにする。 $\tilde{R} \in R$ の分離超巾と呼ぶ。

natural map $R \rightarrow \tilde{R}$ が $x \mapsto (x)_i^\sim$ によって定義され $\tilde{m} = m \tilde{R}$, $\tilde{R}/\tilde{m} = (R/m)^*$ (超巾) 等が成立すること。は。

定義より明らかである。

次の定理が成立する。

Theorem (3.10) $(R, m, k) \in \text{local ring}$ とする。

(1) R の ideal の降鎖列 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ に対し 2 次は同値。

$$(i) \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \hat{R} = (0) \quad (ii) \tilde{R} \xrightarrow{\sim} \prod_i (R/I_i) : \text{同型}$$

$$(2) \tilde{R} = \prod_i (R/m^i)$$

$$(3) \tilde{R} = \hat{R}^h = \widehat{\tilde{R}}$$

(proof) (1)(i) $\Rightarrow$ (ii) 各 projection $p_i : R \rightarrow R/I_i$ より 自然な ring homom. $\tilde{p} : \tilde{R} \rightarrow \prod R/I_i$ が得られる。 $\tilde{p}$ は明らかに, いづれも surjective である。 injective であるために, $(x_i)^{\sim} \in \tilde{R}$ に対し, $\tilde{p}((x_i)^{\sim}) = 0$ とする。定義より, これは, 次のことを意味する。

$\forall n > 0$ に対し, $x_i \in I_i + m^n$ for a. a. i.

$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \hat{R} = (0)$ より, i が十分大きい時, $I_i \subset m^n$ となるので,

上のことから, $x_i \in m^n$ for a. a. i. $\tilde{R}$ の定義より, これは,

$(x_i)^{\sim} = 0$ を示す。

(2) は (1)(i) $\Rightarrow$ (ii) より明らか。また, (3) は (2) と $R/m^i = R^h/m^h i = \hat{R}/\hat{m}^i$ より明白である。

(1) (ii) $\Rightarrow$ (i) $\bigcap_i I_i \hat{R} \neq 0$ といふ矛盾を導く。 $x \neq 0 \in \bigcap_i I_i \hat{R}$ から取る。この時, natural map $\tilde{p} : \tilde{R} \rightarrow \prod \hat{R}/I_i \hat{R}$ により, $(x)^{\sim}$ は 0 へ移るが, 一方 $(x)^{\sim} \neq 0$ であるから, $\tilde{p}$ は injective である。

したがって, 右図で

φ が injective なることを分ければ,

よい。

$$\begin{array}{ccc} \prod (\hat{R}/I_i \hat{R}) & \xleftarrow{\tilde{p}} & \tilde{R} \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \cong \text{(3)より同型} \\ \prod (R/I_i) & \xleftarrow{\tilde{p}} & R \end{array}$$

そこで, $x_i \in R$ ($i \in \mathbb{N}$) に対し, $\varphi((x_i \bmod I_i)^\sim) = 0$ とする。定義より $\forall n > 0$ に対し, $x_i \in (I_i \hat{R} + \hat{m}^n) \cap R$ for a. a. i. かつ, $x_i \in I_i + m^n$ for a. a. i. 再び定義より, $(x_i \bmod I_i)^\sim = 0$ かつ, φ は injective である。■

Remark (3.10) より 任意の local ring の分離超積は, Artinian local rings の分離超積 となっていることが分る。したがって, $\{R_i\}$ が good family でない時には, たとえ $d = \dim R_i$ for all i であつたにしても, $\dim(\tilde{\prod} R_i) = d$ となるとは限らないことを注意しておく。

§4. 局所環上の加群の分離超積

以下でも $\{(R_i, m_i, k_i)\}$ は local rings の族とする。

右に於いて, M_i が R_i -module である時, M_i の超積 $\prod^* M_i$ が環の場合と同じようにして定義できる。即ち,

$$\prod^* M_i = \prod_i M_i / \sim$$

但し, $(x_i) \sim (y_i) \iff x_i = y_i$ for a. a. i.

明らかに $\prod^* M_i$ は $\prod^* R_i$ -module となる。また, (2.2) と全く同じ証明により次を得る。

Lemma (4.1) $\prod^* M_i$ は m^* -adically (non-separated) complete である。

$\varphi_i: M'_i \rightarrow M_i$ が R_i -module homomorphism である。
 自然な方法で $\pi^* \varphi_i: \pi^* M'_i \rightarrow \pi^* M_i$ $\pi^* R_i$ -module homom.
 が定義される。即ち、 $(\pi^* \varphi_i)(x'_i)^* = (\varphi_i(x'_i))^*$ 。

次の Lemma は、定義より直ちに合する。

Lemma (4.2) 任意 $i \in \mathbb{N}$ に対し、 $0 \rightarrow M'_i \rightarrow M_i \rightarrow M''_i \rightarrow 0$
 が R_i -module の exact sequence であるとき、

$$0 \rightarrow \pi^* M'_i \rightarrow \pi^* M_i \rightarrow \pi^* M''_i \rightarrow 0$$

は、 $\pi^* R_i$ -module の exact sequence である。

さて、 $\pi^* R_i$ modules の 分離超積 を定義しよう。

Definition (4.3) $\tilde{\pi} M_i := \pi^* M_i / \sim$

但し、 $\sim$ は、 $(x_i) \sim (y_i) \iff \forall N > 0$ に対し $x_i - y_i \in m_i^N M_i$ for a.a.

この定義から明らかなように、 $\tilde{\pi} M_i$ は $\pi^* M_i$ の m^* -adic での
 分離化となる。即ち、

$$(4.4) \quad \tilde{\pi} M_i = \pi^* M_i / \bigcap_{N \geq 0} m_i^{*N} \pi^* M_i$$

これを (4.1) と合わせて、

Corollary (4.5) $\tilde{\pi} M_i$ は $\sim$ も $\tilde{m}$ -adically separated
 and complete $\tilde{\pi} R_i$ -module である。

Remark (4.6) 各 $i \in \mathbb{N}$ に対し、 $f_i: S_i \rightarrow R_i$ が、
 local rings の local homom. であり、 M_i が R_i -module の時、 M_i の
 R_i -mod. とする分離超積と、 S_i -mod. とする分離超積は、一般的
 に異なるものであることに注意せよ。但し、 f_i が全ての i について

surjection の場合 r は両者は一致する。

次に我々は、分離超積について (4.2) のような exactness criterion のある条件のもとで成立する α を示したい。そのために、

Notation $N \subset M$ の R -modules の時、

$$d_R(M, N) := \inf \left\{ r \in \mathbb{N} \mid m^n M \cap N = m^{n-r} (m^r M \cap N) \right. \\ \left. \text{for any } n \geq r \right\}$$

と置き、 $N \subset M$ の Artin-Rees number と呼ぶことにする。

Lemma (4.7) 全 $a, i \in \mathbb{N}$ に対して、 $N_i \subset M_i$ の R_i -modules であり、更に integer $r \in \mathbb{N}$ があり、

$$d_{R_i}(M_i, N_i) \leq r \quad \text{for a. a. } i$$

が成立するものとする。この時、 $d_{\Pi^* R_i}(\Pi^* M_i, \Pi^* N_i) \leq r$ とある。

$$\text{即ち、} (m^*)^n \cdot (\Pi^* M_i) \cap (\Pi^* N_i) = (m^*)^{n-r} \cdot ((m^*)^r (\Pi^* M_i) \cap (\Pi^* N_i))$$

が全 a の $n \geq r$ について成立する。

(証明は定義から直接自明である。)

Theorem (4.8) 全 $a, i \in \mathbb{N}$ について、

$$0 \rightarrow M_i' \xrightarrow{\psi_i} M_i \xrightarrow{\varphi_i} M_i'' \rightarrow 0$$

の R_i -modules の exact sequence があり、更に、 $r \in \mathbb{N}$ があり、

$$d_{R_i}(M_i, M_i') \leq r \quad \text{for a. a. } i \text{ が成立するものとする。}$$

この時、

$$0 \rightarrow \tilde{\Pi} M_i' \xrightarrow{\tilde{\psi}} \tilde{\Pi} M_i \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \tilde{\Pi} M_i'' \rightarrow 0$$

は、 $\tilde{\Pi} R_i$ -modules の exact sequence である。

(proof) $\tilde{\gamma} \circ \tilde{\psi} = 0$ 及 $\tilde{\gamma}$ surjective なることは明らか。

$\tilde{\psi}$ injective である: $(x_i)^\sim \in \tilde{\Pi} M_i$ に対して $\tilde{\psi}((x_i)^\sim) = 0$

である。即ち $(\psi_i(x_i))^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (m^*)^n (\Pi^* M_i)$ であり、(4.7) より、

$\forall n \geq r$ に対して、

$$\psi^*((x_i)^*) = (\psi_i(x_i))^* \in (m^*)^n (\Pi^* M_i) \cap \psi^*(\Pi^* M_i') \subseteq (m^*)^{n-r} \psi^*(\Pi^* M_i')$$

ψ^* は injective であるから、 $(x_i)^* \in (m^*)^{n-r} (\Pi^* M_i')$ である。

任意の $n \geq r$ について成立するのだから、(4.4) より $(x_i)^\sim = 0$

次に、 $x = (x_i)^\sim \in \tilde{\Pi} M_i$ に対して、 $\tilde{\gamma}(x) = 0$ ならば、 $x \in \text{Im } \tilde{\gamma}$ である

ことを示そう。このとき、 $z = (x_i)^* \in \Pi^* M_i$ である。 (4.2) より、

$$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [\psi^*(\Pi^* M_i') + (m^*)^n \Pi^* M_i]$$

である。よって $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、 $\exists y^{(n)} \in \psi^*(\Pi^* M_i')$ s.t.

$$z - y^{(n)} \in (m^*)^n (\Pi^* M_i)$$

このとき、 $m > n$ ならば、 $y^{(n)} - y^{(m)} = (z - y^{(m)}) - (z - y^{(n)}) \in (m^*)^n (\Pi^* M_i)$

より、(4.7) より、 $y^{(n)} - y^{(m)} \in (m^*)^{n-r} \psi^*(\Pi^* M_i')$ for $\forall m > n \geq r$

である。 $\psi^*(\Pi^* M_i') \cong \Pi^* M_i'$ は (4.5) より m^* -adically

separated and complete である。 $\exists y \in \psi^*(\Pi^* M_i')$ s.t.

$\{y^{(n)}\}$ は y に収束する。この時、 $\forall \nu > 0$ に対して、 $\exists n > 0$ s.t.

$$z - y = (z - y^{(n)}) - (y - y^{(n)}) \in (m^*)^\nu (\Pi^* M_i)$$

である。 $\forall \nu > 0$ について言えるから、 $x = \tilde{\gamma}$ in $\tilde{\Pi} M_i$ 。(但し、

$\tilde{\gamma}$ は y in $\tilde{\Pi} M_i$ における image.) したがって、 $y \in \psi^*(\Pi^* M_i')$ であるから、

$\tilde{\gamma} \in \tilde{\psi}(\tilde{\Pi} M_i')$ 以上より、 $x \in \tilde{\psi}(\tilde{\Pi} M_i')$ を得る。 $\blacksquare$

Theorem (4.8) の応用は なる。例として、(3.10) (3) を 3 回 2 次を得る。

Corollary (4.9) $\widetilde{\Pi} R_i \cong \widetilde{\Pi}(R_i^h) \cong \widetilde{\Pi} \widehat{R}_i$

(proof) R_i -module の exact sequence $0 \rightarrow R_i \rightarrow \widehat{R}_i \rightarrow \widehat{R}_i/R_i \rightarrow 0$

に於いて $d_{R_i}(\widehat{R}_i, R_i) = 0$ である。(4.8) より、

$0 \rightarrow \widetilde{\Pi} R_i \rightarrow \widetilde{\Pi} \widehat{R}_i \rightarrow \widetilde{\Pi}(\widehat{R}_i/R_i) \rightarrow 0$ は exact. ($\widehat{m}_i = m_i \widehat{R}_i$ であるから、

R_i -mod. と $\widehat{R}_i$ -mod. とは一致するに注意せよ。)

したがって $\widetilde{\Pi}(\widehat{R}_i/R_i) = 0$ である。よって

$\forall x_i \in \widehat{R}_i$ に対して $x_i \in R_i + m_i^n \widehat{R}_i$ かつ $\forall n$ について成り立つから、
 $(x_i \bmod R_i)^{\sim} = 0$ ■

Corollary (4.10) $R \in \text{local ring}$ とする。 $\widehat{R} = S/I$

(但し S は regular local ring) と書くでおく。 なる。

$$\widetilde{R} = \widetilde{S}/I \cdot \widetilde{S}$$

が成立する。(3.7) より $\widetilde{S}$ は regular であることに注意)

(proof) $\widetilde{R} = \widehat{R}$ (3.10) or (4.9) である。故に $R = S/I$ と

とする。 S -module の exact seq. $0 \rightarrow I \rightarrow S \rightarrow R \rightarrow 0$ と

(4.8) より、 $0 \rightarrow \widetilde{I} \rightarrow \widetilde{S} \rightarrow \widetilde{R} \rightarrow 0$ exact.

最後に $\widetilde{I} = I \cdot \widetilde{S}$ であることを示す。 $I \cdot \widetilde{S} \subset \widetilde{I}$ は明らか。

$\widetilde{I} \subset I \cdot \widetilde{S}$ を示すために、 $I = (f^{(1)} \dots f^{(l)}) S$ とおく。 $\forall (x_i)^* \in I^*$

は、 $x_i = \sum_{j=1}^l a_i^{(j)} f^{(j)}$ ($a_i^{(j)} \in S$) とおけるから、 $(x_i)^* = \sum (a_i^{(j)})^* (f^{(j)})^* \in I \cdot S^*$

$\therefore (x_i)^{\sim} \in I \cdot \widetilde{S}$ ■

Corollary (4.11) R は local ring, $\widehat{R}$ の係数体 k を
 もつとする。この時, $\widetilde{R} \cong \widehat{R} \widehat{\otimes}_k k^*$.

(proof) $\widehat{R} = k[[x_1, \dots, x_n]]/I$ とかける。 $\widetilde{k[[x_1, \dots, x_n]]} = k^*[[x_1, \dots, x_n]]$
 (c.f. (3.8)) だから, (4.10) より $\widetilde{R} = \widetilde{\widehat{R}} = k^*[[x_1, \dots, x_n]]/I \cdot k^*[[x_1, \dots, x_n]]$
 $= \widehat{R} \widehat{\otimes}_k k^*$ $\blacksquare$

(4.11) より R の体を含む local ring の時, $\widetilde{R}$ は R 上 faithfully
 flat となる。これを一般に言う。

Theorem (4.12) R は local ring の時, $R \rightarrow \widetilde{R}$ は,
 faithfully flat である。

証明のため。

Lemma (4.13) M は有限生成 R -module なら, $\widetilde{M} = M \otimes_R \widetilde{R}$.

(proof) (4.8) より $\sim$ は exact functor である。また, $\otimes_R \widetilde{R}$ は
 right exact であるから, M は有限生成 free module のときを考
 えばよい。この時, Lemma は明らか。 $\blacksquare$

[(4.12) の証明] (4.13) より functor $\otimes_R \widetilde{R}$ は, $\sim$ と equivalent
 とする, (4.8) より, $\sim$ は exact 故, $\otimes_R \widetilde{R}$ も exact functor.
 かつ, $\widetilde{R}$ は R 上 flat である。 $\blacksquare$

Example (4.14) $R_i = k_i[[x, y]]/(x^2 + y^i)$

($i \in \mathbb{N}$, k_i は体) とする。このとき,

$$\widetilde{\prod R_i} = (\prod k_i) [[x, y]]/(x^2)$$

となる。実際, $S_i = k_i[[x, y]]$ とおくと, (3.8) より

$\widetilde{\Pi} S_i = (\Pi^* k_i) \llbracket x, y \rrbracket$. ideal $I_i = (x^2 + y^i) S_i$ について.

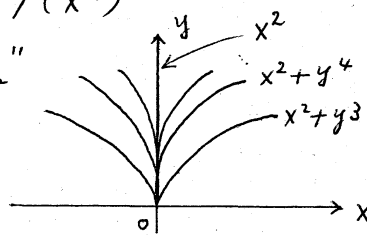
$\alpha_{S_i}(S_i, I_i) = 2$ for $\forall i \in \mathbb{N}$ のことから (4.8) より

$0 \rightarrow \widetilde{\Pi} I_i \rightarrow \widetilde{\Pi} S_i \rightarrow \widetilde{\Pi} R_i \rightarrow 0$ は exact. $\therefore \widetilde{\Pi} I_i$

は, 定義より, $(x^2 + y^i)^\sim = (x^2)^\sim + (y^i)^\sim \in \widetilde{\Pi} S_i$ で生成される.

$\therefore \widetilde{\Pi} I_i = x^2 \cdot \widetilde{\Pi} S_i$ と得る. $\therefore \widetilde{\Pi} R_i = (\Pi^* k_i) \llbracket x, y \rrbracket / (x^2)$

右図のように, x^2 は $x^2 + y^i$ の "極限" となっている. 一般の場合にも, これは,



正しい. 即ち, 係数体の拡大を無視

すれば, $\widetilde{\Pi} R_i$ は, $\{R_i\}$ の "素朴な意味での極限" である.

また, 上の例で, $0 \rightarrow R_i \xrightarrow{x} R_i$ は $\forall i \in \mathbb{N}$ に対して exact であるが, $0 \rightarrow \widetilde{\Pi} R_i \xrightarrow{x} \widetilde{\Pi} R_i$ は not exact. 即ち, (4.8) において, その仮定は必要である.

§5 Homological problem への応用.

今までの分離超積の理論の応用として, ある種の homological problem を考えよう. そのために,

Definition (5.1) 方程式系 $\{F_i(x, y) = 0\}$ (但し,

$F_i(x, y) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$) から local ring R の中に

Hochster の意味で解をもつ (略して, "H-解をもつ" ということにする)

とは, 1) $\dim R = n$ 2) R の s.o.p. $\{x_1, \dots, x_n\}$

と R の元の列 $\{y_1, \dots, y_m\}$ が存在して $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$.

M. Hochster は次の定理を示すことにより、体を含む local ring についての homological conjectures を解決した. ([4]) 即ち.

Theorem (5.2) ([4]) $\{F_i\} \subseteq \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ が正標数の体上 essentially of finite type の local domain に H-解をもたないならば、 $\mathbb{Q}$ を含む任意の local ring に H-解をもたない。

残された問題は、unequal characteristic local ring について、どの程度のことか言えるかということである。我々は分離超積を使って次の事を示すことになっている。

Theorem (5.3) $\{F_i\} \subseteq \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ が $\mathbb{Q}$ を含む local ring には、H-解をもたないとする。このとき、任意の $r, s \in \mathbb{N}$ に対して、 $p = p(F_i, r, s) \in \mathbb{N}$ が存在して、次の成立する。"(R, m) が local ring として、 $\text{emb } R \leq r$, $\mu(R) \leq s$ かつ $\text{ch}(R/m) \geq p$ ならば、 $\{F_i\}$ は R の中には、H-解をもたない。

(proof) 集合 $\{\text{ch}(R/m) \mid (R, m) \text{ は local ring として}, \{F_i\} \text{ は } R \text{ に H-解をもつ, 更に, } \text{emb}(R) \leq r, \mu(R) \leq s\}$ が、有限集合であることを示せばよい。よって、無限集合と仮定すると、次のような可算個の local rings の族 $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が得られる。

- 1) $\dim R_i = n$ for $\forall i \in \mathbb{N}$
- 2) $\text{emb } R_i \leq r$ for $\forall i \in \mathbb{N}$

- 3) $\mu(R_i) \leq s$ for $\forall i \in \mathbb{N}$. 4) $\{F_j\}$ は全 R_i に H -解をもつ.
 5) $ch(k_i) \neq ch(k_j)$ if $i \neq j$ (但し k_i は R_i の residue field.)
 1) 2) 3) より $\{R_i\}$ は good family of local rings of dim. n である。 $s=2$, $R = \tilde{\prod} R_i$ とおくと (3.6) より R は n -次元 local ring である。又、(4) と (3.6) の証明より $\{F_j\}$ が n -元 R に H -解をもつことが容易に分る。一方、 R の residue field は $\prod^* k_i$ であり、これは (2.1) より 標数 0 の体である。したがって R は 標数 0 の local ring であり、定理の仮定に反する。■

REFERENCES

- [1] 齊藤正彦: 超積と超準解析 ノンスタンダード・アナリシス 東京図書.
 [2] J.Becker, J.Denef, L.Lipschitz, and L.van den Dries: Ultraproducts and Approximation in Local Rings I, Inventiones math. 51, 189-203 (1979).
 [3] Cristiana Mateescu, Dorin Popescu: Ultraproducts and big Cohen-Macaulay modules (preprint).
 [4] M.Hochster: Topics in the homological theory of modules over commutative rings, C.B.M.S.Reg.Conf.Series in Math., No24, Amer.Math.Soc., Providence, R.I. (1975).